Verteks-algebre i kombinatorni identiteti

Mirko Primc

Osijek 2007.

Plan predavanja

1. Rogers-Ramanujanovi identiteti
   $(\sum^{\infty} = \prod^{\infty})$
2. Kac-Moodyjeve Liejeve algebre $(\prod^{\infty})$
3. Verteks-algebre $(\sum^{\infty})$

Plan predavanja

1. Rogers-Ramanujanovi identiteti
   $(\sum^\infty = \prod^\infty)$
2. Kac-Moodyjeve Liejeve algebre $(\prod^\infty)$
3. Verteks-algebre $(\sum^\infty)$

Plan predavanja

1. Rogers-Ramanujanovi identiteti
   $(\sum^\infty = \prod^\infty)$
2. Kac-Moodyjeve Liejeve algebre $(\prod^\infty)$
3. Verteks-algebre $(\sum^\infty)$

Plan predavanja

1. Rogers-Ramanujanovi identiteti
   $(\sum^\infty = \prod^\infty)$
2. Kac-Moodyjeve Liejeve algebre $(\prod^\infty)$
3. Verteks-algebre $(\sum^\infty)$

Rogers-Ramanujanovi identiteti

Teorem

$a = 0, 1, \; |q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+a)}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}$$

$$= \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5j+1+a})(1-q^{5j+4-a})}$$

1894. Rogers
1917. Ramanujan, Schur
1980. Gordon, Andrews, Bressoud
1980. Baxter
1980. Lepowsky-Wilson

Rogers-Ramanujanovi identiteti

Teorem

$a = 0, 1$, $|q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+a)}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}$$

$$= \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5j+1+a})(1-q^{5j+4-a})}$$

1894. Rogers
1917. Ramanujan, Schur
1980. Gordon, Andrews, Bressoud
1980. Baxter
1980. Lepowsky-Wilson

Rogers-Ramanujanovi identiteti

Teorem

$a = 0, 1$, $|q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+a)}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}$$

$$= \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5j+1+a})(1-q^{5j+4-a})}$$

1894. Rogers
1917. Ramanujan, Schur
1980. Gordon, Andrews, Bressoud
1980. Baxter
1980. Lepowsky-Wilson

Rogers-Ramanujanovi identiteti

Teorem

$a = 0, 1$, $|q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+a)}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}$$

$$= \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5j+1+a})(1-q^{5j+4-a})}$$

1894. Rogers
1917. Ramanujan, Schur
1980. Gordon, Andrews, Bressoud
1980. Baxter
1980. Lepowsky-Wilson

Rogers-Ramanujanovi identiteti

Teorem

$a = 0, 1$, $|q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+a)}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}$$

$$= \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5j+1+a})(1-q^{5j+4-a})}$$

1894. Rogers
1917. Ramanujan, Schur
1980. Gordon, Andrews, Bressoud
1980. Baxter
1980. Lepowsky-Wilson

Rogers-Ramanujanovi identiteti

Teorem

$a = 0, 1$, $|q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+a)}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}$$

$$= \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5j+1+a})(1-q^{5j+4-a})}$$

1894.	Rogers
1917.	Ramanujan, Schur
1980.	Gordon, Andrews, Bressoud
1980.	Baxter
1980.	Lepowsky-Wilson

Particija prirodnog broja

$$n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{f_1 \text{ puta}} + \underbrace{2 + \cdots + 2}_{f_2 \text{ puta}} + \cdots = \sum_{j \geq 1} f_j \cdot j$$

$$16 = 1 + 1 + 1 + 3 + 5 + 5$$

$$f_1 = 3, \quad f_3 = 1, \quad f_5 = 2, \quad \text{ostali } f_j \text{ nula}$$

Teorem

$a = 0$ ili 1. Broj particija od n takvih da je

$$f_j + f_{j+1} \leq 1 \qquad i \qquad f_1 \leq 1 - a$$

jednak je broju particija od n čiji su dijelovi $\equiv \pm(1 + a) \mod 5$.

Particija prirodnog broja

$$n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{f_1 \text{ puta}} + \underbrace{2 + \cdots + 2}_{f_2 \text{ puta}} + \cdots = \sum_{j \geq 1} f_j \cdot j$$

$$16 = 1 + 1 + 1 + 3 + 5 + 5$$

$$f_1 = 3, \quad f_3 = 1, \quad f_5 = 2, \quad \text{ostali } f_j \text{ nula}$$

Teorem

$a = 0$ ili 1. Broj particija od n takvih da je

$$f_j + f_{j+1} \leq 1 \qquad i \qquad f_1 \leq 1 - a$$

jednak je broju particija od n čiji su dijelovi $\equiv \pm(1 + a) \mod 5$.

Particija prirodnog broja

$$n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{f_1 \text{ puta}} + \underbrace{2 + \cdots + 2}_{f_2 \text{ puta}} + \cdots = \sum_{j \geq 1} f_j \cdot j$$

$$16 = 1 + 1 + 1 + 3 + 5 + 5$$

$$f_1 = 3, \quad f_3 = 1, \quad f_5 = 2, \quad \text{ostali } f_j \text{ nula}$$

Teorem

$a = 0$ ili 1. Broj particija od n takvih da je

$$f_j + f_{j+1} \leq 1 \qquad i \qquad f_1 \leq 1 - a$$

jednak je broju particija od n čiji su dijelovi $\equiv \pm(1+a) \mod 5$.

Kombinatorni Rogers-Ramanujanovi identiteti

Particija prirodnog broja

$$n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{f_1 \text{ puta}} + \underbrace{2 + \cdots + 2}_{f_2 \text{ puta}} + \cdots = \sum_{j \geq 1} f_j \cdot j$$

$$16 = 1 + 1 + 1 + 3 + 5 + 5$$

$$f_1 = 3, \quad f_3 = 1, \quad f_5 = 2, \quad \text{ostali } f_j \text{ nula}$$

Teorem

$a = 0$ *ili* 1. *Broj particija od n takvih da je*

$$f_j + f_{j+1} \leq 1 \qquad i \qquad f_1 \leq 1 - a$$

jednak je broju particija od n čiji su dijelovi $\equiv \pm(1 + a) \mod 5$.

$a = 0: \quad f_j + f_{j+1} \leq 1 \qquad \pm 1 \mod 5$

$$8 = 8 \qquad 8 = 1 + 1 + 6$$
$$= 1 + 7 \qquad = 4 + 4$$
$$= 2 + 6 \qquad = 1 + 1 + 1 + 1 + 4$$
$$= 3 + 5 \qquad = 1 + \cdots + 1$$

"Paulijev princip isključivanja"

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - \ldots$$

Teorem (Gordon)

$k \geq 1$, $1 \leq a \leq k + 1$. *Broj particija od n takvih da je*

$$f_j + f_{j+1} \leq k \qquad i \qquad f_1 \leq a - 1$$

jednak je broju particija od n s dijelovima $\neq 0, \pm a \mod (2k + 3)$.

