Linearna algebra I [1]

prof. dr. sc. Rudolf Scitovski, izv. prof. dr. sc. Darija Marković
dr. sc. Darija Brajković[2]

16. prosinca 2020.

[1]Obvezni predmet u 1. semestru sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika i sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika i računarstvo (30 sati predavanja i 30 sati vježbi, 6 ECTS bodova)

[2]scitowsk@mathos.hr, darija@mathos.hr, dbrajkovic@mathos.hr

Sadržaj predmeta:

1. Pojam polja i vektorskog prostora. Primjeri vektorskih prostora, vektori u ravnini i prostoru, norma i skalarni produkt vektora u ravnini i prostoru. Linearna zavisnost i nezavisnost vektora.

2. Pojam matrice i operacije s matricama. Regularne matrice. Determinanta. Lijeve i desne baze i koordinatni sustavi. Vektorski i mješoviti produkt vektora. Elementarne transformacije. Adjunkta. Rang matrice.

3. Sustavi linearnih jednadžbi. Rješivost i struktura skupa rješenja. Jednadžba pravca i ravnine u prostoru. Kronecker-Capellijev teorem. Homogeni sustavi linearnih jednadžbi. Partikularno rješenje. Gaussova metoda eliminacije. Cramerovo pravilo.

Sadržaj

Poglavlje 1

Vektori u ravnini i prostoru

Neka je E skup točaka u prostoru, a $A, B \in E$ dvije proizvoljne točke. Tada skup svih točaka na pravcu određenom točkama A, B, a koje leže između točaka A i B zovemo **dužinom** i označavamo s $\overline{AB}$. Ako primjerice, točku A proglasimo početnom, a točku B završnom, onda takvu dužinu nazivamo **usmjerenom dužinom** i označavamo s $\overrightarrow{AB}$.

Definicija 1.1. *Kažemo da su dvije usmjerene dužine* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ **ekvivalentne** *i pišemo* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$ *onda ako postoji* translacija prostora *koja točku* A *prevodi u* A', *a točku* B *u* B'.

Primjedba 1.1. *Primijetimo da za dvije ekvivalentne usmjerene dužine* $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{A'B'}$ *vrijedi*

- $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{A'B'}$ *su paralelne;*
- $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{A'B'}$ *imaju istu orijentaciju, odnosno imaju isti vizualni smisao kretanja od početne prema završnoj točki;*
- $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{A'B'}$ *imaju istu duljinu*[1], *koju ćemo označiti s* $\|\overrightarrow{AB}\|$, *odnosno s* $\|\overrightarrow{A'B'}\|$.

Primjedba 1.2. *Primijetimo još da je ekvivalencija usmjerenih dužina jedna* **relacija ekvivalencije**, *tj. da vrijedi*

[1] U literaturi se za duljinu usmjerene dužine pojavljuju još i izrazi: norma, intenzitet, modul.

1. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ (refleksivnost)
2. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Longrightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$ (simetričnost)
3. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ (tranzitivnost)

Sada možemo definirati osnovni pojam – **pojam vektora**:

Definicija 1.2. *Vektor $\vec{a}$ je klasa ekvivalencije svih međusobno ekvivalentnih usmjerenih dužina,*

$$\vec{a} = [\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB}\}$$

Svaku usmjerenu dužinu $\overrightarrow{PQ}$ ekvivalentnu usmjerenoj dužini $\overrightarrow{AB}$ nazivamo **reprezentant** *vektora $\vec{a}$. Pri tome pod* **normom vektora** *podrazumijevamo duljinu bilo kojeg reprezentanta, a označit ćemo ju s $\|\vec{a}\|$.*

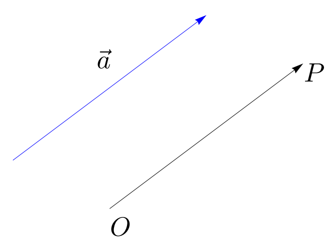
U daljnjem tekstu često ćemo govoriti o vektoru, a crtat ćemo neki njegov reprezentant.

Primjer 1.1. Nulvektor *je klasa ekvivalencije svih usmjerenih dužina koje imaju istu početnu i završnu točku. Označavat ćemo ga s $\vec{0}$, pri čemu je $\|\vec{0}\| = 0$.*

Jedinični vektor *zvat ćemo svaki vektor $\vec{e}$ za koga je $\|\vec{e}\| = 1$.*

Suprotni vektor *vektora $\vec{a}$ je klasa ekvivalencije svih usmjerenih dužina koje imaju suprotnu orijentaciju od orijentacije usmjerenih dužina vektora $\vec{a}$ i označavamo ga s $(-\vec{a})$.*

Primjedba 1.3. *Ako je O proizvoljna, ali fiksna točka u prostoru E, a $\vec{a}$ dani vektor, onda postoji jedinstvena točka $P \in E$, takva da je $\vec{a} = [\overrightarrow{OP}]$ (vidi Sliku 1.1).*



Slika 1.1:

Navedimo još nekoliko često korištenih pojmova.

- kažemo da su dva ili više vektora kolinearni ako njihovi reprezentanti leže na istom ili na paralelnim pravcima;
- kažemo da su tri ili više vektora komplanarni ako njihovi reprezentanti leže u istoj ili u paralelnim ravninama.

U daljnjem tekstu koristit ćemo sljedeće oznake [7]:

$X(E)$ – skup svih vektora u prostoru E;
$X(M)$ – skup svih vektora u ravnini M;
$X(p)$ – skup svih vektora na pravcu p.

Ako izaberemo jednu fiksnu točku $O \in E$, onda svakoj točki $P \in E$ pripada jedinstvena usmjerena dužina $\overrightarrow{OP}$, koju zovemo **radijvektor** ili vektor položaja [1, 5, 7] (vidi takodjer *Dodatak: Vektori* u [14]). Skup svih ovakvih radijvektora označit ćemo s

$$X_0 = X_0(E) := \{\overrightarrow{OP} : P \in E\}.$$

Očigledno postoji bijekcija (obostrano jednoznačno preslikavanje) između skupova E i X_0.

Zadatak 1.1. Napišite definiciju realacije ekvivalencije.

a) U skupu $\mathbb{Z}$ definirana je relacija „djeljivosti" na sljedeći način: Cijeli broj a je u relaciji ρ s cijelim brojem b i pišemo $a\rho b$ ako je a djeljiv s b. Zašto relacija ρ nije relacija ekvivalencije?

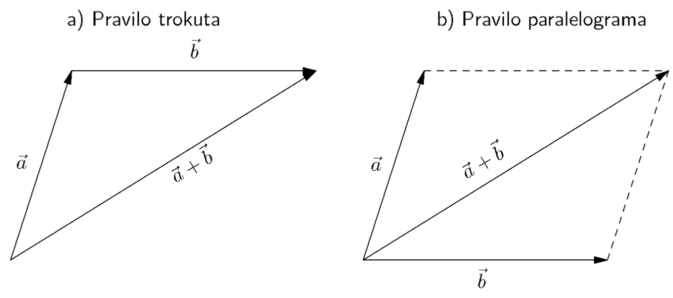
b) Koje od sljedećih relacija nisu relacije ekvivalencije u skupu $X_0(E)$? Zašto?

a) paralelnost b) okomitost c) kolinearnost d) komplanarnost

1.1 Operacije s vektorima

1.1.1 Zbrajanje vektora

Zbrajanje vektora je binarna operacija, tj. funkcija dviju varijabli $+ : X(E)\times X(E) \to X(E)$. Za dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X(E)$ definiramo novi vektor $\vec{c} := \vec{a}+\vec{b}$ pravilom trokuta (vidi Sliku 1.2.a) ili pravilom paralelograma (vidi Sliku 1.2.b).



Slika 1.2: Pravila za zbrajanje vektora

Binarna operacija zbrajanja vektora ima svojstvo zatvorenosti ili grupoidnosti, tj. rezultat operacije zbrajanja dva vektora opet je jedan vektor. Pored toga,

(i) vrijedi svojstvo asocijativnosti, tj. za svaka tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X(E)$ vrijedi:
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

(ii) postoji neutralni element $\vec{0}$, tako da za proizvoljni vektor $\vec{a} \in X(E)$ vrijedi: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

(iii) za svaki vektor $\vec{a} \in X(E)$ postoji inverzni element – suprotni vektor $(-\vec{a})$, takav da vrijedi:
$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

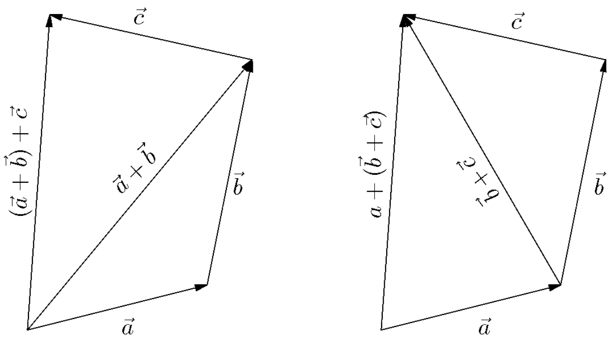
(iv) vrijedi zakon komutacije, tj. za svaka dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X(E)$ vrijedi:
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

Navedena svojstva lako se mogu ilustrirati. Primjerice, svojstvo asocijativnosti ilustrirano je na Slici 1.3.

Skup svih vektora u prostoru snabdjeven računskom operacijom zbrajanja i prethodno navedenim svojstvima nazivamo **komutativna** ili **Abelova grupa**[2] i označavamo s $(X(E),+)$.

Zadatak 1.2. Definirajte binarnu operaciju zbrajanja na skupu $X_0(E)$ i navedite njena svojstva.

[2] Niels Abel (1802-1829), norveški matematičar.

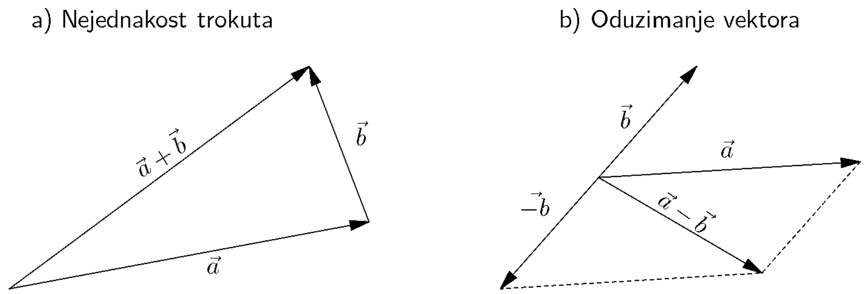


Slika 1.3: Ilustracija svojstva asocijativnosti zbrajanja vektora

Primjer 1.2. *Odaberimo reprezentante vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tako da oni leže na stranicama trokuta i da bude $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (vidi Sliku 1.4.a). Kako je u svakom trokutu duljina jedne njegove stranice manja od zbroja duljina preostale dvije, vrijedi tzv.* nejednakost trokuta

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$$

Pri tome jednakost vrijedi u slučaju ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearni.



