Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku

Pismeni ispit iz Kompleksne analize
20.6.2007.

1. Odrediti sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\mathsf{Im}\,(z^2) = \sqrt{3}\,\mathsf{Re}\,(z^2),\ \mathsf{Im}\,(z^5) = -\frac{1}{2}.$$

[Rj: $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt[10]{3}}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$]

2. Odrediti (ukoliko postoji) analitičku funkciju $f = u + iv$ kojoj je realni dio dan s

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + y - 1,$$

te vrijedi $f(i) = -1$. Odrediti $f'(i)$.

[Rj: $v(x, y) = 2xy - 2y - x + 2$, $f'(i) = -2 + i$]

3. Izračunati

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{z+5}{z^2(z-i)(z-2)}dz.$$

[Rj: $I = \pi(\frac{7}{10} - \frac{7}{5}i)$]

4. Razviti u Laurentov red oko točke $z_0 = i$ funkciju

$$f(z) = \frac{1}{(i+1+z)^2}$$

tako da područje konvergencije D sadrži točku $z_1 = -10$. Odrediti i skicirati D!

[Rj: $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(1+2i)^{n-2}(n-1)}{(z-i)^n}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| > \sqrt{5}\}$]

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3dx}{x^6+1}$$

[Rj: $I = 2\pi$]