$a = 0: \quad f_j + f_{j+1} \leq 1 \qquad \pm 1 \mod 5$

$$\begin{aligned} 8 &= 8 \\ &= 1 + 7 \\ &= 2 + 6 \\ &= 3 + 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 8 &= 1 + 1 + 6 \\ &= 4 + 4 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 4 \\ &= 1 + \cdots + 1 \end{aligned}$$

"Paulijev princip isključivanja"

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - \dots$$

Teorem (Gordon)

$k \geq 1$, $1 \leq a \leq k + 1$. *Broj particija od n takvih da je*

$$f_j + f_{j+1} \leq k \qquad i \qquad f_1 \leq a - 1$$

jednak je broju particija od n s dijelovima
$\neq 0, \pm a \mod (2k + 3)$.

$a = 0: \quad f_j + f_{j+1} \leq 1 \qquad \pm 1 \mod 5$

$$\begin{aligned} 8 &= 8 \\ &= 1+7 \\ &= 2+6 \\ &= 3+5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 8 &= 1+1+6 \\ &= 4+4 \\ &= 1+1+1+1+4 \\ &= 1+\cdots+1 \end{aligned}$$

"Paulijev princip isključivanja"

$$1-2-3-4-5-\ldots$$

Teorem (Gordon)

$k \geq 1$, $1 \leq a \leq k+1$. *Broj particija od n takvih da je*

$$f_j + f_{j+1} \leq k \qquad i \qquad f_1 \leq a-1$$

jednak je broju particija od n s dijelovima
$\not\equiv 0, \pm a \mod (2k+3)$.

$a = 0: \quad f_j + f_{j+1} \leq 1 \qquad\qquad \pm 1 \mod 5$

$$\begin{aligned} 8 &= 8 \\ &= 1+7 \\ &= 2+6 \\ &= 3+5 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 8 &= 1+1+6 \\ &= 4+4 \\ &= 1+1+1+1+4 \\ &= 1+\cdots+1 \end{aligned}$$

"Paulijev princip isključivanja"

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - \ldots$$

Teorem (Gordon)

$k \geq 1$, $1 \leq a \leq k+1$. *Broj particija od n takvih da je*

$$f_j + f_{j+1} \leq k \qquad i \qquad f_1 \leq a - 1$$

jednak je broju particija od n s dijelovima
$\not\equiv 0, \pm a \mod (2k+3)$.

Teorem (Ramanujan)

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{e^{-6\pi}}{\ddots}}}} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) e^{2\pi/5}$$

$$1 - \cfrac{e^{-\pi}}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1-\cfrac{e^{-3\pi}}{\ddots}}} = \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) e^{\pi/5}$$

Hardy: "[They] defeated me completely; I had never seen anything in the least like them before. A single look at them is enough to show that they could only be written down by a mathematician of the highest class. They must be true because, if they were not true, no one would have had the imagination to invent them. . . ."

Teorem (Ramanujan)

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{e^{-6\pi}}{\ddots}}}} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) e^{2\pi/5}$$

$$1-\cfrac{e^{-\pi}}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1-\cfrac{e^{-3\pi}}{\ddots}}} = \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) e^{\pi/5}$$

Hardy: “[They] defeated me completely; I had never seen anything in the least like them before. A single look at them is enough to show that they could only be written down by a mathematician of the highest class. They must be true because, if they were not true, no one would have had the imagination to invent them. . . . ”

Ramanujanov dokaz ukazuje na vezu:

$$\boxed{\text{kombinatorika} \quad \longleftrightarrow \quad \theta - \text{funkcije}}$$

Problem: kritična temperatura sistema

Funkcija particije u statističkoj fizici

$$Z = \sum_{C} e^{-\frac{E(C)}{kT}}$$

Vjerojatnost stanja C je $\frac{1}{Z} e^{-\frac{E(C)}{kT}}$

Energija po jedinici volumena

$$u = \lim_{V \to \infty} \frac{1}{V} \left(\frac{1}{Z} \sum_{C} E(C) e^{-\frac{E(C)}{kT}} \right)$$

Rješivi modeli na 2-dim rešetki:

- Hamiltonijan zadan “kombinatorno” $(\sum^{\infty})$
- traži se analitičko ponašanje $Z(T)$ $(\prod^{\infty})$

Baxterovi modeli koriste RR-identitete i vezu

$$\boxed{\text{kombinatorika} \quad \longleftrightarrow \quad \theta - \text{funkcije}}$$

Rješivi modeli u statističkoj fizici

Problem: kritična temperatura sistema

Funkcija particije u statističkoj fizici

$$Z = \sum_C e^{-\frac{E(C)}{kT}}$$

Vjerojatnost stanja C je $\frac{1}{Z} e^{-\frac{E(C)}{kT}}$

Energija po jedinici volumena

$$u = \lim_{V \to \infty} \frac{1}{V} \left(\frac{1}{Z} \sum_C E(C) e^{-\frac{E(C)}{kT}} \right)$$

Rješivi modeli na 2-dim rešetki:

- Hamiltonijan zadan "kombinatorno" $(\sum^\infty)$
- traži se analitičko ponašanje $Z(T)$ $(\prod^\infty)$

Baxterovi modeli koriste RR-identitete i vezu

$$\boxed{\text{kombinatorika} \quad \longleftrightarrow \quad \theta - \text{funkcije}}$$

Problem: kritična temperatura sistema

Funkcija particije u statističkoj fizici

$$Z = \sum_C e^{-\frac{E(C)}{kT}}$$

Vjerojatnost stanja C je $\frac{1}{Z} e^{-\frac{E(C)}{kT}}$

Energija po jedinici volumena

$$u = \lim_{V \to \infty} \frac{1}{V} \left(\frac{1}{Z} \sum_C E(C) e^{-\frac{E(C)}{kT}} \right)$$

Rješivi modeli na 2-dim rešetki:

- Hamiltonijan zadan "kombinatorno" $(\sum^\infty)$
- traži se analitičko ponašanje $Z(T)$ $(\prod^\infty)$

Baxterovi modeli koriste RR-identitete i vezu

$$\boxed{\text{kombinatorika} \quad \longleftrightarrow \quad \theta - \text{funkcije}}$$

Rješivi modeli u statističkoj fizici

Problem: kritična temperatura sistema

Funkcija particije u statističkoj fizici

$$Z = \sum_C e^{-\frac{E(C)}{kT}}$$

Vjerojatnost stanja C je $\frac{1}{Z} e^{-\frac{E(C)}{kT}}$

Energija po jedinici volumena

$$u = \lim_{V \to \infty} \frac{1}{V} \left(\frac{1}{Z} \sum_C E(C) e^{-\frac{E(C)}{kT}} \right)$$