Slika 1.4: Ilustracija nejednakosti trokuta (lijevo) i oduzimanja vektora (desno)

Primjedba 1.4. *Oduzimanje vektora možemo definirati preko zbrajanja, ko-*

risteći inverzni element (suprotni vektor – vidi Sliku 1.4.b):

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Primjedba 1.5. *Množenje vektora prirodnim brojem možemo definirati induktivno:*

$$n \cdot \vec{a} = (n-1) \cdot \vec{a} + \vec{a}, \qquad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

Zadaci[3]

Zadatak 1.3. Zašto skup $\mathbb{N} \cup \{0\}$, snabdjeven binarnom operacijom zbrajanja i skup cijelih brojeva snabdjeven binarnom operacijom množenja nisu grupe?

Zadatak 1.4. Neka je G skup svih kompleksnih brojeva različitih od nule oblika $a + i\, b\sqrt{2}$, gdje su a i b racionalni brojevi, tj. $G = \{z \in \mathbb{C} : z = a + i\, b\sqrt{2}, \quad a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$. Pokažite da je G Abelova grupa s množenjem kompleksnih brojeva kao binarnom operacijom. Što je neutralni element u ovoj grupi? Što je inverzni element elementa $z = a + i\, b\sqrt{2}$?
Rješenje: $e = 1; \quad z^{-1} = \frac{a}{a^2+2b^2} - i \frac{b}{a^2+2b^2}\sqrt{2}$

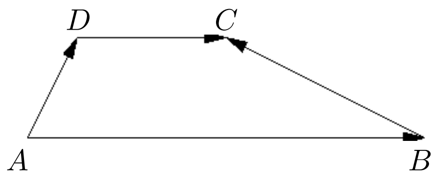
Zadatak 1.5. Neka je $G = \{1, -1, i, -i\} \subset \mathbb{C}$ podskup u skupu kompleksnih brojeva. Pokažite da je G Abelova grupa s množenjem kompleksnih brojeva kao binarnom operacijom. Što je neutralni element u ovoj grupi ? Napravite tablicu množenja za ovu grupu.
Rješenje: $e = 1$

Zadatak 1.6. Zadan je trapez čije su stranice usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ kao na slici, pri čemu je $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{DC}$. Prikažite usmjerenu dužinu $\overrightarrow{BC}$ pomoću usmjerenih dužina $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$. $[\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}]$

Zadatak 1.7. Matematičkom indukcijom dokažite generaliziranu nejednakost trokuta

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\vec{a}_i\|.$$

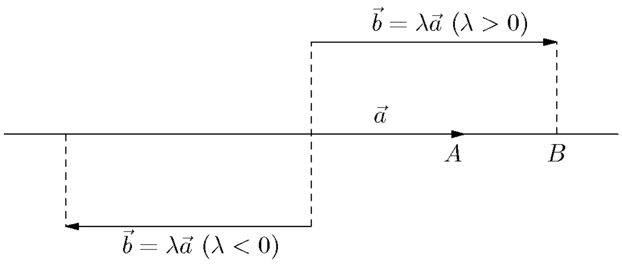
[3]Studenti trebaju pisati Domaće zadaće koje će dobivati na Vježbama iz ovog predmeta i Domaće zadaće za studente koji preferiraju bolju ocjenu koje mogu preuzeti sa web-stranice predmeta `http://www.mathos.unios.hr/index.php/nastava/preddiplomski-studij-matematika/182` Zadaće se pišu korištenjem LaTeX [18] i šalju voditelju Vježbi u pdf-formatu



Kada će u ovoj nejednakosti vrijediti jednakost?

1.1.2 Množenje vektora sa skalarom

Množenje vektora sa skalarom je funkcija dviju varijabli $\cdot : \mathbb{R} \times X(E) \to X(E)$. Za realni broj $\lambda \in \mathbb{R}$ i vektor $\vec{a} \in X(E)$ definiramo novi vektor $\vec{b} := \lambda \cdot \vec{a}$ kao na Slici 1.5.



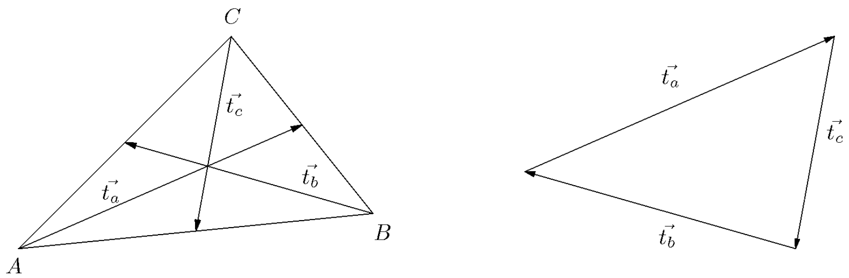
Slika 1.5: Množenje vektora sa skalarom

Primijetite da se analogno može definirati množenje vektora sa skalarom na skupu $X_0(E)$.

Zadatak 1.8. Za zadane vektore $\vec{a}, \vec{b} \in X(M)$ nacrtajte vektor $\vec{a} - 2\vec{b}$.

Zadatak 1.9. Pokažite da se dijagonale paralelograma međusobno raspolavljaju.

Primjer 1.3. *Treba dokazati da postoji trokut sa stranicama koje su jednake i paralelne s težišnicama bilo kojeg zadanog trokuta (vidi Sliku 1.6).*



Slika 1.6: Slika uz Primjer 1.3

Koristeći prethodni zadatak, dobivamo:

$$\begin{aligned}\vec{t_a} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),\\ \vec{t_b} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}),\\ \vec{t_c} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}),\end{aligned}$$

odakle zbrajanjem dobivamo $\vec{t_a}+\vec{t_b}+\vec{t_c}=\vec{0}$.

U kontinuitetu sa svojstvima koja vrijede za zbrajanje vektora, navedimo i svojstava koja vrijede za množenje vektora sa skalarom:

(v) za dva vektora $\vec{a},\vec{b}\in X(E)$ i $\lambda\in\mathbb{R}$ vrijedi distributivnost obzirom na vektorski faktor: $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

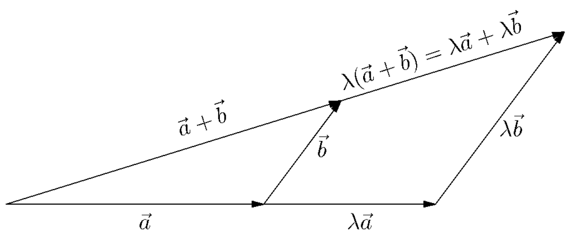
(vi) za dva skalara $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ i vektor $\vec{a}\in X(E)$ vrijedi distributivnost obzirom na skalarni faktor: $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;

(vii) za dva skalara $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ i vektor $\vec{a}\in X(E)$ vrijedi svojstvo kvaziasocijativnosti: $(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$;

(viii) za bilo koji vektor $\vec{a}\in X(E)$ vrijedi: $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Svojstvo (v) proizlazi iz sličnosti trokuta i ilustrirano je na Slici 1.7.

Svojstva (vi) i (vii) dokazuju se posebno za svaku kombinaciju predznaka skalara λ i μ (vidi [7]).



Slika 1.7: Ilustracija distributivnosti množenja sa skalarom

Skup $X(E)$ snabdjeven binarnom operacijom zbrajanja i operacijom množenja sa skalarom, koje imaju navedenih osam svojstava nazivamo **vektorski prostor** i označavamo s $(X(E), +, \cdot)$ [1–11, 16, 17, 19]. Analogno se definiraju i vektorski prostor $(X(M), +, \cdot)$ u ravnini i vektorski prostor $(X(p), +, \cdot)$ na pravcu. Kako je $X(M) \subset X(E)$, reći ćemo da je vektorski prostor $(X(M), +, \cdot)$ **vektorski potprostor** u $(X(E), +, \cdot)$. Nadalje ćemo ove vektorske prostore označavati samo s $X(E), X(M), X(p)$.

Primjedba 1.6. *Ako su $\vec{a}, \vec{b}$ dva kolinearna vektora, tada postoji pravac p i točke $O, A, B \in p$ takve da je $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$, pri čemu je*

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}, \qquad \textit{gdje je} \quad \lambda = \begin{cases} \|\vec{b}\|/\|\vec{a}\|, & \vec{a}, \vec{b} \textit{ imaju isti smjer} \\ -\|\vec{b}\|/\|\vec{a}\|, & \vec{a}, \vec{b} \textit{ su suprotnog smjera} \end{cases}$$

Matematičku strukturu $(X_0, +, \cdot)$ zovemo **vektorski prostor radijvektora** (detaljnije vidi [1]), pri čemu je $+ : X_0 \times X_0 \to X_0$ zbrajanje sa svojstvima[4]

(i) $(\forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0) \quad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ [asocijativnost]

(ii) $(\exists\, \vec{0} \in X_0)\, (\forall \vec{a} \in X_0) \quad \vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$ [$\vec{0}$ je neutralni element za zbrajanje]

(iii) $(\forall\, \vec{a} \in X_0)\, (\exists!\, \vec{a'} \in X_0) \quad \vec{a}+\vec{a'} = \vec{a'}+\vec{a} = \vec{0}$ [inverzni element: $\vec{a'} = -\vec{a}$]

(iv) $(\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in X_0) \quad \vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ [komutativnost]

[4] Prije toga uvesti **univerzalni (∀)** i **egzistencijalni (∃) kvantifikator** t. 6.1

$\cdot : \mathbb{R} \times X_0 \to X_0$ množenje sa skalarom sa svojstvima

(v) $(\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in X_0)\, (\forall\, \lambda \in \mathbb{R}) \quad \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ [distributivnost u vektorskom faktoru]

(vi) $(\forall\, \vec{a} \in X_0)\, (\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \quad (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ [distributivnost u skalarnom faktoru]

