OSJEČKI MATEMATIČKI LIST 18 (2018), 1-13

Generalizirani svojstveni problem

Marija Miloloža Pandur[*], Marinela Pilj[†]

Sažetak

U ovome radu uvodimo pojam generaliziranog svojstvenog problema danog matričnog para koji je poopćenje osnovnog svojstvenog problema jedne matrice. Pokazujemo koje se sve poteškoće pojavljuju prije korektne definicije generaliziranog svojstvenog problema. Također, definiramo ekvivalentne i istovremeno dijagonalizibilne matrične parove te pokazujemo što ti pojmovi znače za generalizirani svojstveni problem.

Ključne riječi: *osnovni svojstveni problem, generalizirani svojstveni problem, svojstvena vrijednost, svojstveni vektor, regularan i singularan matrični par, ekvivalentni matrični parovi*

Generalized eigenproblem

Abstract

In this paper we introduce the generalized eigenproblem for a given matrix pair which is a generalization of the ordinary eigenproblem for a single matrix. We point out the difficulties that appear before the generalized eigenproblem can be defined. Also, we define equivalent and simultaneously diagonalizable matrix pairs and show what this concept means for the generalized eigenproblem.

Key words: *ordinary eigenproblem, generalized eigenproblem, eigenvalue, eigenvector, regular and singular matrix pair, equivalent matrix pairs*

[*]Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: mmiloloz@mathos.hr
[†]studentica, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: mpilj@mathos.hr

1 Osnovni i generalizirani svojstveni problem

David Hilbert (1862.–1943.) njemački matematičar.

Danas se studenti susreću s pojmom svojstvenih vektora i svojstvenih vrijednosti dane matrice unutar kolegija linearne algebre. Međutim, povijesno ti se pojmovi pojavljuju u 17. i 18. stoljeću unutar analitičke geometrije pri proučavanju kvadratnih formi, te u 18. stoljeću unutar algebre u postupku dobivanja rješenja diferencijalnih jednadžbi. Njemački matematičar David Hilbert prvi je 1904. upotrijebio njemačku riječ *eigen*, koja znači vlastiti, svojstveni, te koja se kasnije uvriježila i u engleskom jeziku, te se danas na engleskom jeziku svojstvena vrijednost kaže *eigenvalue*, a svojstveni vektor *eigenvector*. Više informacija o zanimljivom povijesnom razvoju spektralne teorije možete pročitati u [5].

U ovome radu uvodimo poopćenje osnovnog svojstvenog problema jedne matrice na svojstveni problem dvije dane matrice. Naglašavamo do kojih se poteškoća dolazi prije korektne definicije svojstvenog problema dvije matrice. Također, uvodimo nove pojmove koji su analogoni pojmovima sličnih matrica i dijagonalizibilne matrice.

Osnovni svojstveni problem sastoji se od određivanja skalara $\lambda \in \mathbb{C}$ i ne-nul vektora $x \in \mathbb{C}^n$ takvih da vrijedi

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0, \tag{1}$$

pri čemu je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ zadana kvadratna matrica. U tome je slučaju skalar λ **svojstvena** ili **karakteristična vrijednost** matrice A, a vektor x **svojstveni** ili **karakteristični vektor** pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Geometrijski, svojstveni vektor dane matrice je onaj vektor kojemu matrica ne mijenja smjer kada djeluje na njega. Lako se vidi da ako je x svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ, onda je i svaki vektor αx, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, također svojstveni vektor za λ. Jednakost (1) možemo pisati i u sljedećem obliku:

$$(A - \lambda I)x = 0, \quad x \neq 0, \tag{2}$$

gdje je I jedinična matrica reda n. Postojanje ne-nul vektora x takvog da vrijedi (2) implicira da matrica $A - \lambda I$ mora biti neinvertibilna. U tome slučaju je

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{3}$$

Polinom $\det(A - \lambda I)$ stupnja n u kompleksnoj varijabli λ nazivamo **svojstveni** ili **karakteristični polinom** matrice A. Iz (3) slijedi da su korijeni karakterističnog polinoma svojstvene vrijednosti matrice A. Stoga iz Osnovnog teorema algebre[1] slijedi sljedeći važan teorem:

Teorem 1.1. Svaka matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ima n, ne nužno različitih, svojstvenih vrijednosti.