Rješivi modeli na 2-dim rešetki:

- Hamiltonijan zadan "kombinatorno" $(\sum^\infty)$
- traži se analitičko ponašanje $Z(T)$ $(\prod^\infty)$

Baxterovi modeli koriste RR-identitete i vezu

$$\boxed{\text{kombinatorika} \quad \longleftrightarrow \quad \theta - \text{funkcije}}$$

Rješivi modeli u statističkoj fizici

Problem: kritična temperatura sistema

Funkcija particije u statističkoj fizici

$$Z = \sum_{C} e^{-\frac{E(C)}{kT}}$$

Vjerojatnost stanja C je $\frac{1}{Z} e^{-\frac{E(C)}{kT}}$

Energija po jedinici volumena

$$u = \lim_{V\to\infty} \frac{1}{V} \left(\frac{1}{Z} \sum_{C} E(C) e^{-\frac{E(C)}{kT}} \right)$$

Rješivi modeli na 2-dim rešetki:

- Hamiltonijan zadan “kombinatorno” $(\sum^{\infty})$
- traži se analitičko ponašanje $Z(T)$ $(\prod^{\infty})$

Baxterovi modeli koriste RR-identitete i vezu

$$\boxed{\text{kombinatorika} \quad \longleftrightarrow \quad \theta - \text{funkcije}}$$

Rješivi modeli u statističkoj fizici

Problem: kritična temperatura sistema

Funkcija particije u statističkoj fizici

$$Z = \sum_C e^{-\frac{E(C)}{kT}}$$

Vjerojatnost stanja C je $\frac{1}{Z} e^{-\frac{E(C)}{kT}}$

Energija po jedinici volumena

$$u = \lim_{V \to \infty} \frac{1}{V} \left(\frac{1}{Z} \sum_C E(C) e^{-\frac{E(C)}{kT}} \right)$$

Rješivi modeli na 2-dim rešetki:

- Hamiltonijan zadan "kombinatorno" $(\sum^\infty)$
- traži se analitičko ponašanje $Z(T)$ $(\prod^\infty)$

Baxterovi modeli koriste RR-identitete i vezu

$$\boxed{\text{kombinatorika} \quad \longleftrightarrow \quad \theta - \text{funkcije}}$$

Lijeva algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ $[A,B] = AB - BA$

Generatori

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i relacije

$$[H,E] = 2E, \quad [H,F] = -2F, \quad [E,F] = H$$

Korijeni potprostori $\mathbb{C}F, \mathbb{C}H, \mathbb{C}E$ $\bullet \quad \bullet \quad \bullet$

djelovanje H $\underset{-2}{\bullet} \quad \underset{0}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet}$

djelovanje E i F $\bullet \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \bullet \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \bullet$

$(n+1)$-dim reprezentacije: $(n+1)\times(n+1)$ matrice F, H, E

$$\underset{-n}{\bullet} \quad \underset{-n+2}{\bullet} \quad \cdots \quad \underset{n-2}{\bullet} \quad \underset{n}{\bullet}$$

Generatori

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i relacije

$$[H,E] = 2E, \quad [H,F] = -2F, \quad [E,F] = H$$

Korijeni potprostori $\mathbb{C}F, \mathbb{C}H, \mathbb{C}E$ $\quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$

djelovanje H $\quad \underset{-2}{\bullet} \quad \underset{0}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet}$

djelovanje E i F $\quad \bullet \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \bullet \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \bullet$

$(n+1)$-dim reprezentacije: $(n+1)\times(n+1)$ matrice F, H, E

$$\underset{-n}{\bullet} \quad \underset{-n+2}{\bullet} \quad \cdots \quad \underset{n-2}{\bullet} \quad \underset{n}{\bullet}$$

Lijeva algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ $\quad [A,B] = AB - BA$

Generatori

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i relacije

$$[H,E] = 2E, \quad [H,F] = -2F, \quad [E,F] = H$$

Korijeni potprostori $\mathbb{C}F, \mathbb{C}H, \mathbb{C}E$ $\quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$

djelovanje H $\quad \underset{-2}{\bullet} \quad \underset{0}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet}$

djelovanje E i F $\quad \bullet \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \bullet \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \bullet$

$(n+1)$-dim reprezentacije: $(n+1)\times(n+1)$ matrice F, H, E

$$\underset{-n}{\bullet} \quad \underset{-n+2}{\bullet} \quad \cdots \quad \underset{n-2}{\bullet} \quad \underset{n}{\bullet}$$

Generatori

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i relacije

$$[H,E] = 2E, \quad [H,F] = -2F, \quad [E,F] = H$$

Korijeni potprostori $\mathbb{C}F, \mathbb{C}H, \mathbb{C}E$ $\quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$

djelovanje H $\quad \underset{-2}{\bullet} \quad \underset{0}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet}$

djelovanje E i F $\quad \bullet \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \bullet \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \bullet$

$(n+1)$-dim reprezentacije: $(n+1)\times(n+1)$ matrice F, H, E

$$\underset{-n}{\bullet} \quad \underset{-n+2}{\bullet} \quad \cdots \quad \underset{n-2}{\bullet} \quad \underset{n}{\bullet}$$

Lijeva algebra $\mathfrak{s}l(2,\mathbb{C})$ $\qquad [A,B] = AB - BA$

Generatori

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i relacije

$$[H,E] = 2E, \quad [H,F] = -2F, \quad [E,F] = H$$

Korijeni potprostori $\mathbb{C}F, \mathbb{C}H, \mathbb{C}E$ $\qquad \bullet \qquad \bullet \qquad \bullet$

djelovanje H $\qquad \underset{-2}{\bullet} \qquad \underset{0}{\bullet} \qquad \underset{2}{\bullet}$

djelovanje E i F $\qquad \bullet \; \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \; \bullet \; \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \; \bullet$

$(n+1)$-dim reprezentacije: $(n+1) \times (n+1)$ matrice F, H, E

$$\underset{-n}{\bullet} \qquad \underset{-n+2}{\bullet} \qquad \cdots \qquad \underset{n-2}{\bullet} \qquad \underset{n}{\bullet}$$

Lijeva algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ $\quad [A,B] = AB - BA$

Generatori

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i relacije

$$[H,E] = 2E, \quad [H,F] = -2F, \quad [E,F] = H$$

Korijeni potprostori $\mathbb{C}F, \mathbb{C}H, \mathbb{C}E$ $\qquad \bullet \qquad \bullet \qquad \bullet$