(vii) $(\forall\, \vec{a} \in X_0)\, (\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \quad (\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$ [kvaziasocijativnost]

(vii) $(\forall\, \vec{a} \in X_0) \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Primjeri vektorskih prostora

- $X(E)$, $X(M)$, $X(p)$, X_0;
- Skup $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \colon a_i \in \mathbb{R}\}, \quad n = 1, 2, \ldots$ s računskim operacijama

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \qquad \text{(zbrajanje)}$$
$$\lambda(a_1, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) \qquad \text{(množenje sa skalarom)}$$

- Skup $\mathbb{C}^n$ s odgovarajućim računskim operacijama *zbrajanja* i *množenje sa skalarom*;
- Skup polinoma P_n stupnja manjeg ili jednakog n s realnim koeficijentima (uključujući i polinom nultog stupnja) snabdjeven računskim operacijama

zbrajanja:

$$(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) + (b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n,$$

množenja sa skalarom:

$$\lambda(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)t + \cdots + (\lambda a_n)t^n.$$

- Skup $C([a, b])$ svih neprekidnih funkcija definiranih na segmentu $[a, b]$ snabdjeven računskim operacijama

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad t \in [a, b] \qquad \text{(zbrajanje)}$$
$$(\lambda f)(t) = \lambda f(t), \quad t \in [a, b] \qquad \text{(množenje sa skalarom)}$$

1.1.3 Potprostor

Definicija 1.3. *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Ako je $(Y, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ s istim operacijama iz X, onda kažemo da je Y potprostor u X i pišemo $Y \subseteq X$.*

Primjerice $X_0(M)$ i $X_0(p)$ su potprostori u $X_0(E)$.

Slično, za $\vec{a} \in X_0(M)$ njegova linearna ljuska $L(\vec{a}) = \{\lambda\vec{a} \colon \lambda \in \mathbb{R}\}$ je potprostor u $X_0(M)$.

Trivijalni vektorski potprostori vektorskog prostora X su $\{0\}$ i sam X.

Lako se može provjeriti da vrijedi:

Propozicija 1.1. *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Tada je Y potprostor u X onda i samo onda ako vrijedi*

(i) $a + b \in Y, \quad \forall a, b \in Y$

(ii) $\lambda a \in Y \quad \forall a \in Y, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Korolar 1.1. *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Tada je Y potprostor u X onda i samo onda ako vrijedi*

(i') $\lambda x + \mu y \in Y, \quad \forall x, y \in Y, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

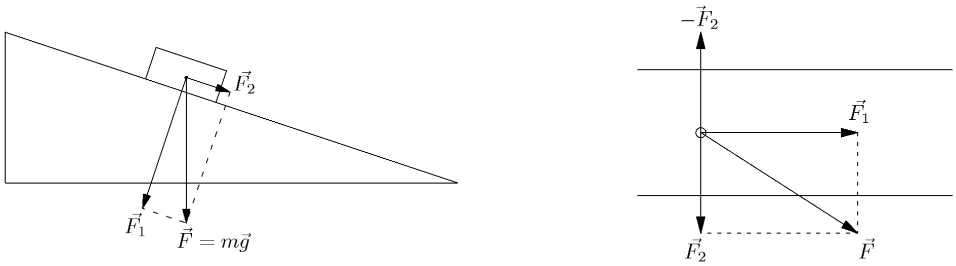
1.2 Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Definicija 1.4. *Ako su $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ vektori, a $\lambda_1 \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ skalari, tada vektor $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n \in X_0$ nazivamo* **linearna kombinacija** *vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$. Kažemo još da je vektor $\vec{a}$ rastavljen (razvijen) po vektorima $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.*

Pogledajmo dva jednostavna fizikalna primjera (vidi Sliku 1.8):

- na tijelo na kosini djeluje sila teža $\vec{F}$, koju po pravilu paralelograma rastavljamo na sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$;
- na tijelo u vodi djeluje vučna sila $\vec{F}$, koju također rastavljamo po pravilu paralelograma na sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$;

Navedene rastave možemo zapisati kao $1 \cdot \vec{F} + (-1) \cdot \vec{F}_1 + (-1) \cdot \vec{F}_2 = \vec{0}$.



Slika 1.8: Rastav sile

Definicija 1.5. *Kažemo da je skup vektora* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ **linearno nezavisan** *ako njihova linearna kombinacija iščezava jedino na trivijalan način:*

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

U protivnom kažemo da je skup vektora **linearno zavisan**, *tj. postoji barem jedna njihova linearna kombinacija koja iščezava na netrivijalan način, tj.*

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \quad \textit{pri čemu} \quad \exists\, \lambda_i \neq 0.$$

Primjer 1.4. *Ako skup vektora* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ *sadrži nulvektor, on je linearno zavisan.*

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je baš prvi vektor $\vec{a}_1$ nulvektor. Tada možemo utvrditi da vrijedi:

$$1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0},$$

pa smo na taj način pronašli jednu linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, koja iščezava na netrivijalan način.

Primijetite da su sile $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$ iz fizikalnih primjera s početka odjeljka također linearno zavisne. Sljedeći teorem ukazuje nam kako se na jedan operativniji način može ustanoviti[5] je li skup vektora linearno zavisan ili nezavisan.

Teorem 1.1. *Skup vektora* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ *je linearno zavisan onda i samo onda ako se barem jedan od njih može prikazati kao linearna kombinacija ostalih.*

[5] Prije toga na jednostavnom primjeru objasniti pojam: **nužno i dovoljno** t. 6.2

Dokaz. (Nužnost) Pretpostavimo da je skup vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ linearno zavisan. Po prethodnoj definiciji to znači da postoji njihova linearna kombinacija koja iščezava na netrivijalan način. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$, a da je pri tome $\lambda_1 \neq 0$. Tada možemo pisati

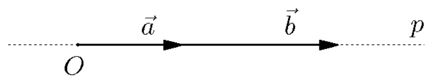
$$\vec{a}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\vec{a}_2 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\vec{a}_n\,.$$

(Dovoljnost) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\vec{a}_1 = \beta_2\vec{a}_2 + \cdots + \beta_n\vec{a}_n$ iz čega slijedi

$$1\cdot\vec{a}_1 + (-\beta_2)\vec{a}_2 + \cdots + (-\beta_n)\vec{a}_n = \vec{0}.$$

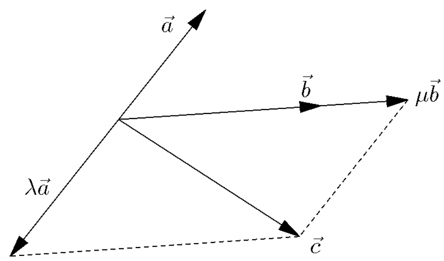
Po definiciji to znači da su vektori $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ linearno zavisni. ♣

Primjer 1.5. *Bilo koja dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(p)$ su linearno zavisna (maksimalni mogući broj linearno nezavisnih vektora u $X_0(p)$ je jedan).*



Slika 1.9: Linearna zavisnost dvaju vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(p)$

Primjer 1.6. *Bilo koja tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(M)$ su linearno zavisna (maksimalni mogući broj linearno nezavisnih vektora u $X_0(M)$ je dva).*



Slika 1.10: Linearna zavisnost triju vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(M)$

Primjer 1.7. *Bilo koja četiri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in X_0(E)$ su linearno zavisna (maksimalni mogući broj linearno nezavisnih vektora u $X_0(E)$ je tri).*

Zadatak 1.10. Pokažite da su dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ kolinearna onda i samo onda ako su linearno zavisna.

Zadatak 1.11. Pokažite da su tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ komplanarna onda i samo onda ako su linearno zavisna.

Teorem 1.2. *Ako su $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ dva linearno nezavisna vektora u ravnini, tada se svaki vektor $\vec{c} \in X_0(M)$ na jedinstven način[6] može prikazati (rastaviti) kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}, \vec{b}$.*

Dokaz. Prema Primjeru 1.6 vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su linearno zavisni pa prema Teoremu 1.1 vrijedi

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\,. \tag{1.1}$$

U svrhu dokaza jedinstvenosti ovog rastava, pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da se vektor $\vec{c}$ barem na još jedan način može prikazati pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \lambda'\vec{a} + \mu'\vec{b} \tag{1.2}$$

Oduzimanjem jednakosti (1.1), (1.2) dobivamo

$$(\lambda - \lambda')\vec{a} + (\mu - \mu')\vec{b} = \vec{0}.$$

Kako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ linearno nezavisni, slijedi: $\lambda = \lambda' \quad \& \quad \mu = \mu'$. ♣

Na sličan način može se dokazati i sljedeći teorem.

Teorem 1.3. *Ako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ tri linearno nezavisna vektora u prostoru, tada se svaki vektor $\vec{d} \in X_0(E)$ na jedinstven način može prikazati (rastaviti) kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.*

Zadatak 1.12. Neka je $O \in E$ fiksna točka i neka točka $C \in E$ dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $3:1$, tj. $d(A,C) : d(C,B) = 3:1$. Vektor $\overrightarrow{OC}$ prikažite kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$.
Rješenje: $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$.

Zadatak 1.13. Provjerite jesu li vektori: $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -5\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k}$ linearno zavisni.
Rješenje: Jesu, $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

[6] Prije toga na jednostavnom primjeru objasniti **princip kontradikcije**, t. 6.3

1.3 Baza vektorskog prostora. Koordinatni sustav

Definicija 1.6.

Uređena trojka $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *linearno nezavisnih vektora iz* $X_0(E)$ *zove se* **baza vektorskog prostora** $X_0(E)$.

Uređen par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *linearno nezavisnih vektora iz* $X_0(M)$ *zove se baza vektorskog prostora* $X_0(M)$.

Svaki nenul vektor $(\vec{e})$ *iz* $X_0(p)$ *čini bazu vektorskog prostora* $X_0(p)$.

Neka je $\vec{a} \in X_0(E)$, a $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ baza u $X_0(E)$. Tada vektor $\vec{a}$ na jedinstven način možemo zapisati

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$$

Brojeve a_1, a_2, a_3 zovemo **koordinate** (komponente) vektora $\vec{a}$ u bazi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Sada prirodno slijede pravila za zbrajanje vektora i množenje vektora sa skalarom ako su oni zadani sa svojim koordinatama:

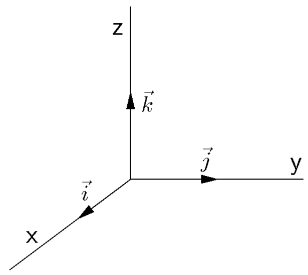
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3 \quad \text{[zbrajanje]}$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\vec{e}_1 + (\lambda a_2)\vec{e}_2 + (\lambda a_3)\vec{e}_3 \quad \text{[množenje vektora skalarom]}$$

Definicija 1.7. *Par* $(O\,; (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ *fiksne točke* O *i baze* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *zovemo* **Kartezijev[7] koordinatni sustav u prostoru** E.