Ponovimo na sljedećem primjeru način rješavanja svojstvenog problema.

Primjer 1.1. Neka je zadana matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$. Iz karakterističnog polinoma

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-6)$$

dobivamo da su njegovi korijeni, odnosno svojstvene vrijednosti matrice A jednake $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 6$. Za svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = -1$ iz homogenog sustava jednadžbi $(A - (-1)I)x = 0$ dobivamo $x_2 = -x_1$ pa je jedan svojstveni vektor za tu svojstvenu vrijednost $[1, -1]^T$. Za svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = 6$ iz homogenog sustava jednadžbi $(A - 6I)x = 0$ dobivamo $x_2 = 5x_1/2$ pa je jedan svojstveni vektor za tu svojstvenu vrijednost $[2, 5]^T$.

Detaljnije o osnovnom svojstvenom problemu može se naći u [1, odjeljak 5.5].

Desnu stranu u (1) možemo zapisati kao $\lambda I x$. Stoga je prirodno uvesti poopćenje problema (1) tako da se umjesto jedinične matrice I na desnoj strani pojavi neka druga kvadratna matrica $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Tada govorimo o **generaliziranom svojstvenom problemu matričnog para** (A, B), koji se sastoji od određivanja skalara $\lambda \in \mathbb{C}$ i ne-nul vektora $x \in \mathbb{C}^n$ za koje vrijedi

$$Ax = \lambda Bx, \quad x \neq 0. \tag{4}$$

U tome slučaju λ zovemo **svojstvena vrijednost matričnog para** (A, B), a x **svojstveni vektor** pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Par (λ, x) zovemo **svojstveni par**. Jednakost (4) možemo pisati i u sljedećem obliku:

$$(A - \lambda B)x = 0, \quad x \neq 0. \tag{5}$$

Iz (5), analogno kao i kod svojstvenog problema za matricu, slijedi da je

$$\det(A - \lambda B) = 0. \tag{6}$$

[1] Osnovni teorem algebre tvrdi da svaki polinom p stupnja $n \geq 1$ ima točno n kompleksnih korijena $x_1, \ldots, x_n$ i može se na jedinstven način (do na poredak faktora) zapisati u obliku $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$.

Polinom $\det(A - \lambda B)$ u kompleksnoj varijabli λ zovemo **karakteristični polinom matričnog para** (A, B). Iz (6) slijedi da su korijeni karakterističnog polinoma svojstvene vrijednosti matričnog para (A, B).

Poznato je da su svojstvene vrijednosti dijagonalne matrice upravo njezini dijagonalni elementi. Sukladno tome željeli bismo jednostavno dobiti svojstvene vrijednosti matričnog para u kojemu su obje matrice dijagonalne. No, najprije moramo uvesti pretpostavku o invertibilnosti matrice B.

Tvrdnja 1. U generaliziranom svojstvenom problemu, ako su $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ i $B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ dijagonalne matrice takve da je $b_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, tada su svojstvene vrijednosti matričnog para (A, B) dane s $\lambda_i := a_i / b_i$, $i = 1, \ldots, n$, odnosno svojstvene vrijednosti su kvocijenti odgovarajućih dijagonalnih elemenata.

Dokaz. Neka su dane matrice A i B kao u pretpostavci tvrdnje. Tada je $A - \lambda B$ dijagonalna matrica pa je karakteristični polinom para (A, B) jednak umnošku odgovarajućih dijagonalnih elemenata: $\det(A - \lambda B) = (a_1 - \lambda b_1) \cdots (a_n - \lambda b_n)$. Tada se lako vidi da su korijeni tog polinoma upravo odgovarajući kvocijenti dijagonalnih elemenata: $a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n$. $\square$

Sada se nameće pitanje: što možemo reći o svojstvenim vrijednostima dijagonalnog matričnog para (A, B) u kojem matrica B na dijagonali ima neki element koji je jednak nuli? Pogledajmo sljedeći primjer dijagonalnih matrica:

Primjer 1.2. Neka su zadane sljedeće matrice: $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
Karakteristični polinom matričnog para (A, B) je:

$$\det(A - \lambda B) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3\lambda \end{vmatrix} = -18\lambda.$$

Jedna svojstvena vrijednost je sigurno 0 (to možemo očitati iz kvocijenta 0/3), a postoji li druga svojstvena vrijednost? Iako su zadane matrice reda 2, karakteristični polinom je stupnja 1 pa ovaj matrični par ima samo jednu kompleksnu svojstvenu vrijednost. Kvocijent 6/0 dijagonalnih elemenata nas motivira da drugu svojstvenu vrijednost, onu „koja nedostaje" definiramo kao ∞.

Pojavljivanje ∞ kao svojstvene vrijednosti je neobično, ali razlog tome je nesimetrična uloga matrica A i B u (4). Zbog toga se generalizirani svojstveni problem također zapisuje u obliku (vidi [6, str. 272–273]):

$$\beta A x = \alpha B x. \tag{7}$$

Sada A i B imaju simetričnu ulogu, ali ako par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ zadovoljava (7), onda (7) zadovoljava i svaki par $(\tau\alpha, \tau\beta)$ za bilo koji kompleksni skalar τ. Stoga, ako bismo par (α, β) smatrali svojstvenom vrijednošću matričnog para (A, B), morali bismo time smatrati i svaki par $(\tau\alpha, \tau\beta)$ za proizvoljni $\tau \neq 0$. To nam sugerira da bi se potprostor $\langle \alpha, \beta \rangle := \{\tau(\alpha, \beta) : \tau \in \mathbb{C})\} \subseteq \mathbb{C}^2$ razapet s $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ trebao smatrati svojstvenom vrijednošću matričnog para (A, B).

Nadalje, ostaje nam problem mogućeg pojavljivanja nedefiniranog izraza $0/0$ kao kvocijenta odgovarajućih dijagonalnih elemenata dijagonalnog matričnog para. Zbog toga uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 1.1. Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kvadratne matrice. Matrični par (A, B) je **singularan**[2] ako je $\det(A - \lambda B) = 0$, za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$, odnosno ako je $\det(\beta A - \alpha B) = 0$, za svaki $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. U suprotnom, matrični par (A, B) je **regularan**.

Navedimo dva dovoljna uvjeta da zadani matrični par bude singularan, odnosno regularan.

Propozicija 1.1. (vidi [6, str. 274, primjer 1.3]) Ako jezgre matrica A i B nemaju trivijalan presjek, matrični par je singularan.

Dokaz. Pretpostavimo da postoji vektor $x \neq 0$ koji je u jezgri matrice A i u jezgri matrice B, tj. da vrijedi $Ax = 0 = Bx$. Tada za svaki kompleksan par (α, β) vrijedi $(\beta A - \alpha B)x = 0$, odnosno matrica $\beta A - \alpha B$ je singularna za svaki par (α, β), pa je matrični par (A, B) singularan. □

Propozicija 1.2. (vidi [6, str. 274, primjer 1.4]) Ako je barem jedna od matrica A, B invertibilna, onda je matrični par (A, B) regularan.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, neka je matrica B invertibilna. Za par $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ vrijedi: $\det(\beta A - \alpha B) = \det(-B) \neq 0$. Kako postoji par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ za koji je $\det(\beta A - \alpha B) \neq 0$, matrični par (A, B) je regularan. □

Sada napokon možemo korektno definirati svojstvenu vrijednost matričnog para, po analogiji s definicijom svojstvene vrijednosti matrice. Prvo dajemo definiciju u slučaju da promatramo generalizirani svojstveni problem oblika (4), a kasnije oblika (7).

[2] Po definiciji se singularnim matričnim parom smatra i par pravokutnih matrica $A, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, gdje je $n \neq m$ (vidi [3, str. 174]).