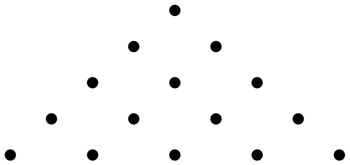
djelovanje H $\qquad \underset{-2}{\bullet} \qquad \underset{0}{\bullet} \qquad \underset{2}{\bullet}$

djelovanje E i F $\qquad \bullet \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \bullet \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \bullet$

$(n+1)$-dim reprezentacije: $(n+1) \times (n+1)$ matrice F, H, E

$$\underset{-n}{\bullet} \qquad \underset{-n+2}{\bullet} \qquad \cdots \qquad \underset{n-2}{\bullet} \qquad \underset{n}{\bullet}$$

Klasifikacija reprezentacija Lijeve algebre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$



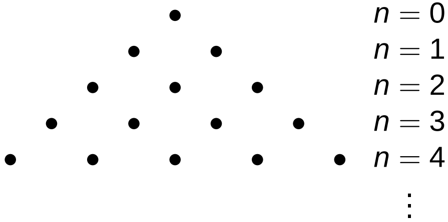
$n = 0$
$n = 1$
$n = 2$
$n = 3$
$n = 4$
$\vdots$

- kugline funkcije
- stanja vodikovog atoma
- spin elektrona

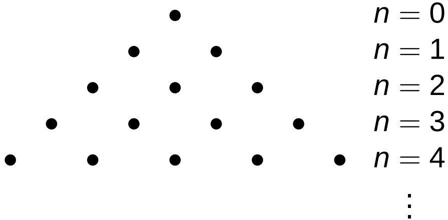
$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \bullet & & & & & & n=0 \\
 & & & \bullet & & \bullet & & & & & n=1 \\
 & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & & & n=2 \\
 & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & & n=3 \\
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & n=4 \\
 & & & & & & & & & & \vdots
\end{array}
$$

- kugline funkcije
- stanja vodikovog atoma
- spin elektrona

Klasifikacija reprezentacija Lijeve algebre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$



- kugline funkcije
- stanja vodikovog atoma
- spin elektrona



- kugline funkcije
- stanja vodikovog atoma
- spin elektrona

Weylova grupa Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

Weylova grupa: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

djelovanje w $\quad \bullet \xleftrightarrow{w} \bullet$

općenito djelovanje w $\quad V_k \xleftrightarrow{w} V_{-k}$

Weylova formula karaktera $\chi_V(q) = \sum \dim V_k \, q^k$

$$\chi_n(q) = q^{-n} + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - q^{-n-1}}{q - q^{-1}}$$

"Zrna na žita na šahovskoj ploči"

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

Weylova grupa Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

Weylova grupa: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

djelovanje w $\quad \bullet \xleftrightarrow{w} \bullet$

općenito djelovanje w $\quad V_k \xleftrightarrow{w} V_{-k}$

Weylova formula karaktera $\chi_V(q) = \sum \dim V_k \, q^k$

$$\chi_n(q) = q^{-n} + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - q^{-n-1}}{q - q^{-1}}$$

“Zrna na žita na šahovskoj ploči”

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

Weylova grupa Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

Weylova grupa: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

djelovanje w $\quad \bullet \xleftrightarrow{w} \bullet$

općenito djelovanje w $\quad V_k \xleftrightarrow{w} V_{-k}$

Weylova formula karaktera $\chi_V(q) = \sum \dim V_k \, q^k$

$$\chi_n(q) = q^{-n} + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - q^{-n-1}}{q - q^{-1}}$$

“Zrna na žita na šahovskoj ploči”

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

Weylova grupa Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

Weylova grupa: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

djelovanje w $\quad \bullet \xleftrightarrow{w} \bullet$

općenito djelovanje w $\quad V_k \xleftrightarrow{w} V_{-k}$

Weylova formula karaktera $\chi_V(q) = \sum \dim V_k \, q^k$

$$\chi_n(q) = q^{-n} + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - q^{-n-1}}{q - q^{-1}}$$

"Zrna na žita na šahovskoj ploči"

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

Weylova grupa Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

Weylova grupa: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

djelovanje w $\quad \bullet \xleftrightarrow{w} \bullet$

općenito djelovanje w $\quad V_k \xleftrightarrow{w} V_{-k}$

Weylova formula karaktera $\chi_V(q) = \sum \dim V_k \, q^k$

$$\chi_n(q) = q^{-n} + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - q^{-n-1}}{q - q^{-1}}$$

“Zrna na žita na šahovskoj ploči”

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

Generatori

$$F_1=\begin{pmatrix}0&0&\\1&0&\\&&0\end{pmatrix}\quad H_1=\begin{pmatrix}1&0&\\0&-1&\\&&0\end{pmatrix}\quad E_1=\begin{pmatrix}0&1&\\0&0&\\&&0\end{pmatrix}$$

$$F_2=\begin{pmatrix}0&&\\&0&0\\&1&0\end{pmatrix}\quad H_2=\begin{pmatrix}0&&\\&1&0\\&0&-1\end{pmatrix}\quad E_2=\begin{pmatrix}0&&\\&0&1\\&0&0\end{pmatrix}$$

i relacije

Fundamentalne reprezentacije

Generatori

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & 0 \\ & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i relacije

Fundamentalne reprezentacije

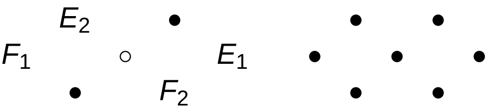
Liejeva algebra $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ $\quad [A,B]=AB-BA$

Generatori

$$F_1=\begin{pmatrix}0&0&\\1&0&\\&&0\end{pmatrix}\; H_1=\begin{pmatrix}1&0&\\0&-1&\\&&0\end{pmatrix}\; E_1=\begin{pmatrix}0&1&\\0&0&\\&&0\end{pmatrix}$$

$$F_2=\begin{pmatrix}0&&\\&0&0\\&1&0\end{pmatrix}\; H_2=\begin{pmatrix}0&&\\&1&0\\&0&-1\end{pmatrix}\; E_2=\begin{pmatrix}0&&\\&0&1\\&0&0\end{pmatrix}$$

i relacije



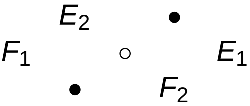
Fundamentalne reprezentacije

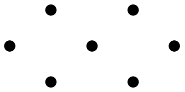
Generatori

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

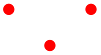
$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & 0 \\ & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

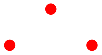
i relacije





Fundamentalne reprezentacije





Afina Kac-Moodyjeva Liejeva algebra $\widetilde{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}$

Generatori $F_1, H_1, E_1,\ F_0, H_0, E_0$ i relacije.