Posebno je pogodno ako za bazu prostora $X_0(E)$ izaberemo uređenu trojku međusobno okomitih i jediničnih (dugačkih 1!) vektora, koje obično označavamo s $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Tako dobivamo **pravokutni Kartezijev koordinatni sustav** $(O; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$. Pravac određen vektorom $\vec{i}$ označavamo sa x i zovemo **os apscisa**, pravac određen vektorom $\vec{j}$ označavamo sa y i zovemo **os ordinata**, a pravac određen vektorom $\vec{k}$ označavamo sa z i zovemo **os aplikata**.

[7] Rene Descartes (1596-1650), francuski filozof i matematičar. Njegovo latinizirano ime je Cartesius



Slika 1.11: Pravokutni Kartezijev koordinatni sustav

Primjedba 1.7. *Ranije smo utvrdili da postoji bijekcija (obostrano jednoznačno preslikavanje) između skupova E i X_0. Primijetite da također postoji bijekcija između skupa svih uređenih trojki realnih brojeva $\mathbb{R}^3$ i vektorskog prostora $X_0(E)$ jer svakoj uređenoj trojki $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ na jedinstven način možemo pridružiti vektor $\vec{a} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ iz prostora $X_0(E)$ i obrnuto. Zato ćemo često po potrebi povezivati, pa neki puta i poistovjećivati pojmove: skup E, vektorski prostor $X_0(E)$ i $\mathbb{R}^3$.*

Zadatak 1.14. Provjerite čine li vektori $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ bazu u vektorskom prostoru $X_0(M)$. Ako čine, vektor $\vec{c} = -11\vec{i} + 6\vec{j}$ prikažite u toj bazi.
Rješenje: čine, $\vec{c} = -2\vec{a} + 5\vec{b}$.

1.4 Norma vektora

Pretpostavimo da je u ravnini M definiran pravokutni Kartezijev koordinatni sustav $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$ i neka je $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$. Sada možemo izračunati (vidi Sliku 1.12a) duljinu ovog vektora $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Primjetite da za ovako definiranu duljinu vektora vrijedi

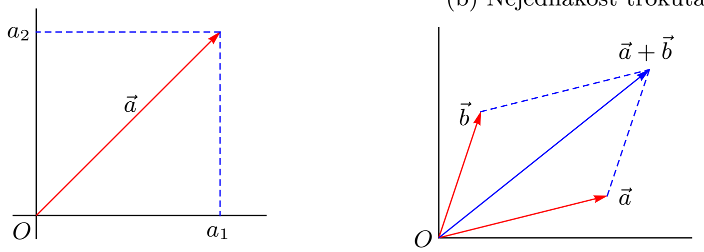
(i) $\|\vec{a}\| \geq 0 \quad \& \quad (\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0})$,

(ii) $\|\lambda\vec{a}\| = \mid \lambda \mid \|\vec{a}\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (vidi Sliku 1.12b)

Duljina (norma, intenzitet) vektora može se i općenito definirati:

(a) Norma vektora (b) Nejednakost trokuta



Slika 1.12:

Definicija 1.8. *Neka je X_0 vektorski prostor. Funkciju $\|\cdot\| : X_0 \to [0,\infty)$, koja svakom vektoru $\vec{a} \in X_0$ pridružuje nenegativni realni broj (koji ćemo označiti s $\|\vec{a}\|$ ili jednostavno a) zovemo* **norma** *vektora $\vec{a}$ ako vrijedi*

(i) $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ [pozitivna definitnost],

(ii) $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \, \|\vec{a}\|$ *za svaki* $\lambda \in \mathbb{R}$ *i za svaki* $\vec{a} \in X_0$,

(iii) $\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ *za svaki* $\vec{a}, \vec{b} \in X_0$ [nejednakost trokuta].

Najčešće korištene vektorske norme su[8]

$\|\vec{a}\|_1 = |a_1| + |a_2| + |a_3|$, ($l_1$ norma)

$\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, ($l_2$ Euklidova ili euklidska norma)

$\|\vec{a}\|_\infty = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|\}$, ($l_\infty$ norma ili Čebiševljeva norma)

Zadatak 1.15. Pokažite da spomenute norme imaju sva svojstva navedena u prethodnoj definiciji.

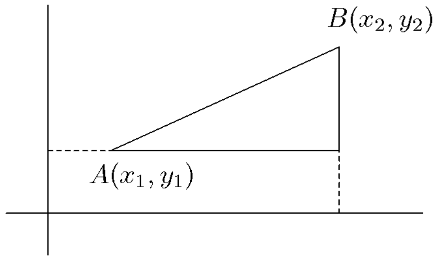
1.4.1 Udaljenost dviju točaka

Udaljenost dviju točaka $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) \in M$ u ravnini M u kojoj je uveden pravokutni Kartezijev koordinatni sustav možemo izračunati (vidi Sliku 1.13) po formuli

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.3}$$

Ako definiramo radijvektore $\vec{r}_A, \vec{r}_B \in X_0(M)$,

[8] U programskom sustavu *Mathematica* l_2-normu vektora $\vec{a}$ dobivamo naredbom `Norm[a]`, gdje je a lista



Slika 1.13: Udaljenost točaka u ravnini

$$\vec{r}_A = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \qquad \vec{r}_B = x_2\vec{i} + y_2\vec{j},$$

onda udaljenost zapisanu formulom (1.3) možemo zapisati kao

$$d_2(A,B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_2, \quad \text{gdje je} \quad \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}. \tag{1.4}$$

Na sličan način može se definirati i udaljenost dviju točaka preko l_1 ili l_∞ norme sljedećim formulama:

$$d_1(A,B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_1 \qquad d_\infty(A,B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_\infty. \tag{1.5}$$

Koji je geometrijski smisao d_1, d_2 i d_∞ udaljenosti dviju točaka $A, B \in M$?

Primjer 1.8. *U realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ d_2 udaljenost dviju točaka $A = (x_1, \ldots, x_n)$, $B = (y_1, \ldots, y_n)$ definira se kao $d_2(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$. Kako bi se definirale odgovarajuće d_1 i d_∞ udaljenosti?*

Zadatak 1.16. Pokažite da funkcije d_i, $i = 1, 2, \infty$ definirane s (1.4)–(1.5) zadovoljavaju sljedeća svojstva

$$\begin{aligned}
(i) \quad & d_i(A,B) \geq 0, \quad \forall A, B \in M,\\
(ii) \quad & d_i(A,B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = B,\\
(ii) \quad & d_i(A,B) = d_i(B,A), \quad \forall A, B \in M,\\
(iv) \quad & d_i(A,B) \leq d_i(A,C) + d_i(C,B), \quad \forall A, B, C \in M.
\end{aligned}$$

Zadovoljava li funkcija $d_{LS}(A,B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_2^2$ navedena svojstva?

Zadatak 1.17. „Jedinična kružnica” sa središtem u $O \in \mathbb{R}^2$ definira se kao skup $\partial K = \{T \in M : \; d(O,T) = 1\}$. Nacrtajte jedinične kružnice ako se udaljenost definira s d_1, d_2 ili d_∞.

Zadatak 1.18. Zadan je trapez $ABCD$ s vrhovima: $A(-3,2,1)$, $B(3,-1,4)$, $C(5,2,-3)$. Odredite četvrti vrh D ako vrijedi $\overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{DC}$.
Rješenje: $\vec{r}_D = \vec{r}_C - \frac{1}{3}\vec{r}_B + \frac{1}{3}\vec{r}_A$, $D(3,3,-4)$.

Zadatak 1.19. Zadan je trokut ABC s vrhovima: $A(-3,2,1)$, $B(3,-2,2)$, $C(5,2,-4)$. Odredite duljinu težišnice iz vrha A.
Rješenje: $P_A(4,0,-1)$, $\overrightarrow{AP_A} = 7\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $d = \sqrt{57}$.

Zadatak 1.20. Zadan je paralelogram $ABCD$ s vrhovima: $A(-3,2,1)$, $B(3,-1,4)$, $C(5,2,-3)$, $D(-1,5,-6)$. Izračunajte udaljenost točke A do sjecišta njegovih dijagonala.
Rješenje: $S(1,2,-1)$, $\vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_C - \vec{r}_A) = \frac{1}{2}(\vec{r}_D - \vec{r}_B), d(A,S) = 2\sqrt{5}$.

Zadatak 1.21. Dokažite da vektor $\vec{a} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ s početkom u točki O ima vrh u polovištu dužine $\overline{AB}$.

1.5 Cauchy – Schwarz – Buniakowsky (CSB) nejednakost

Cauchy – Schwarz – Buniakowsky (CSB) nejednakost, vrlo je važnau različitim primjenama, a može se naći u brojnoj literaturi (vidi primjerice [1, 6, 7, 12, 15]). Pokažimo najprije sljedeću jednostavnu lemu (vidi [7]) pomoću koje ćemo dokazati CSB nejednakost.

Lema 1.1. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + 2bx + c, \quad a,b,c \in \mathbb{R},\ a > 0$ kvadratna funkcija. Tada vrijedi:*

$$
\begin{array}{ll}
(i) & b^2 - ac \le 0 \iff f(x) \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
(ii) & b^2 - ac = 0 \iff f(-\frac{b}{a}) = 0 \quad \& \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}.
\end{array}
$$

Dokaz. Nultočke kvadratne funkcije f dobiju se iz dobro poznate formule

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a}, \quad D = b^2 - ac.$$

Budući da je $a > 0$ graf ove kvadratne funkcije (parabola) okrenut je prema gore i očigledno vrijedi

$$D = b^2 - ac \leq 0 \Longleftrightarrow f(x) \geq 0.$$

Ako je $D = b^2 - ac = 0$, onda je $f(-\frac{b}{a}) = 0$ i $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$ i obrnuto. ♣

Teorem 1.4. (Cauchy – Schwarz – Buniakowsky). *Za proizvoljne realne brojeve $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2, \tag{1.6}$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$, takav da je $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \ldots, n$.

Dokaz.