Definicija 1.2. Neka je (A, B) regularan matrični par reda n s karakterističnim polinomom $p(\lambda) \equiv \det(A - \lambda B)$. **Svojstvene vrijednosti matričnog para** (A, B) definiramo kao

i) korijene karakterističnog polinoma,

ii) ∞ (algebarske višestrukosti $n - \mathrm{st}(p)$) ako je $\mathrm{st}(p) < n$, gdje $\mathrm{st}(p)$ označava stupanj polinoma p.

U sljedećoj napomeni povezujemo regularan generalizirani svojstveni problem s osnovnim svojstvenim problemom [3, str. 174, propozicija 4.6].

Napomena 1.1. Neka je λ' svojstvena vrijednost para (A, B), pri čemu je B invertibilna matrica. Koristeći Binet–Cauchyjev teorem (vidi [1, str. 98, teorem 3.2.26]) dobivamo:

$$0 = \det(A - \lambda' B) = \det(AB^{-1} - \lambda' I) = \det(B^{-1}A - \lambda' I).$$

Stoga je λ' ujedno i svojstvena vrijednost matrice AB^{-1} i matrice $B^{-1}A$. Vrijedi i obratno. Analogno, ako je A invertibilna matrica, onda su svojstvene vrijednosti para (A, B) jednake recipročnim svojstvenim vrijednostima matrica $A^{-1}B$ ili BA^{-1}, gdje svojstvenoj vrijednosti 0 matrice $A^{-1}B$ odgovara svojstvena vrijednost ∞ para (A, B).

Sada navodimo teorem koji govori o broju svojstvenih vrijednosti regularnog para, a koji je poopćenje teorema 1.1. Iz dokaza tog teorema slijedi da je stupanj karakterističnog polinoma para (A, B) jednak rangu matrice B. Stoga, ako je B neinvertibilna, pojavljuje se ∞ kao svojstvena vrijednost.

Teorem 1.2. (vidi [6, str. 275], [3, str. 174, propozicija 4.6]) Regularan matrični par (A, B) reda n ima n svojstvenih vrijednosti. Ako je B neinvertibilna, onda je ∞ svojstvena vrijednost algebarske višestrukosti $n - \mathrm{r}(B)$, gdje je $\mathrm{r}(B)$ rang matrice B.

Dokaz. Već smo vidjeli da je generalizirani svojstveni problem s invertibilnom B, ekvivalentan osnovnom svojstvenom problemu matrice $B^{-1}A$ (vidi napomenu 1.1), stoga taj problem ima n kompleksnih svojstvenih vrijednosti, uključujući višestrukosti. Pretpostavimo sada da je B neinvertibilna, i neka je $B = U\Sigma V^*$ njena SVD dekompozicija[3]. Tada koristeći Binet–

[3]Za matricu $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, rastav $B = U\Sigma V^*$, gdje su $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitarne, a $\Sigma \in \mathbb{C}^{m\times n}$ pravokutna dijagonalna matrica s realnim nenegativnim dijagonalnim elementima, zovemo singularna dekompozicija matrice B (vidi [6, str. 30, teorem 4.1]).

Cauchyjev teorem i činjenicu da je determinanta unitarne matrice po modulu jednaka 1, slijedi

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda B) &= \det(A - \lambda\, U\Sigma V^*) \\ &= \det\big(U(U^* A\, V - \lambda\, \Sigma)V^*\big) \\ &= \det U \cdot \det(U^* A\, V - \lambda\, \Sigma) \cdot \det V^* .\end{aligned}$$

Kako je $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(\Sigma)$, na dijagonali matrice $U^*AV - \lambda\Sigma$ imamo samo $\mathrm{r}(B)$ λ_i, pa je stupanj polinoma $\det(U^*AV - \lambda\Sigma)$ jednak upravo $\mathrm{r}(B)$. U tome slučaju, par (A, B) ima $\mathrm{r}(B)$ kompleksnih svojstvenih vrijednosti (korijeni polinoma $\det(A - \lambda B)$), a svojstvena vrijednost ∞ ima višestrukost $n - \mathrm{r}(B)$. □

Sada možemo poopćiti tvrdnju 1 tako da pretpostavimo regularnost matričnog para.