Algebra i fundamentalna reprezentacija $L(0,1)$

Generatori $F_1, H_1, E_1,\ F_0, H_0, E_0$ i relacije.
Algebra i fundamentalna reprezentacija $L(0,1)$

$$
\begin{array}{ccc}
 & \vdots & \\
\bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet \\
E_0 & \bullet & \bullet \\
F_1 & \circ & E_1 \\
\bullet & \bullet & F_0 \\
\bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet \\
 & \vdots & \\
F(n) & H(n) & E(n)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \bullet & & & \\
 & & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
 & & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
 & & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
 & \bullet & \bullet & 22 & \bullet & \bullet & \\
\bullet & \bullet & \bullet & 30 & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

Weyl-Kacova formula karaktera za $\widetilde{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}$

Integrabilne reprezentacije najveće težine $L(n,k)$

Karakter $\chi_{n,k}(q,z) = \sum \dim L(n,k)_{r,p}\, q^r e^{2\pi i p z}$

Teorem (Kac)

$$\chi_{n,k}(q,z) = \frac{\theta_{n+1,k+2} - \theta_{-n-1,k+2}}{\theta_{1,2} - \theta_{-1,2}}$$

$$\theta_{n,m}(q,z) = \sum_{s \in \frac{n}{2m}+\mathbb{Z}} q^{ms^2} e^{2\pi i m s z}$$

Modularna sv. $\tau \mapsto -1/\tau \quad q = e^{2\pi i \tau} \quad \mathrm{Im}\,\tau > 0$

Lepowsky-Milne: WK $= \prod^\infty$ u RR

Weyl-Kacova formula karaktera za $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\tilde{}$

Integrabilne reprezentacije najveće težine $L(n,k)$

Karakter $\chi_{n,k}(q,z) = \sum \dim L(n,k)_{r,p}\, q^r e^{2\pi i p z}$

Teorem (Kac)

$$\chi_{n,k}(q,z) = \frac{\theta_{n+1,k+2} - \theta_{-n-1,k+2}}{\theta_{1,2} - \theta_{-1,2}}$$

$$\theta_{n,m}(q,z) = \sum_{s \in \frac{n}{2m}+\mathbb{Z}} q^{ms^2} e^{2\pi i m s z}$$

Modularna sv. $\tau \mapsto -1/\tau \quad q = e^{2\pi i \tau} \quad \operatorname{Im}\tau > 0$

Lepowsky-Milne: WK $= \prod^{\infty}$ u RR

Weyl-Kacova formula karaktera za $\widetilde{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}$

Integrabilne reprezentacije najveće težine $L(n,k)$

Karakter $\chi_{n,k}(q,z) = \sum \dim L(n,k)_{r,p}\, q^r e^{2\pi i p z}$

Teorem (Kac)

$$\chi_{n,k}(q,z) = \frac{\theta_{n+1,k+2} - \theta_{-n-1,k+2}}{\theta_{1,2} - \theta_{-1,2}}$$

$$\theta_{n,m}(q,z) = \sum_{s \in \frac{n}{2m}+\mathbb{Z}} q^{ms^2} e^{2\pi i m s z}$$

Modularna sv. $\tau \mapsto -1/\tau$ $\;q = e^{2\pi i \tau}$ $\;\operatorname{Im}\tau > 0$

Lepowsky-Milne: WK $= \prod^\infty$ u RR

Integrabilne reprezentacije najveće težine $L(n,k)$

Karakter $\chi_{n,k}(q,z) = \sum \dim L(n,k)_{r,p}\, q^r e^{2\pi i p z}$

Teorem (Kac)

$$\chi_{n,k}(q,z) = \frac{\theta_{n+1,k+2} - \theta_{-n-1,k+2}}{\theta_{1,2} - \theta_{-1,2}}$$

$$\theta_{n,m}(q,z) = \sum_{s \in \frac{n}{2m} + \mathbb{Z}} q^{ms^2} e^{2\pi i m s z}$$

Modularna sv. $\tau \mapsto -1/\tau \quad q = e^{2\pi i \tau} \quad \operatorname{Im} \tau > 0$

Lepowsky-Milne: WK $= \prod^{\infty}$ u RR

Weyl-Kacova formula karaktera za $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\tilde{}$

Integrabilne reprezentacije najveće težine $L(n,k)$

Karakter $\chi_{n,k}(q,z) = \sum \dim L(n,k)_{r,p}\, q^r e^{2\pi i p z}$

Teorem (Kac)

$$\chi_{n,k}(q,z) = \frac{\theta_{n+1,k+2} - \theta_{-n-1,k+2}}{\theta_{1,2} - \theta_{-1,2}}$$

$$\theta_{n,m}(q,z) = \sum_{s \in \frac{n}{2m}+\mathbb{Z}} q^{ms^2} e^{2\pi i m s z}$$

Modularna sv. $\tau \mapsto -1/\tau \quad q = e^{2\pi i \tau} \quad \operatorname{Im}\tau > 0$

Lepowsky-Milne: WK $= \prod^{\infty}$ u RR

Weyl-Kacova formula karaktera za $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\tilde{}$

Integrabilne reprezentacije najveće težine $L(n,k)$

Karakter $\chi_{n,k}(q,z) = \sum \dim L(n,k)_{r,p}\, q^r e^{2\pi i p z}$

Teorem (Kac)

$$\chi_{n,k}(q,z) = \frac{\theta_{n+1,k+2} - \theta_{-n-1,k+2}}{\theta_{1,2} - \theta_{-1,2}}$$

$$\theta_{n,m}(q,z) = \sum_{s \in \frac{n}{2m} + \mathbb{Z}} q^{ms^2} e^{2\pi i m s z}$$

Modularna sv. $\tau \mapsto -1/\tau \quad q = e^{2\pi i \tau} \quad \operatorname{Im}\tau > 0$

Lepowsky-Milne: WK $= \prod^{\infty}$ u RR

Konstrukcija “monomijalnih baza” reprezentacija

Konstrukcija reprezentacija $SO(3) \sim \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$
pomoću funkcija na sferi

1. konstrukcija polinoma $f(x_1, x_2, x_3)$
2. konstrukcija funkcija na sferi: restrikcije odn. kvocijent

polinomi $f(x_1, x_2, x_3)$/relacija $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$$\left(\text{funkcije} \quad 1 \quad \text{i} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{su iste na sferi}\right)$$

Lepowsky-Wilsonov pristup $\sum^\infty$ u RR

A) Konstrukcija reprezentacija $\tilde{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}$
1. polinomi u ∞ varijabli $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$
2. polinomi $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$/relacije $E(z)^{k+1} = 0$