1. Ako je $a_1 = \cdots = a_n = 0$ (odnosno $b_1 = \cdots = b_n = 0$), teorem očigledno vrijedi.

2. Pretpostavimo zato da je barem jedan $a_i \neq 0$ i definirajmo pomoćnu funkciju

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2,$$

koju možemo zapisati u obliku

$$f(x) = ax^2 + 2bx + c, \qquad a = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad b = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad c = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Kako je zbog $a_i \neq 0$, $a > 0$ i $f(x) \geq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$, onda prema prethodnoj lemi mora biti

$$b^2 - ac \leq 0, \tag{1.7}$$

što je zapravo nejednakost (1.6).

Još je preostalo dokazati da u (1.6) stoji jednakost onda i samo onda ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$, takav da bude $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \ldots, n$.

($\Longrightarrow$) Pretpostavimo da u (1.6), odnosno (1.7), stoji jednakost. Prema prethodnoj lemi tada je $f(-\frac{b}{a}) = 0$, tj. vrijedi

$$f\left(-\frac{b}{a}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{b}{a}a_k + b_k\right)^2 = 0,$$

iz čega slijedi

$$-\frac{b}{a}a_k + b_k = 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n \quad \Longrightarrow \quad b_k = \frac{b}{a}a_k \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

($\Longleftarrow$) Pretpostavimo da postoji $\lambda \in \mathbb{R}$, takav da bude $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \ldots, n$. Tada je specijalno

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad b = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda a_k = \lambda a,$$
$$c = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k)^2 = \lambda^2 a,$$

pa imamo

$$D = b^2 - ac = (\lambda a)^2 - a \cdot \lambda^2 \cdot a = 0,$$

što daje jednakost u (1.7), odnosno (1.6).

♣

Korolar 1.2. (Hölderova nejednakost). *Za proizvoljne realne brojeve $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}, \tag{1.8}$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako postoji $\lambda \geq 0\,!$, takav da bude $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \ldots, n$.

Dokaz. **1.** Ako je $a_1 = \cdots = a_n = 0$ (odnosno $b_1 = \cdots = b_n = 0$), korolar očigledno vrijedi.

2. Pretpostavimo zato da je barem jedan $a_i \neq 0$. Budući da uz ranije oznake iz (1.7) slijedi $b^2 \leq ac$, odnosno $b \leq |b| \leq \sqrt{a}\sqrt{c}$, imamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n}a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k + \sum_{k=1}^{n}b_k^2 \\ &= a+2b+c \leq a+2\sqrt{a}\sqrt{c}+c = \left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)^2,\end{aligned} \tag{1.9}$$

što daje (1.8).

Još je preostalo dokazati da u (1.6) stoji jednakost onda i samo onda ako postoji $\lambda \geq 0$, takav da bude $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1,\ldots,n$.

($\Longrightarrow$) Pretpostavimo da u (1.8), stoji jednakost. To znači da i u (1.9) stoji jednakost, a to znači da je $b = \sqrt{a}\sqrt{c}$, odnosno $b^2 - ac = 0$. Prema Lemi 1.1 vrijedi

$$0 = f(-\tfrac{b}{a}) = \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\left(-\tfrac{b}{a}\right)+b_k\right)^2,$$

iz čega slijedi $b_k = \lambda a_k$, za svaki $k = 1,\ldots,n$, pri čemu, zbog $a > 0$ i $b \geq 0$, vrijedi $\lambda = \frac{b}{a} \geq 0$.

($\Longleftarrow$) Pretpostavimo da postoji $\lambda \geq 0$, takav da bude $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1,\ldots,n$. Kako je

$$\begin{aligned} a := \sum_{k=1}^{n}a_k^2, &\qquad \sum_{k=1}^{n}b_k^2 = \lambda^2 a, \\ \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(a_k+\lambda a_k)^2 = (1+\lambda)^2 a,\end{aligned}$$

i $\sqrt{\lambda^2} = \lambda$ (za $\lambda \geq 0$) vrijedi:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2} = (1+\lambda)\sqrt{a} - \sqrt{a} - \lambda\sqrt{a} = 0,$$

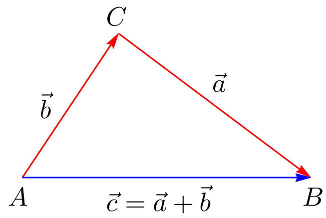
što znači da u (1.8) vrijedi jednakost.

□

Korolar 1.3. (Nejednakost trokuta). *Ako definiramo vektore* $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, *onda Hölderovu nejednakost* (1.8) *možemo zapisati kao*

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|, \tag{1.10}$$

gdje je $\| \cdot \|$ *euklidska* ℓ_2 *norma. Pri tome u* (1.10) *jednakost vrijedi onda i samo onda ako su vektori* a, b *linearno zavisni.*



Slika 1.14: Nejednakost trokuta

Primjedba 1.8. *Primijetite specijalno ako su zadane točke* $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ *i ako se udaljenost dviju točaka definira sukladno formuli (1.3), odnosno (1.4), onda nejednakost* (1.10) *daje nejednakost trokuta u* $\mathbb{R}^3$*:*

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B),$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako točka C *leži na spojnici* $\overline{AB}$. *Naime, vrijedi:*

$$\begin{aligned} d(A, B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\| &= \|(\vec{r}_B - \vec{r}_C) + (\vec{r}_C - \vec{r}_A)\| \\ &\leq \|\vec{r}_B - \vec{r}_C\| + \|\vec{r}_C - \vec{r}_A\|\| \\ &= d(C, B) + d(A, C). \end{aligned}$$

Primjer 1.9. *Neka su* x *i* y *realni brojevi takvi da je* $3x + 7y = 1$. *Dokažite da je*

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{58}.$$

Primjenom CSB nejednakosti uz $n = 2$ i primjerice $a_1 = x$, $a_2 = y$, $b_1 = 3$ i $b_2 = 7$, dobivamo da je

$$(3x + 7y)^2 \leq (x^2 + y^2)(3^2 + 7^2),$$

tj.

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{58}.$$

Zadatak 1.22. Neka su $x, y, z \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$ takvi da je $x+y+z = 1$. Odredite maksimalnu vrijednost izraza

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1}.$$

Zadatak 1.23. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nenegativni realni brojevi takvi da je $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Dokažite:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n} \leq \sqrt{n}.$$

Zadatak 1.24. Dokažite da za svaki $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ vrijedi nejednakost

$$(1 + a + a^2)^2 < 3(1 + a^2 + a^4)\,.$$

Zadatak 1.25. Neka su dana dva trokuta: trokut T_1 sa stranicama a, b, c i trokut T_2 sa stranicama x, y, z. Dokažite da su trokuti T_1 i T_2 slični ako i samo ako vrijedi

$$(\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz})^2 = (a + b + c)(x + y + z).$$

Zadatak 1.26. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite:

$$abc(a + b + c) \leq a^3b + b^3c + c^3a.$$

Zadatak 1.27. Neka su a, b, c duljine stranica pravokutnog trokuta (a, b - katete, c - hipotenuza). Dokažite:

$$ab + bc + ca < 2c^2.$$

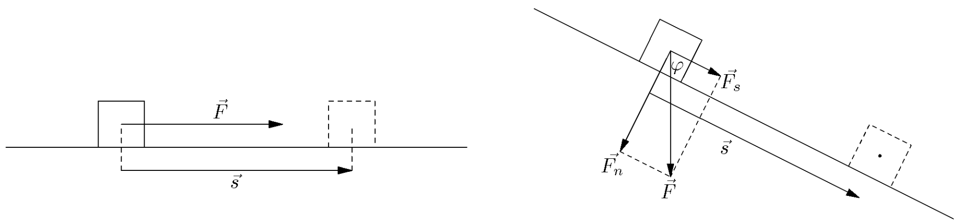
1.6 Skalarni produkt

Motivacija za uvođenje pojma skalarnog produkta vektora je fizikalna definicija rada sile $\vec{F}$ na putu $\vec{s}$. Ako rad obavlja sila $\vec{F}$ koja djeluje u smjeru puta $\vec{s}$, onda je rad zadan s (vidi Sliku 1.15 (lijevo))

$$W = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{s}\| = F\,s,$$

a ako sila $\vec{F}$ ne djeluje u smjeru puta $\vec{s}$, onda rad obavlja samo komponenta $\vec{F}_s$ sile u smjeru puta $\vec{s}$ (vidi Sliku 1.15 (desno)), tj.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_s + \vec{F}_n, \\ W &= \|\vec{F}_s\| \cdot \|\vec{s}\| = (F\cos\varphi)\, s = F\, s\cos\varphi \end{aligned}$$



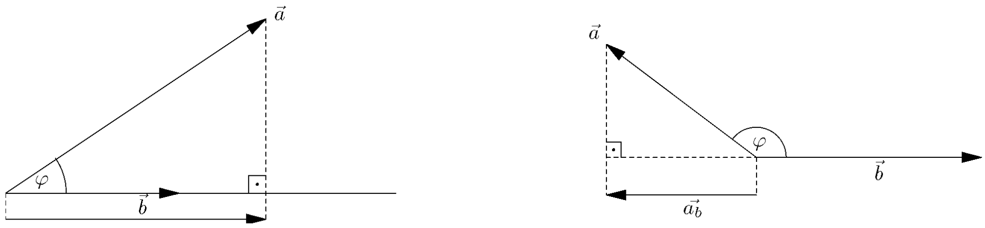
Slika 1.15: Rad sile $\vec{F}$ na putu $\vec{s}$

Primijetite da je sila $\vec{F}_s$ ortogonalna projekcija sile $\vec{F}$ u smjeru vektora puta $\vec{s}$.

Općenito ćemo **projekciju vektora $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{b}$** označiti s $\vec{a}_b$. Pod **skalarnom projekcijom** vektora $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{b}$ podrazumijevamo (uz oznaku $a := \|\vec{a}\|$)[9]

$$a_b = a\,\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

Primijetite da broj $a\cos\varphi$ može biti nula ($a = 0$ ili $\varphi = \frac{\pi}{2}$), pozitivan ($\varphi < \frac{\pi}{2}$) ili negativan ($\varphi > \frac{\pi}{2}$).