Tvrdnja 2. Neka su dane dijagonalne matrice $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ i $B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ takve da je par (A, B) regularan. Tada su svojstvene vrijednosti matričnog para (A, B) dane s $\lambda_i := a_i/b_i$, $i = 1, \ldots, n$, odnosno svojstvene vrijednosti su kvocijenti odgovarajućih dijagonalnih elemenata, s tim da kvocijent $a_i/0$ za neki $a_i \neq 0$ odgovara beskonačnoj svojstvenoj vrijednosti.

Dokaz. Već smo dokazali tvrdnju ako je matrica B invertibilna. Pretpostavimo stoga da je B neinvertibilna. Kao prvo, $0/0$ ne može se pojaviti kao kvocijent odgovarajućih dijagonalnih elemenata. Dokažimo to postupkom koji se naziva „dokaz od suprotnoga”: pretpostavimo da je zadani dijagonalni par (A, B) regularan i da za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $a_i = b_i = 0$. Tada se i-ti vektor kanonske baze za $\mathbb{C}^n$, nalazi i u jezgri matrice A i u jezgri matrice B, pa je prema propoziciji 1.1 par (A, B) singularan, što je kontradikcija s pretpostavkom da je regularan. Sada tvrdnja slijedi trivijalno iz $\det(A - \lambda B) = (a_1 - \lambda b_1) \cdots (a_n - \lambda b_n)$. □

Definirajmo sada svojstveni vektor danog matričnog para.

Definicija 1.3. Neka je λ' konačna svojstvena vrijednost regularnog matričnog para (A, B). Tada vektor $x \neq 0$ zovemo **svojstveni vektor** pridružen svojstvenoj vrijednosti λ' ako je $Ax = \lambda' Bx$. Ako je $\lambda' = \infty$ svojstvena vrijednost i $Bx = 0$ za vektor $x \neq 0$, onda x zovemo **svojstveni vektor** pridružen svojstvenoj vrijednosti λ'. Par (λ', x) zovemo **svojstveni par** matričnog para (A, B).

Ukoliko koristimo homogeni prikaz generaliziranog svojstvenog problema, nestaje potreba za razdvajanjem konačnih i beskonačnih svojstvenih vrijednosti.

Definicija 1.4. Neka je (A, B) regularan matrični par takav da vrijedi

$$\beta Ax = \alpha Bx \tag{8}$$

za $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ i $x \neq 0$. Potprostor $\langle \alpha, \beta \rangle$ naziva se **svojstvena vrijednost u homogenom obliku matričnog para** (A, B), a x se naziva **pridruženi svojstveni vektor**.

Neka vrijedi (8) za neki vektor $x \neq 0$, te $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ takve da je $\beta \neq 0$. Tada za $\lambda := \alpha/\beta$ vrijedi $Ax = \lambda Bx$, tj. λ je, po definiciji 1.2, konačna svojstvena vrijednost od (A, B), a x je, po definiciji 1.3, svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Dakle, svojstvena vrijednost u homogenom obliku $\langle \alpha, \beta \rangle$ iz definicije 1.4 za koju je $\beta \neq 0$, odgovara konačnoj svojstvenoj vrijednosti α/β iz definicije 1.2. Neka vrijedi (8) za neki vektor $x \neq 0$ i $(\alpha, \beta) = (1, 0)$, tj. $0Ax = 1Bx$. Tada je $Bx = 0$ za $x \neq 0$ pa je B neinvertibilna. Stoga po teoremu 1.2 par (A, B) ima beskonačnu svojstvenu vrijednost, a po definiciji 1.3, x je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti ∞. Dakle, svojstvena vrijednost u homogenom obliku $\langle 1, 0 \rangle$ iz definicije 1.4 odgovara svojstvenoj vrijednosti ∞ iz definicije 1.2.

Ukoliko je u regularnom paru (A, B) matrica A neinvertibilna, onda je nula svojstvena vrijednost toga para: naime, postoji vektor $x \neq 0$ takav da je $Ax = 0$ pa možemo pisati $Ax = 0Bx$.