B) Konstrukcija monomijalnih baza

$$x_1^{f_1} x_2^{f_2} x_3^{f_3} \dots \qquad f_j + f_{j+1} \leq k$$

Konstrukcija “monomijalnih baza” reprezentacija

Konstrukcija reprezentacija $SO(3) \sim \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$
pomoću funkcija na sferi

1. konstrukcija polinoma $f(x_1, x_2, x_3)$
2. konstrukcija funkcija na sferi: restrikcije odn. kvocijent

polinomi $f(x_1, x_2, x_3)$/relacija $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$$\left(\text{funkcije} \quad 1 \quad \text{i} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{su iste na sferi}\right)$$

Lepowsky-Wilsonov pristup $\sum^{\infty}$ u RR

A) Konstrukcija reprezentacija $\tilde{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$
1. polinomi u ∞ varijabli $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$
2. polinomi $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$/relacije $E(z)^{k+1} = 0$

B) Konstrukcija monomijalnih baza

$$x_1^{f_1} x_2^{f_2} x_3^{f_3} \ldots \qquad f_j + f_{j+1} \leq k$$

Konstrukcija “monomijalnih baza” reprezentacija

Konstrukcija reprezentacija $SO(3) \sim \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$
pomoću funkcija na sferi

1. konstrukcija polinoma $f(x_1, x_2, x_3)$
2. konstrukcija funkcija na sferi: restrikcije odn. kvocijent

polinomi $f(x_1, x_2, x_3)$/relacija $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$$\left(\text{funkcije} \quad 1 \quad \text{i} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{su iste na sferi}\right)$$

Lepowsky-Wilsonov pristup $\sum^\infty$ u RR

A) Konstrukcija reprezentacija $\tilde{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$

1. polinomi u ∞ varijabli $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$
2. polinomi $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$/relacije $E(z)^{k+1} = 0$

B) Konstrukcija monomijalnih baza

$$x_1^{f_1} x_2^{f_2} x_3^{f_3} \ldots \qquad f_j + f_{j+1} \leq k$$

Konstrukcija “monomijalnih baza” reprezentacija

Konstrukcija reprezentacija $SO(3) \sim \mathfrak{s}l(2,\mathbb{C})$
pomoću funkcija na sferi

1. konstrukcija polinoma $f(x_1, x_2, x_3)$
2. konstrukcija funkcija na sferi: restrikcije odn. kvocijent

polinomi $f(x_1, x_2, x_3)$/relacija $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$$\left(\text{funkcije} \quad 1 \quad \text{i} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{su iste na sferi}\right)$$

Lepowsky-Wilsonov pristup $\sum^\infty$ u RR

A) Konstrukcija reprezentacija $\mathfrak{s}l(2,\mathbb{C})\tilde{}$
1. polinomi u ∞ varijabli $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$
2. polinomi $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$/relacije $E(z)^{k+1} = 0$

B) Konstrukcija monomijalnih baza

$$x_1^{f_1} x_2^{f_2} x_3^{f_3} \ldots \qquad f_j + f_{j+1} \leq k$$

Konstrukcija “monomijalnih baza” reprezentacija

Konstrukcija reprezentacija $SO(3) \sim \mathfrak{s}l(2, \mathbb{C})$
pomoću funkcija na sferi

1. konstrukcija polinoma $f(x_1, x_2, x_3)$
2. konstrukcija funkcija na sferi: restrikcije odn. kvocijent

polinomi $f(x_1, x_2, x_3)$/relacija $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$$\left(\text{funkcije} \quad 1 \quad \text{i} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{su iste na sferi}\right)$$

Lepowsky-Wilsonov pristup $\sum^\infty$ u RR

A) Konstrukcija reprezentacija $\mathfrak{s}l(2, \mathbb{C})\tilde{}$

1. polinomi u ∞ varijabli $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$
2. polinomi $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$/relacije $E(z)^{k+1} = 0$

B) Konstrukcija monomijalnih baza

$$x_1^{f_1} x_2^{f_2} x_3^{f_3} \dots \qquad f_j + f_{j+1} \leq k$$

Konstrukcija “monomijalnih baza” reprezentacija

Konstrukcija reprezentacija $SO(3) \sim \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$
pomoću funkcija na sferi

1. konstrukcija polinoma $f(x_1, x_2, x_3)$
2. konstrukcija funkcija na sferi: restrikcije odn. kvocijent

polinomi $f(x_1, x_2, x_3)$/relacija $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$$\left(\text{funkcije} \quad 1 \quad \text{i} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{su iste na sferi}\right)$$

Lepowsky-Wilsonov pristup $\sum^{\infty}$ u RR

A) Konstrukcija reprezentacija $\tilde{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})}$
1. polinomi u ∞ varijabli $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$
2. polinomi $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$/relacije $E(z)^{k+1} = 0$

B) Konstrukcija monomijalnih baza

$$x_1^{f_1} x_2^{f_2} x_3^{f_3} \dots \qquad f_j + f_{j+1} \leq k$$

Konstrukcija “monomijalnih baza” reprezentacija

Konstrukcija reprezentacija $SO(3) \sim \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$
pomoću funkcija na sferi

1. konstrukcija polinoma $f(x_1, x_2, x_3)$
2. konstrukcija funkcija na sferi: restrikcije odn. kvocijent

polinomi $f(x_1, x_2, x_3)$/relacija $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$$\Big(\text{funkcije} \quad 1 \quad \text{i} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{su iste na sferi}\Big)$$

Lepowsky-Wilsonov pristup $\sum^\infty$ u RR

A) Konstrukcija reprezentacija $\tilde{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})}$
1. polinomi u ∞ varijabli $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$
2. polinomi $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$/relacije $E(z)^{k+1} = 0$

B) Konstrukcija monomijalnih baza

$$x_1^{f_1} x_2^{f_2} x_3^{f_3} \dots \qquad f_j + f_{j+1} \leq k$$

Konstrukcija "monomijalnih baza" reprezentacija

Konstrukcija reprezentacija $SO(3) \sim \mathfrak{s}l(2, \mathbb{C})$
pomoću funkcija na sferi

1. konstrukcija polinoma $f(x_1, x_2, x_3)$
2. konstrukcija funkcija na sferi: restrikcije odn. kvocijent

polinomi $f(x_1, x_2, x_3)$/relacija $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$$\left(\text{funkcije} \quad 1 \quad \text{i} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{su iste na sferi}\right)$$

Lepowsky-Wilsonov pristup $\sum^\infty$ u RR

A) Konstrukcija reprezentacija $\mathfrak{s}l(2, \mathbb{C})\tilde{}$
1. polinomi u ∞ varijabli $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$
2. polinomi $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$/relacije $E(z)^{k+1} = 0$