Slika 1.16: Projekcija vektora $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{b}$

Zadatak 1.28. Pokušajte geometrijski opravdati niže navedena svojstva projekcije vektora

[9] U nekim knjigama se broj a_b naziva „projekcija vektora $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{b}$ ([5])"

a) Projekcija produkta skalara s vektorom jednaka je produktu tog skalara i projekcije vektora
$$(\lambda\,\vec{a})_b = \lambda \vec{a}_b,$$

b) Projekcija zbroja dva vektora jednaka je zbroju projekcija tih vektora
$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)_c = \vec{a}_c + \vec{b}_c.$$

Definicija 1.9. *Skalarni produkt u $X_0(E)$ je operacija $\cdot\; X_0 \times X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ koja paru vektora $\vec{a}$, $\vec{b} \in X_0$ pridužuje broj (skalar), kojeg ćemo označiti s $\vec{a}\cdot\vec{b}$, tako da je*
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R}, & \text{ako je } \vec{a}=\vec{0} \text{ ili } \vec{b}=\vec{0}, \\ ab\cos\varphi \in \mathbb{R}, & \text{ako je } \vec{a},\, \vec{b} \neq \vec{0}, \quad 0 \le \varphi \le \pi, \end{cases}$$
pri čemu je običaj da se i rezultat operacije naziva skalarni produkt.[10]

Koristeći ranije uveden pojam projekcije vektora, skalarni produkt možemo zapisati kao
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\cos\varphi = \begin{cases} a(b\,\cos\varphi) = a\,b_a, \text{ ili} \\ b(a\,\cos\varphi) = b\,a_b. \end{cases}$$
Navedimo neka svojstva skalarnog produkta:

1. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$, [slijedi iz Zadatka 1.28b]
2. $(\lambda\,\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$, [slijedi iz Zadatka 1.28a]
3. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$,
4. $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2 \ge 0$ i $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Svojstva 3. i 4. slijede direktno iz Definicije 1.9.

Primjer 1.10. *Lako se na osnovi Definicije 1.9 vidi da vrijedi:*

1. $(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = a^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + b^2$,
2. $(\vec{a}-\vec{b})^2 = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = a^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + b^2$,
3. $(\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}) \quad \cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\,b}$,
4. $(\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}) \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

[10] engl.: scalar (dot) product, njem.: Skalarprodukt (Ineresprodukt)

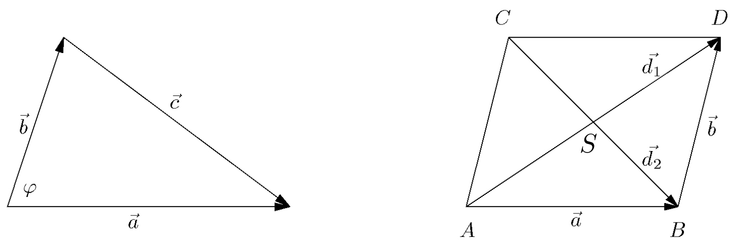
Primjer 1.11. (Poučak o kosinusima). *Dokažimo Poučak o kosinusima. Označimo vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i kut φ u kosokutnom trokutu kao na Slici 1.17. Množeći skalarno vektor*

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

s vektorom $\vec{c}$ dobivamo

$$\begin{aligned} c^2 &= (\vec{a} - \vec{b})^2 = a^2 - 2\,\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2 \\ &= a^2 - 2ab\cos\varphi + b^2. \end{aligned}$$

Slično pokušajte izvesti formule i za druge stranice kosokutnog trokuta.



Slika 1.17: Slika uz Primjer 10 (lijevo) i Primjer 11 (desno)

Primjer 1.12. *Dokažimo da se dijagonale romba raspolavljaju i da su međusobno okomite.*

1. Dokažimo da se dijagonale romba raspolavljaju, tj. da vrijedi: $|\overline{CS}| = |\overline{SB}|$ i $|\overline{AS}| = |\overline{SC}|$.

   Primijetite da su trokuti $\triangle ASB$ i $\triangle SDC$ sukladni jer su im najdulje stranice sukladne, a kutovi uz njih jednaki. (Što znači da su dva geometrijska lika sukladna? Uz koje uvjete su dva trokuta sukladna?) Zato su im i odgovarajuće stranice sukladne iz čega slijedi tražena tvrdnja.

2. Pokažimo da su dijagonale romba međusobno okomite. Iz slike se vidi da je $\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{d_2} = \vec{a} - \vec{b}$. Tražena tvrdnja slijedi iz činjenice što skalarni produkt

$$\vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2 = 0$$

iščezava (duljine stranica a, b romba su jednake).

Primjer 1.13. *Načinimo tablicu skalarnog množenja za ortonormiranu bazu* $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ *vektorskog prostora* $X_0(E)$

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Direktnom provjerom uz korištenje tablice množenja iz *Primjera 1.13* dobivamo

Teorem 1.5. *Za vektore*

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \\ \vec{b} &= b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \end{aligned}$$

vrijedi formula[11]

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{1.11}$$

Iz definicije skalarnog produkta i norme vektora korištenjem formule (1.11) dobivamo

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \tag{1.12}$$

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a\, b} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \quad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}. \tag{1.13}$$

Primjer 1.14. *Pokažimo da su dijagonale četverokuta* $ABCD$ *s vrhovima* $A(1, -2, 2), B(1, 4, 0)$,
$C(-4, 1, 1),\ D(-5, -5, 3)$ *međusobno okomite.*

Kako je $\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ i $\overrightarrow{BD} = \vec{r}_D - \vec{r}_B = -6\vec{i} - 9\vec{j} + 3\vec{k}$, imamo $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Primjer 1.15. *Zadan je trokut* ABC *s vrhovima* $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$. *Treba odrediti unutrašnji kut tog trokuta pridružen vrhu* B.

[11] U programskom sustavu *Mathematica* skalarni produkt vektora $\vec{a} \cdot \vec{b}$ dobivamo naredbom $a\,.\,b$ ili $Dot[a\,.\,b]$, gdje su a, b liste

Kako je $\overrightarrow{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = 7\vec{i} + \vec{k}$, dobivamo

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\,\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{25}{\sqrt{50}\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Longrightarrow\quad \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Z a d a c i

Zadatak 1.29. Pokažite da je zbroj kvadrata duljina dijagonala paralelograma jednak dvostrukom zbroju kvadrata duljina njegovih stranica.
Uputa: stranice i dijagonale paralelograma orijentirajte tako da bude: $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b}$.

Zadatak 1.30. Pokažite da su nasuprotni bridovi pravilnog tetraedra $ABCD$ međusobno okomiti.
Uputa: primijetite da je kut između susjednih bridova 60^o.

Zadatak 1.31. Odredite kut nasuprot osnovice jednakokračnog trokuta ako su težišnice na krakove međusobno okomite.
Rješenje: $\alpha \approx 37^o$.

Zadatak 1.32. Ako je vektor $\vec{a} + 3\vec{b}$ okomit na vektor $7\vec{a} - 5\vec{b}$ i vektor $\vec{a} - 4\vec{b}$ okomit na vektor $7\vec{a} - 2\vec{b}$, odredite kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
Rješenje: $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_1 = \frac{2}{3}\pi$.

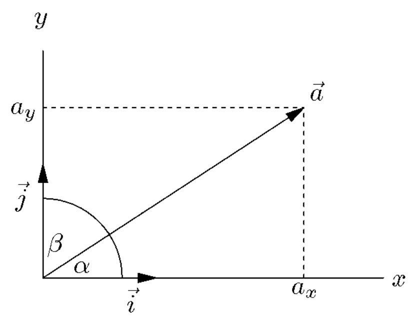
Zadatak 1.33. Odredite kut između jediničnih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako se zna da su vektori $\vec{a} + 2\vec{b}$ i $5\vec{a} - 4\vec{b}$ međusobno okomiti.
Rješenje: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Zadatak 1.34. Pokažite da se visine trokuta sijeku u jednoj točki (ortocentar).

Zadatak 1.35. Pokažite da su vektori $\vec{a}\,(\vec{b}\cdot\vec{c}) - \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c})$ i $\vec{c}$ međusobno okomiti.

1.6.1 Kosinusi smjerova

Promatrajmo najprije vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} \in X_0(M)$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, u ravnini, koji u pravokutnom koordinatnom sustavu zatvara kut α s pozitivnim smjerim osi x, a kut β s pozitivnim smjerom osi y.



Slika 1.18: Kosinusi smjerova

Očigledno je

$$a_1 = a\cos\alpha,$$
$$a_2 = a\cos\beta, \qquad \text{(odnosno zbog } \beta = \tfrac{\pi}{2} - \alpha, \quad a_2 = a\sin\alpha),$$

iz čega slijedi

$$a_1^2 + a_2^2 = a^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta),$$

odnosno zbog (1.12)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Primijetite da je $\vec{a}\cdot\vec{i} = a\,\cos\alpha$, pa je $a_1 = \vec{a}\cdot\vec{i}$.

Neka je sada $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \in X_0(E)$ proizvoljni vektor u prostoru, koji u pravokutnom koordinatnom sustavu zatvara kut α s pozitivnim smjerom osi x, kut β s pozitivnim smjerom osi y i kut γ s pozitivnim smjerom osi z. Množeći redom vektor $\vec{a}$ s baznim vektorima $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ dobivamo

$$\vec{a}\cdot\vec{i} = a_1, \qquad \vec{a}\cdot\vec{j} = a_2, \qquad \vec{a}\cdot\vec{k} = a_3,$$

iz čega koristeći definiciju skalarnog produkta dobivamo

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a\cos\alpha \\ a_2 &= a\cos\beta \\ a_3 &= a\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \tfrac{a_1}{a} \\ \cos\beta &= \tfrac{a_2}{a} \\ \cos\gamma &= \tfrac{a_3}{a} \end{aligned}\right.$$

odnosno

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2}{a^2} + \frac{a_2^2}{a^2} + \frac{a_3^2}{a^2} = 1. \tag{1.14}$$

1.6.2 Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$

Skup uređenih n-torki realnih brojeva $\mathbb{R}^n$ možemo interpretirati kao točke u n dimenzionalnom prostoru ili kao radij-vektore. Za dvije uređene n-torke realnih brojeva $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ možemo definirati sljedeće računske operacije.

- Zbrajanje $+ \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

- Množenje sa skalarom $\cdot \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n);$$

Provjerite da skup vektora $\mathbb{R}^n$ snabdjeven ovakvim zbrajanjem i množenjem sa skalarom ima strukturu vektorskog prostora.

U vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ možemo uvesti skalarni produkt $\langle , \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dva vektora $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

čime vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ postaje unitarni vektorski prostor.