Vratimo se primjeru 1.2. Matrični par (A, B) je regularan jer njegov karakteristični polinom nije nul-polinom. Obje matrice A, B su neinvertibilne. Svojstvene vrijednosti u homogenom obliku danog para su $\langle 6, 0 \rangle$ i $\langle 0, 3 \rangle$. Za svojstvenu vrijednost u homogenom obliku $\langle 6, 0 \rangle$, iz homogenog sustava jednadžbi $(0A - 6B)x = 0$, dobivamo da je $x_2 = 0$, a za x_1 da može biti proizvoljan. Pridruženi svojstveni vektor je tada primjerice $[1, 0]^T$. Za svojstvenu vrijednost u homogenom obliku $\langle 0, 3 \rangle$, iz homogenog sustava jednadžbi $(3A - 0B)x = 0$, dobivamo da je $x_1 = 0$, a za x_2 da može biti proizvoljan. Pridruženi svojstveni vektor je tada primjerice $[0, 1]^T$. Pogledajmo sljedeći primjer:

Primjer 1.3. Neka su zadane sljedeće matrice: $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Karakteristični polinom matričnog para (A, B) je:

$$\det(A - \lambda B) = \begin{vmatrix} 6 - 3\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (6 - 3\lambda)0 \equiv 0.$$

Uočavamo da je karakteristični polinom jednak nul-polinomu pa je par (A, B) singularan. To također uočavamo iz kvocijenta $0/0$ zadanog dijagonalnog matričnog para. Nadalje, uočavamo da za čak i jako male promjene, tzv. perturbacije, u matričnim elementima (npr. ako b_2 element zamijenimo bilo kojim brojem različitim od nule), perturbirani matrični par postaje regularan.

2 Ekvivalentni matrični parovi

Prisjetimo se (vidi [1, str. 111, korolar 3.3.18, str. 169, definicija 5.4.21]), matrice A i B nazivamo **ekvivalentnima** ako postoje invertibilne matrice S i T takve da vrijedi $B = SAT$, a **sličnima** ako postoji invertibilna matrica T takva da vrijedi $B = T^{-1}AT$. Iz činjenice da slične matrice imaju jednake karakteristične polinome (vidi [1, str. 174, propozicija 5.5.6]), slijedi da slične matrice imaju jednake svojstvene vrijednosti. Napominjemo da ekvivalentne matrice općenito nemaju jednake svojstvene vrijednosti.

Definirajmo sada ekvivalentne i kongruentne matrične parove te pogledajmo vezu između njihovih svojstvenih vrijednosti (vidi [6, str. 276.]):

Definicija 2.1. Za dva matrična para (A_1, B_1) i (A_2, B_2) kažemo da su **ekvivalentni** ako postoje invertibilne matrice E i F takve da vrijedi $A_2 = EA_1F$, $B_2 = EB_1F$.

Ako u definiciji 2.1 vrijedi $B_1 = B_2 = I$, onda za matrice E i F mora vrijediti $I = EIF$, tj. $E = F^{-1}$ što implicira da su matrice A_1 i A_2 slične.

Propozicija 2.1. Neka je dan regularan par (A_1, B_1). Tada je i njemu ekvivalentan par (A_2, B_2) regularan. Nadalje, ako je (λ, x) svojstveni par matričnog para (A_1, B_1), onda je $(\lambda, F^{-1}x)$ svojstveni par od (A_2, B_2). Dakle, regularni ekvivalentni matrični parovi imaju jednake svojstvene vrijednosti, a svojstveni vektori su povezani matricom F^{-1}.

Dokaz. Prva tvrdnja propozicije slijedi direktnom primjenom Binet–Cauchyjevog teorema. Pretpostavimo sada da je (λ, x) svojstveni par matričnog para (A_1, B_1). Tada vrijedi $A_1x = \lambda B_1x$. Množenjem s lijeve strane matricom E dobivamo sljedeći niz implikacija:

$$\begin{aligned} EA_1x = \lambda\, EB_1\, x &\Rightarrow EA_1 I\, x = \lambda\, EB_1 I\, x \\ &\Rightarrow EA_1 FF^{-1}x = \lambda\, EB_1 FF^{-1}x \\ &\Rightarrow A_2F^{-1}x = \lambda\, B_2F^{-1}x\,. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je $(\lambda, F^{-1}x)$ svojstveni par od (A_2, B_2). □

Sada ćemo definirati jednu važnu vrstu ekvivalentnih parova (vidi [4, str. 339]).