B) Konstrukcija monomijalnih baza

$$x_1^{f_1} x_2^{f_2} x_3^{f_3} \dots \qquad f_j + f_{j+1} \le k$$

Verteks-operatori

Lepowsky i Wilson su “funkcije izvodnice”

$$E(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(n) z^{-n-1}, \quad F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) z^{-n-1}$$

za fundamentalne reprezentacije izrazili pomoću verteks operatora

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{x_n}{n}\right) \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

($\exp A = \sum A^m/m!$) koji djeluju na prostoru polinoma s beskonačno varijabli razapetih monomima

$$x_1^{f_1} x_2^{f_2} x_3^{f_3} \ldots$$

Općenito za $L(n,k)$ imamo relacije

$$E(z)^{k+1} = 0, \qquad F(z)^{k+1} = 0.$$

Verteks-operatori

Lepowsky i Wilson su “funkcije izvodnice”

$$E(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}E(n)z^{-n-1},\quad F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n)z^{-n-1}$$

za fundamentalne reprezentacije izrazili pomoću verteks operatora

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}z^{n}\frac{x_n}{n}\right)\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

($\exp A=\sum A^m/m!$) koji djeluju na prostoru polinoma s beskonačno varijabli razapetih monomima

$$x_1^{f_1}x_2^{f_2}x_3^{f_3}\dots$$

Općenito za $L(n,k)$ imamo relacije

$$E(z)^{k+1}=0,\qquad F(z)^{k+1}=0.$$

Algebra verteks-operatora

Borcherds 1986., Frenkel-Lepowsky-Meurman 1985.:

Algebra verteks-operatora $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$

$$a \longleftrightarrow a(z) = Y(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, z^{-n-1}$$

$$\mathbf{1} \longleftrightarrow \mathbf{1}(z) = \mathrm{id}_V$$

$$\omega \longleftrightarrow \omega(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n\, z^{-n-2} \qquad L_{-1} = \frac{d}{dz}$$

i aksiomi za ∞ mnogo množenja vektora i polja na V

$$a_n b \longleftrightarrow a(z)_n b(z)$$

"Normalno uređeni produkt" polja za $n = -1$

$$:a(z)b(z): = a(z)_{\mathrm{reg}}b(z) + b(z)a(z)_{\mathrm{sing}}$$

Algebra verteks-operatora

Borcherds 1986., Frenkel-Lepowsky-Meurman 1985.:

Algebra verteks-operatora $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$

$$a \longleftrightarrow a(z) = Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \, z^{-n-1}$$

$$\mathbf{1} \longleftrightarrow \mathbf{1}(z) = \mathrm{id}_V$$

$$\omega \longleftrightarrow \omega(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n \, z^{-n-2} \qquad L_{-1} = \frac{d}{dz}$$

i aksiomi za ∞ mnogo množenja vektora i polja na V

$$a_n b \longleftrightarrow a(z)_n b(z)$$

"Normalno uređeni produkt" polja za $n = -1$

$$: a(z) b(z) := a(z)_{\mathrm{reg}} b(z) + b(z) a(z)_{\mathrm{sing}}$$

Algebra verteks-operatora

Borcherds 1986., Frenkel-Lepowsky-Meurman 1985.:

Algebra verteks-operatora $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$

$$a \longleftrightarrow a(z) = Y(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$$

$$\mathbf{1} \longleftrightarrow \mathbf{1}(z) = \mathrm{id}_V$$

$$\omega \longleftrightarrow \omega(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} \quad L_{-1} = \frac{d}{dz}$$

i aksiomi za ∞ mnogo množenja vektora i polja na V

$$a_n b \longleftrightarrow a(z)_n b(z)$$

"Normalno uređeni produkt" polja za $n = -1$

$$: a(z)b(z) := a(z)_{\mathrm{reg}} b(z) + b(z) a(z)_{\mathrm{sing}}$$

Algebra verteks-operatora

Borcherds 1986., Frenkel-Lepowsky-Meurman 1985.:

Algebra verteks-operatora $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$

$$a \longleftrightarrow a(z) = Y(a, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, z^{-n-1}$$

$$\mathbf{1} \longleftrightarrow \mathbf{1}(z) = \mathrm{id}_V$$

$$\omega \longleftrightarrow \omega(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n\, z^{-n-2} \quad L_{-1} = \frac{d}{dz}$$

i aksiomi za ∞ mnogo množenja vektora i polja na V

$$a_n b \longleftrightarrow a(z)_n b(z)$$

"Normalno uređeni produkt" polja za $n = -1$

$$: a(z) b(z) := a(z)_{\mathrm{reg}} b(z) + b(z) a(z)_{\mathrm{sing}}$$

Algebra verteks-operatora

Borcherds 1986., Frenkel-Lepowsky-Meurman 1985.:

Algebra verteks-operatora $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$

$$a \longleftrightarrow a(z) = Y(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, z^{-n-1}$$

$$\mathbf{1} \longleftrightarrow \mathbf{1}(z) = \mathrm{id}_V$$

$$\omega \longleftrightarrow \omega(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n\, z^{-n-2} \quad L_{-1} = \frac{d}{dz}$$

i aksiomi za ∞ mnogo množenja vektora i polja na V

$$a_n b \longleftrightarrow a(z)_n b(z)$$

"Normalno uređeni produkt" polja za $n = -1$

$$:a(z)b(z) := a(z)_{\mathrm{reg}} b(z) + b(z)a(z)_{\mathrm{sing}}$$

Algebra verteks-operatora

Borcherds 1986., Frenkel-Lepowsky-Meurman 1985.:

Algebra verteks-operatora $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$

$$a \longleftrightarrow a(z) = Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \, z^{-n-1}$$

$$\mathbf{1} \longleftrightarrow \mathbf{1}(z) = \mathrm{id}_V$$

$$\omega \longleftrightarrow \omega(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n \, z^{-n-2} \qquad L_{-1} = \frac{d}{dz}$$

i aksiomi za ∞ mnogo množenja vektora i polja na V

$$a_n b \longleftrightarrow a(z)_n b(z)$$

“Normalno uređeni produkt” polja za $n = -1$

$$: a(z) b(z) := a(z)_{\mathrm{reg}} b(z) + b(z) a(z)_{\mathrm{sing}}$$

Algebra verteks-operatora

Borcherds 1986., Frenkel-Lepowsky-Meurman 1985.:

Algebra verteks-operatora $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$

$$a \longleftrightarrow a(z) = Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \, z^{-n-1}$$

$$\mathbf{1} \longleftrightarrow \mathbf{1}(z) = \mathrm{id}_V$$

$$\omega \longleftrightarrow \omega(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n \, z^{-n-2} \quad L_{-1} = \frac{d}{dz}$$

i aksiomi za ∞ mnogo množenja vektora i polja na V

$$a_n b \longleftrightarrow a(z)_n b(z)$$

"Normalno uređeni produkt" polja za $n = -1$

$$: a(z) b(z) := a(z)_{\mathrm{reg}} b(z) + b(z) a(z)_{\mathrm{sing}}$$

Algebra verteks-operatora

Borcherds 1986., Frenkel-Lepowsky-Meurman 1985.:

Algebra verteks-operatora $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$

$$a \longleftrightarrow a(z) = Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$$

$$\mathbf{1} \longleftrightarrow \mathbf{1}(z) = \mathrm{id}_V$$

$$\omega \longleftrightarrow \omega(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} \qquad L_{-1} = \frac{d}{dz}$$

i aksiomi za ∞ mnogo množenja vektora i polja na V

$$a_n b \longleftrightarrow a(z)_n b(z)$$

"Normalno uređeni produkt" polja za $n = -1$

$$: a(z) b(z) := a(z)_{\mathrm{reg}} b(z) + b(z) a(z)_{\mathrm{sing}}$$

Algebra verteks-operatora

Borcherds 1986., Frenkel-Lepowsky-Meurman 1985.:

Algebra verteks-operatora $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$

$$a \longleftrightarrow a(z) = Y(a, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, z^{-n-1}$$

$$\mathbf{1} \longleftrightarrow \mathbf{1}(z) = \mathrm{id}_V$$

$$\omega \longleftrightarrow \omega(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n\, z^{-n-2} \quad L_{-1} = \frac{d}{dz}$$

i aksiomi za ∞ mnogo množenja vektora i polja na V

$$a_n b \longleftrightarrow a(z)_n b(z)$$

“Normalno uređeni produkt” polja za $n = -1$

$$:a(z)b(z) := a(z)_{\mathrm{reg}} b(z) + b(z)a(z)_{\mathrm{sing}}$$

Reprezentacije VOA

Reprezentacija algebre verteks-operatora V na M je

$$a_n b \longrightarrow a(z)_n b(z)$$

za ∞ mnogo množenja vektora u V i polja na M.

Dvije strukture na reprezentacijama $L(n, k)$

$$\boxed{\text{VOA} \quad \longleftrightarrow \quad \text{Kac-Moody}}$$

daje vezu

$$\boxed{\text{kombinatorika} \quad \longleftrightarrow \quad \theta - \text{funkcije}}$$

Huang: Verlindeova formula za “sve” VOA

Reprezentacije VOA

Reprezentacija algebre verteks-operatora V na M je

$$a_n b \longrightarrow a(z)_n b(z)$$

za ∞ mnogo množenja vektora u V i polja na M.

Dvije strukture na reprezentacijama $L(n,k)$

$$\boxed{\text{VOA} \quad \longleftrightarrow \quad \text{Kac-Moody}}$$

daje vezu

$$\boxed{\text{kombinatorika} \quad \longleftrightarrow \quad \theta - \text{funkcije}}$$

Huang: Verlindeova formula za "sve" VOA

Reprezentacije VOA

Reprezentacija algebre verteks-operatora V na M je

$$a_n b \longrightarrow a(z)_n b(z)$$

za ∞ mnogo množenja vektora u V i polja na M.

Dvije strukture na reprezentacijama $L(n, k)$

$$\boxed{\text{VOA} \quad \longleftrightarrow \quad \text{Kac-Moody}}$$

daje vezu

$$\boxed{\text{kombinatorika} \quad \longleftrightarrow \quad \theta - \text{funkcije}}$$

Huang: Verlindeova formula za “sve” VOA

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\mathbf{1} & & \longrightarrow & & \mathbf{4} & & \longrightarrow & & \mathbf{7} & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \\
\downarrow & & \mathbf{3} & & \downarrow & & \mathbf{6} & & \downarrow & \ldots \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \\
\mathbf{2} & & \longrightarrow & & \mathbf{5} & & \longrightarrow & & \mathbf{8} &
\end{array}
$$

Teorem (Meurman-P, Feigin-Kedem-Loktev-Miwa-Mukhin)

Broj particija od n takvih da je

$$\sum_{i\in\Delta} f_i \leq 2k, \qquad f_1, f_2 \leq k$$

jednak je broju particija od n s dijelovima
$\neq 0 \mod (k+1)$.

Gordon $\quad 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - \ldots$

Postoji li RR za svaku afinu KM (ili VOA)?

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \mathbf{4} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \mathbf{7} \arrow[dd] & \\
& \mathbf{3} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{6} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \dots \\
\mathbf{2} \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathbf{5} \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathbf{8} &
\end{tikzcd}$$

Teorem (Meurman-P, Feigin-Kedem-Loktev-Miwa-Mukhin)

Broj particija od n takvih da je

$$\sum_{i \in \Delta} f_i \leq 2k, \qquad f_1, f_2 \leq k$$

jednak je broju particija od n s dijelovima $\not\equiv 0 \mod (k+1)$.

Gordon $\quad 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - \dots$

Postoji li RR za svaku afinu KM (ili VOA)?

$$\begin{array}{cccccccccc}
\mathbf{1} & & \rightarrow & & \mathbf{4} & & \rightarrow & & \mathbf{7} & \\
& \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \\
\downarrow & & \mathbf{3} & & \downarrow & & \mathbf{6} & & \downarrow & \dots \\
& \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \\
\mathbf{2} & & \rightarrow & & \mathbf{5} & & \rightarrow & & \mathbf{8} &
\end{array}$$

Teorem (Meurman-P, Feigin-Kedem-Loktev-Miwa-Mukhin)

Broj particija od n takvih da je

$$\sum_{i \in \Delta} f_i \leq 2k, \qquad f_1, f_2 \leq k$$

jednak je broju particija od n s dijelovima
$\not\equiv 0 \mod (k+1)$.

Gordon $\quad 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - \dots$

Postoji li RR za svaku afinu KM (ili VOA)?

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\mathbf{1} & & \rightarrow & & \mathbf{4} & & \rightarrow & & \mathbf{7} & \\
& \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \\
\downarrow & & \mathbf{3} & & \downarrow & & \mathbf{6} & & \downarrow & \dots \\
& \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \\
\mathbf{2} & & \rightarrow & & \mathbf{5} & & \rightarrow & & \mathbf{8} &
\end{array}
$$

Teorem (Meurman-P, Feigin-Kedem-Loktev-Miwa-Mukhin)

Broj particija od n takvih da je

$$\sum_{i \in \Delta} f_i \leq 2k, \qquad f_1, f_2 \leq k$$

jednak je broju particija od n s dijelovima $\not\equiv 0 \mod (k+1)$.

Gordon $\quad 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - \dots$

Postoji li RR za svaku afinu KM (ili VOA)?