Euklidska norma $\| \cdot \| \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ vektora $x \in \mathbb{R}^n$ definira se kao

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Euklidsku udaljenost $d \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ dviju točaka $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ definiramo kao,

$$d(a, b) = \|b - a\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}.$$

U ovom kontekstu Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost možemo zapisati na sljedeći način.

Teorem 1.6. *Za proizvoljne vektore $a, b \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \|b\|,$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako su vektori $a, b \in \mathbb{R}^n$ linearno zavisni.

Zadatak 1.36. Direktno dokažite Teorem 1.6 i navedite njegovo geometrijsko značenje.

Zadatak 1.37. Primjenom Teorema 1.6 dokažite sljedeći korolar i navedite njegovo geometrijsko značenje.

Korolar 1.4. *(Hölderova nejednakost) Za proizvoljne vektore $a, b \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|,$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako postoji $\lambda \geq 0$ takav da je $b = \lambda a$.

Zadatak 1.38. Primjenom Teorema 1.6 i Korolara 1.4 dokažite sljedeći korolar i navedite njegovo geometrijsko značenje.

Korolar 1.5. *(Nejednakost trokuta) Za proizvoljne točke $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

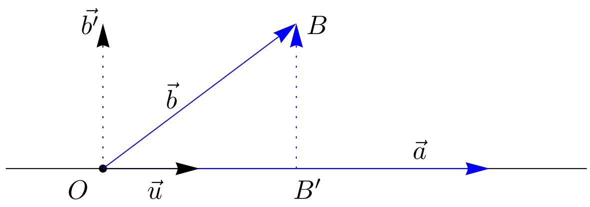
$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b),$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako postoji $\lambda \geq 0$ takav da je $b = \lambda a$.

1.7 Projekcija vektora na pravac i ravninu

1.7.1 Projekcija vektora na pravac

Na pravcu p izaberimo fiksnu točku O, vektor $\vec{a}$ i odgovarajući jedinični vektor $\vec{u}$. **Ortogonalnu projekciju** $\overrightarrow{OB'}$ vektora $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ na pravac p dobit ćemo tako da ortogonalno proiciramo točku B na pravac p.



Slika 1.19: Projekcija vektora na pravac

Ako je vektor $\vec{b}$ linearno zavisan s vektorom $\vec{a}$, onda se projekcija vektora $\vec{b}$ podudara sa samim vektorom $\vec{b}$ i vrijedi $\vec{b} = (\vec{b} \cdot \vec{u})\vec{u}$.

Ako su vektori $\vec{b}$ i $\vec{a}$ linearno nezavisni, onda su vektori $\overrightarrow{OB'}$ i $\vec{u}$ kolinearni, pa postoji $\lambda \in R$, takav da bude

$$\overrightarrow{OB'} = \lambda\, \vec{u}.$$

Iz slike se vidi da vrijedi

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'B} \quad \text{odnosno} \\ &= \lambda\, \vec{u} + \overrightarrow{B'B}\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Množeći skalarno ovu jednakost s vektorom $\vec{u}$ i koristeći činjenicu da su vektori $\overrightarrow{B'B}$ i $\vec{u}$ međusobno okomiti, dobivamo

$$\lambda = \vec{b} \cdot \vec{u}.$$

Dakle, ortogonalna projekcija $\overrightarrow{OB'}$ vektora $\vec{b}$ na pravac p određen vektorom $\vec{a}$ zadana je s

$$\overrightarrow{OB'} = (\vec{b} \cdot \vec{u})\, \vec{u}. \tag{1.16}$$

Primijetite da je vektor $\overrightarrow{B'B}$ okomit na pravac p, a da iz (1.15) slijedi

$$\vec{b'} := \overrightarrow{B'B} = \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{u})\, \vec{u}. \tag{1.17}$$

Primijetite da ako su $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ linearno nezavisni vektori, onda vrijedi

(i) $\vec{b'} \neq \vec{0}$,

(ii) $\vec{b'} \perp \vec{u}$,

(iii) $\vec{b'} \cdot \vec{b} > 0$, tj. kut između vektora $\vec{b'}$ i $\vec{b}$ je šiljasti.

Prve dvije tvrdnje lako se mogu provjeriti. Treća tvrdnja slijedi iz

$$\vec{b'} \cdot \vec{b} = b^2 - (\vec{b} \cdot \vec{u})^2 = b^2 \sin^2 \alpha,$$

gdje je α kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

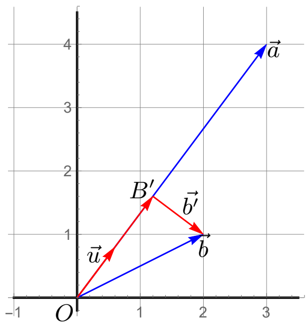
Drugi način dokaza tvrdnje može se pokazati i tako da jednadžbu (1.17) pomnožimo s $\vec{b'}$. Tada je $0 \leq \|\vec{b'}\|^2 = \vec{b} \cdot \vec{b'}$, a zbog (i) $\vec{b} \cdot \vec{b'} > 0$.

Treći način dokaza tvrdnje može se pokazati i tako da jednadžbu (1.17) pomnožimo s $\vec{b}$ i iskoristimi `CSB` teorem. Naime, tada je

$$\vec{b'} \cdot \vec{b} = b^2 - (\vec{b} \cdot \vec{u})^2 \overset{\texttt{(CSB)}}{\geq} b^2 - b^2 = 0.$$

Zbog linearne nezavisnosti vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi stroga nejednakost.

Primjer 1.16. *Treba odrediti ortogonalnu projekciju vektora $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ na pravac određen vektorom $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.*



Slika 1.20: Projekcija vektora $\vec{b}$ na pravac određen vektorom $\vec{a}$

Dobivamo:

$$\begin{aligned} &\|\vec{a}\| = 5, && \vec{u} = \tfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \tfrac{3}{5}\vec{i} + \tfrac{4}{5}\vec{j} \\ &\vec{b} \cdot \vec{u} = 2, && \overrightarrow{OB'} = (\vec{b} \cdot \vec{u})\,\vec{u} = 2\vec{u} = \tfrac{6}{5}\vec{i} + \tfrac{8}{5}\vec{j}, \\ &\vec{b'} = \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{u})\vec{u} = \tfrac{4}{5}\vec{i} - \tfrac{3}{5}\vec{j}. \end{aligned}$$

Izračunajte $\|\overrightarrow{B'B}\|$.

Primjedba 1.9. *Neka je $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini M. Ako su $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ dva linearno nezavisna vektora, onda postoje ortonormirani vektori $\vec{u}, \vec{v} \in X_0(M)$,*

$$\begin{aligned} &\vec{u} = \tfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}, \\ &\vec{v} = \tfrac{\vec{b'}}{\|\vec{b'}\|}, \quad \vec{b'} = \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{u})\,\vec{u}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

pri čemu vrijedi

(i) $\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{u})\,\vec{u}, \qquad \vec{a} \cdot \vec{u} > 0,$

(ii) $\vec{b} = (\vec{b}\cdot\vec{u})\,\vec{u} + (\vec{b}\cdot\vec{v})\,\vec{v}, \qquad \vec{b}\cdot\vec{v} > 0.$

Jednakost (i) slijedi iz (1.18) i činjenice da su $\vec{a}$ i $\vec{u}$ kolinearni vektori jednake orijentacije, pa je $\vec{a}\cdot\vec{u} = \|\vec{a}\|$. Osim toga vrijedi $\vec{a}\cdot\vec{u} = \|\vec{a}\| > 0$ jer $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Jednakost (ii) slijedi iz (1.18) i činjenice da $\vec{b'}$ možemo gledati kao projekciju vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{v}$. Nadalje, nejednakost $\vec{b}\cdot\vec{v} > 0$ slijedi iz (1.18) i

$$\vec{b}\cdot\vec{v} = \tfrac{1}{\|\vec{b'}\|}(\vec{b}\cdot\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{u})(\vec{b}\cdot\vec{u})) \overset{CSB}{>} \tfrac{1}{\|\vec{b'}\|}(\|\vec{b}\|^2 - \|\vec{b}\|^2\|\vec{u}\|^2) = 0,$$

jer su $\vec{b}$ i $\vec{u}$ linearno nezavisni. Istu nejednakost može se pokazati i tako da jednadžbu $\vec{b'} = \vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{u})\,\vec{u}$ pomnožimo s $\vec{b'}$ i iskoristimo činjenicu da je $\vec{b'} \perp \vec{u}$.

Primjer 1.17. *Zadan je pravac p: $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$ i točka T. Odredimo udaljenost točke T do pravca p i projekciju točke T na pravac p.*

Najprije ćemo pravac p napisati u normalnom obliku

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0, \quad \alpha = \tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \beta = \tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \gamma = \tfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Time je ujedno određen jedinični vektor $\vec{u} = -\beta\vec{i} + \alpha\vec{j}$ u smjeru pravca p. Dokažimo ovu tvrdnju. Neka su $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ dvije različite točke na pravcu p. To znači da je

$$\alpha x_i + \beta y_i + \gamma = 0, \quad i = 1, 2.$$

Oduzimanjem ove prve od druge jednadžbe, dobivamo

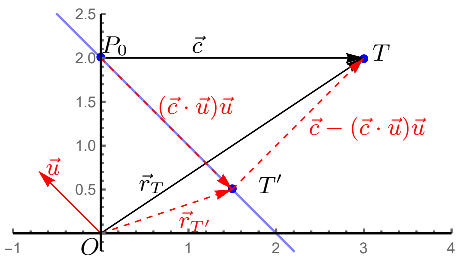
$$\alpha(x_2 - x_1) + \beta(y_2 - y_1) = 0.$$

To znači da je vektor $\vec{n} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ okomit na vektor $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$. Zato je vektor $\vec{u} = -\beta\vec{i} + \alpha\vec{j}$ jedinični vektor u smjeru pravca p.

Nadalje, izaberimo proizvoljnu točku $P_0 = (x_0, y_0)$ na pravcu p tako da za $x_0 \in \mathbb{R}$ odredimo $y_0 = -\frac{(\alpha x_0 + \gamma)}{\beta}$. Označimo $\vec{c} := \vec{r}_T - \vec{r}_{P_0}$ i T' – projekcija točke T na pravac p.