Definicija 2.2. Za dva matrična para (A_1, B_1) i (A_2, B_2) kažemo da su **kongruentni** ako postoji invertibilna matrica F takva da vrijedi $A_2 = F^*A_1F$, $B_2 = F^*B_1F$.

Posebno, ako postoji invertibilna matrica F takva da vrijedi $F^*AF = D_1$ i $F^*BF = D_2$, pri čemu su $D_1 = \mathrm{diag}(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ i $D_2 = \mathrm{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ dijagonalne, onda kažemo da matrica F **istovremeno dijagonalizira** matrični par (A, B). Matrični par za koji postoji takva matrica F nazivamo **istovremeno dijagonalizibilan**. Iako matrice D_1 i D_2 nisu jedinstvene, omjeri ϕ_i/ψ_i, $i = 1, \ldots, n$, jesu (vidi [4, str. 340]).

Sjetimo se da je matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dijagonalizibilna (slična dijagonalnoj matrici) ako i samo ako ima n linearno nezavisnih svojstvenih vektora. U tome slučaju sustav jednakosti $Ax_i = \lambda_i x_i$, $i = 1, \ldots, n$, je ekvivalentan matričnoj jednakosti $AX = X\Lambda$, gdje je $X = [x_1, \ldots, x_n]$ matrica svojstvenih vektora, a $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ dijagonalna matrica na čijoj su dijagonali pripadne svojstvene vrijednosti.

Neka je matrični par (A, B) regularan i istovremeno dijagonalizibilan, odnosno neka postoji F takva da vrijedi

$$F^*AF = D_1, \quad F^*BF = D_2.$$

Iz toga dobivamo da je

$$A = (F^*)^{-1}D_1F^{-1}, \quad B = (F^*)^{-1}D_2F^{-1}.$$

Sada svojstveni problem $Ax = \lambda Bx$ glasi

$$(F^*)^{-1}D_1F^{-1}x = \lambda(F^*)^{-1}D_2F^{-1}x.$$

Množenjem slijeva matricom F^* dobivamo

$$D_1 y = \lambda D_2 y,$$

pri čemu je $y = F^{-1}x$. To je svojstveni problem za regularan (vidi propoziciju 2.1) dijagonalni par čije su svojstvene vrijednosti kvocijenti dijagonalnih elemenata (tvrdnja 2), a to su ujedno i svojstvene vrijednosti danog para (A, B). Nadalje, svojstveni vektori svojstvenog problema za dijagonalni par su vektori $y_i = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, vektori kanonske baze za $\mathbb{C}^n$, pa su svojstveni vektori početnog generaliziranog svojstvenog problema $x_i = Fy_i$, $i = 1, \ldots, n$, upravo stupci matrice F. Dakle, ako je regularan matrični par (A, B) istovremeno dijagonalizibilan, onda postoji n linearno nezavisnih svojstvenih vektora. U tome slučaju, kao i za dijagonalizibilnu matricu, sustav jednakosti $Ax_i = \lambda_i Bx_i$, $i = 1, \ldots, n$, ekvivalentan je matričnoj jednakosti $AX = BX\Lambda$, gdje je $X = [x_1, \ldots, x_n]$ matrica svojstvenih vektora, a $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ dijagonalna matrica na čijoj su dijagonali pripadne svojstvene vrijednosti.

Pokažimo sada na primjeru istovremenu dijagonalizaciju matričnog para.

Primjer 2.1. Neka su zadane matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 5 \\ 8 & -30 & -18 \\ 5 & -18 & -11 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 4 & -42 & -30 \\ 3 & -30 & -21 \end{bmatrix}.$$

Matrica

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

istovremeno dijagonalizira matrični par (A, B), odnosno vrijedi $F^*AF = D_1$ i $F^*BF = D_2$, pri čemu su $D_1 = \mathrm{diag}(-1, -2, 1)$ i $D_2 = \mathrm{diag}(1, 2, -3)$ dijagonalne matrice. Prema prethodno iskazanom, svojstvene vrijednosti para (A, B) su također i svojstvene vrijednosti regularnog dijagonalnog para (D_1, D_2), a to su kvocijenti dijagonalnih elemenata, odnosno $-\frac{1}{3}$ i -1. S druge strane, iz karakterističnog polinoma matričnog para (A, B):

$$\det(A - \lambda B) = \begin{vmatrix} -2 & 8 - 4\lambda & 5 - 3\lambda \\ 8 - 4\lambda & -30 + 42\lambda & -18 + 30\lambda \\ 5 - 3\lambda & -18 + 30\lambda & -11 + 21\lambda \end{vmatrix} = 6(\lambda + \frac{1}{3})(\lambda + 1)^2$$

dobijemo da su svojstvene vrijednosti matričnog para (A, B) upravo $-\frac{1}{3}$ i -1. Također, za svaku svojstvenu vrijednost, iz homogenog sustava jednadžbi $(A - \lambda B)x = 0$ možemo dobiti da je jedan od svojstvenih vektora upravo odgovarajući stupac matrice F.

3 Zaključak

Tablica 1 sadrži opisane sličnosti i razlike između osnovnog i generaliziranog svojstvenog problema. Kao što smo vidjeli, generalizirani svojstveni problem nije jednostavno poopćenje osnovnog, jer se u generaliziranom svojstvenom problemu pojavljuju neke složene razlike u odnosu na osnovni.

Osnovni svojstveni problem	Generalizirani svojstveni problem
$Ax = \lambda x, x \neq 0$	$Ax = \lambda Bx, x \neq 0$
Karakteristični polinom matrice A: $\det(A - \lambda I)$, korijeni su svojstvene vrijednosti matrice A.	Karakteristični polinom para (A, B): $\det(A - \lambda B)$, za regularan par (A, B) korijeni su svojstvene vrijednosti toga para.
$A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ $\Rightarrow \lambda_i = a_i$	(A, B) regularan takav da $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, $B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ $\Rightarrow \lambda_i = a_i/b_i$
Slične matrice $\Rightarrow$ iste svojstvene vrijednosti.	Regularni ekvivalentni matrični parovi $\Rightarrow$ iste svojstvene vrijednosti.
Matrica reda n ima n konačnih svojstvenih vrijednosti (uključujući višekratnosti).	Regularan matrični par reda n ima n svojstvenih vrijednosti (uključujući ∞ i višekratnosti).

Tablica 1: Sličnosti i razlike između osnovnog i generaliziranog svojstvenog problema

Matrični parovi, kako regularni, tako i singularni, pojavljuju se u mnogim matematičkim modelima fizikalnih sustava (vidi [3, odjeljak 4.5] gdje možete pronaći i više detalja o matričnim parovima). U praksi se za rješavanje općeg svojstvenog i generaliziranog svojstvenog problema, umjesto teorijskog rješavanja predstavljenog u gornjim primjerima, koriste numerički algoritmi (vidi [3, odjeljak 4.4], [4, odjeljak 15.6], [2, odjeljak 11.4]).

Literatura

[1] D. Bakić, Linearna algebra, Školska knjiga, Zagreb 2008.

[2] B. N. Datta, Numerical Linear Algebra and Applications, 2nd edition, SIAM, Philadelphia 2010.

[3] J. W. Demmel, Applied Numerical Linear Algebra, SIAM, Philadelphia 1997.

[4] B. N. Parlett, The Symmetric Eigenvalue Problem, SIAM, Philadelphia 1998.

[5] L. A. Steen, Highlights in the history of spectral theory, The American Mathematical Monthly, 80(1973), 359–381

[6] G. W. Stewart, J.-g. Sun, Matrix Perturbation Theory, Academic Press, New York 1990.