Projekcija vektora $\vec{c}$ na pravac p zadana je s $(\vec{c}\cdot\vec{u})\vec{u}$, a vektor $\overrightarrow{T'T}$ s $\vec{c} - (\vec{c}\cdot\vec{u})\vec{u}$. Zato je udaljenost točke T do pravca p zadana s

$$d(T, p) = \|\overrightarrow{T'T}\|,$$



Slika 1.21: Udaljenost točke do pravca i projekcija točke na pravac.

a projekcija T' točke T na pravac p zadana je radijvektorom

$$\vec{r}_{T'} = \vec{r}_T - \overrightarrow{T'T}.$$

Primjerice za pravac $p : x + y - 2 = 0$ i točku $T = (3, 2)$ dobivamo $\vec{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$. Ako izaberemo $x_0 = 1$, dobivamo točku $P_0 = (1, 1)$ na pravcu i vektor $\vec{c} = \vec{r}_T - \vec{r}_{P_0} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

Zato je $\overrightarrow{T'T} = \vec{c} - (\vec{c}\cdot\vec{u})\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$; $d_2(T, p) = \|\overrightarrow{T'T}\| = \frac{3}{\sqrt{2}}$; $\vec{r}_{T_p} = \vec{r}_T - \overrightarrow{T'T} = \frac{3}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$; $T_p = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. (Može se koristiti modul `Proj[]` iz `UdaljenostiProjekcija.nb`)

1.7.2 Projekcija vektora na ravninu

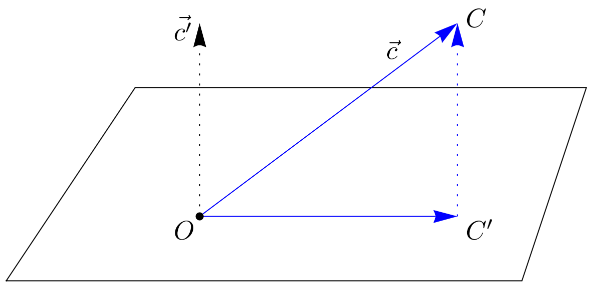
Slično kao u prethodnoj točki, u ravnini M izaberimo fiksnu točku O i dva linearno nezavisna vektora $\vec{a}, \vec{b}$. Time smo u ravnini M uveli koordinatni sustav s baznim vektorima $\vec{a}, \vec{b}$. **Ortogonalnu projekciju** $\overrightarrow{OC'}$ vektora $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ na ravninu M dobit ćemo tako da ortogonalno projiciramo točku C na ravninu M.

Ortogonalnu projekciju $\overrightarrow{OC'}$ vektora $\vec{c}$ prikazat ćemo pomoću vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. U tu svrhu prema *Primjedbi 1.9* od vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ načinit ćemo novu ortonormiranu bazu $\vec{u}$, $\vec{v}$. Vektor $\overrightarrow{OC'}$ prikažimo kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{u}$, $\vec{v}$

$$\overrightarrow{OC'} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

Iz slike se vidi da vrijedi

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{C'C} \quad \text{odnosno} \\ &= \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \overrightarrow{C'C}. \end{aligned} \tag{1.19}$$



Slika 1.22: Projekcija vektora na ravninu

Množeći skalarno ovu jednakost redom s vektorima $\vec{u}$, $\vec{v}$ i koristeći činjenicu da je vektor $\overrightarrow{C'C}$ okomit na vektore $\vec{u}$ i $\vec{v}$, dobivamo

$$\alpha = \vec{c} \cdot \vec{u} \qquad \beta = \vec{c} \cdot \vec{v}.$$

Dakle, ortogonalna projekcija $\overrightarrow{OC'}$ vektora $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ na ravninu M može se odrediti iz formule

$$\overrightarrow{OC'} = (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u} + (\vec{c} \cdot \vec{v})\vec{v}. \tag{1.20}$$

Primijetite da je vektor $\overrightarrow{C'C}$ okomit na ravninu M, a da iz (1.19) slijedi

$$\vec{c'} = \overrightarrow{C'C} = \vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u} - (\vec{c} \cdot \vec{v})\vec{v}. \tag{1.21}$$

Slično kao u prethodnoj točki, ako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ linearno nezavisni vektori, onda vrijedi

(i) $\vec{c'} \neq \vec{0}$,

(ii) $\vec{c'} \perp \vec{u} \quad \& \quad \vec{c'} \perp \vec{v}$,

(iii) $\vec{c'} \cdot \vec{c} > 0$, tj. kut između vektora $\vec{c'}$ i $\vec{c}$ je šiljasti.

U cilju dokaza tvrdnje (iii) množeći (1.21) s $\vec{c'}$, dobivamo

$$\vec{c'} \cdot \vec{c} \overset{(ii)}{=} \|\vec{c'}\|^2 \overset{(i)}{>} 0.$$

Primjer 1.18. *Odredimo ortogonalnu projekciju vektora $\vec{d} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ na ravninu određenu vektorima $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$.*

Dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\|\vec{a}\| = \sqrt{5}, && \vec{u} = \tfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \tfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \tfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}\\
&\vec{b}' = \vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{u})\,\vec{u} = -\tfrac{6}{5}\vec{\imath} + \tfrac{12}{5}\vec{\jmath}\\
&\|\vec{b}'\| = \tfrac{6}{\sqrt{5}}, && \vec{v} = \tfrac{\vec{b}'}{\|\vec{b}'\|} = -\tfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \tfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}\\
&\overrightarrow{OD'} = (\vec{d}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\vec{d}\cdot\vec{v})\vec{v} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}.
\end{aligned}$$

Primjedba 1.10. *Neka je $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ pravokutni koordinatni sustav u prostoru. Na osnovi razmatranja u prethodnoj točki možemo ustanoviti da je za dani skup linearno nezavisnih vektora $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in X_0(E)$ moguće definirati ortonormiranu bazu $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ u X_0, gdje je*

$$\begin{aligned}
&\vec{u} = \tfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|},\\
&\vec{v} = \tfrac{\vec{b}'}{\|\vec{b}'\|}, \quad \vec{b}' = \vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{u})\,\vec{u},\\
&\vec{w} = \tfrac{\vec{c}'}{\|\vec{c}'\|}, \quad \vec{c}' = \vec{c} - (\vec{c}\cdot\vec{u})\vec{u} - (\vec{c}\cdot\vec{v})\vec{v}.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Zbog toga i vektore $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ možemo prikazati u bazi $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, pri čemu su kutevi između vektora $\angle(\vec{a},\vec{u})$, $\angle(\vec{b},\vec{v})$, $\angle(\vec{c},\vec{w})$ šiljasti i vrijedi

$$\begin{aligned}
&\vec{a} = (\vec{a}\cdot\vec{u})\,\vec{u}, && (\vec{a}\cdot\vec{u}) > 0\\
&\vec{b} = (\vec{b}\cdot\vec{u})\,\vec{u} + (\vec{b}\cdot\vec{v})\,\vec{v}, && (\vec{b}\cdot\vec{v}) > 0\\
&\vec{c} = (\vec{c}\cdot\vec{u})\,\vec{u} + (\vec{c}\cdot\vec{v})\,\vec{v} + (\vec{c}\cdot\vec{w})\,\vec{w}, && (\vec{c}\cdot\vec{w}) > 0.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Prva formula u (1.23) *slijedi iz prve formule u* (1.22) *i činjenice da su $\vec{a}$ i $\vec{u}$ kolinearni vektori jednake orijentacije, zbog čega je*

$$(\vec{a}\cdot\vec{u}) = \|\vec{a}\| > 0.$$

Druga formula u (1.23) *slijedi iz druge formule u* (1.22) *i činjenice da je $\vec{b}'$ projekcija vektora $\vec{b}$ na u smjeru vektora $\vec{v}$. Nadalje,*

$$\vec{b}\cdot\vec{v} = \vec{b}'\cdot\vec{v} = \|\vec{b}'\| > 0.$$

Treća formula u (1.23) slijedi iz treće formule u (1.22) i činjenice da je $\vec{c}'$ projekcija vektora $\vec{c}$ u smjeru vektora $\vec{w}$. Osm toga,

$$\vec{c}\cdot\vec{w} = \vec{c}\cdot\tfrac{\vec{c}'}{\|\vec{c}'\|} = \tfrac{1}{\|\vec{c}'\|}\vec{c}\cdot\vec{c}' \overset{(iii)}{>} 0.$$

Drugu mogućnost za dokaz tvrdnje dobivamo iz (1.22)*:*

$$0 < \|\vec{c'}\|^2 = \vec{c}\cdot\vec{c'} = \vec{c}\cdot(\vec{c}\cdot\vec{w})\vec{w} = (\vec{c}\cdot\vec{w})^2$$

U programskom sustavu *Mathematica* načinit ćemo modul $GS[a,b,c]$ koji će prethodno opisanim Gram – Schmidtovim postupkom ortogonalizacije od zadanih linearno nezavisnih vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ sagraditi ortonormirani sustav $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

```
In[1]:= GS[a_, b_, c_]:= Module[{u, v, w},
                         u = a/Norm[a];
                            v = b - (b . u) u; v = v/Norm[v];
                               w = c - (c . u) u - (c . v) v;
                               w = w/Norm[w];
                         {u, v, w}]
```

Tako primjerice za vektore

$$\vec{a} = 2\vec{i}, \quad \vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},$$

modul GS daje

$$\vec{u} = \vec{i}, \quad \vec{v} = \vec{j}, \quad \vec{w} = \vec{k},$$

a za vektore

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \quad \vec{b} = 6\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{c} = 2\vec{j} + 4\vec{k},$$

modul GS daje

$$\vec{u} = \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}, \quad \vec{v} = \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j}, \quad \vec{w} = \vec{k}.$$

1.8 Gram – Schmidtov postupak ortogonalizacije u $\mathbb{R}^n$

Neka je $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ skup linearno nezavisnih vektora. Tada postoje ortonormirani vektori $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
v_1 &= \tfrac{a_1}{\|a_1\|}, \\
v_2 &= \tfrac{v_2'}{\|v_2'\|}, \qquad v_2' = a_2 - \langle a_2, v_1\rangle v_1 \\
v_3 &= \tfrac{v_3'}{\|v_3'\|}, \qquad v_3' = a_3 - \langle a_3, v_1\rangle v_1 - \langle a_3, v_2\rangle v_2 \\
&\ldots \\
v_k &= \tfrac{v_k'}{\|v_k'\|}, \qquad v_k' = a_k - \langle a_k, v_1\rangle v_1 - \cdots - \langle a_k, v_{k-1}\rangle v_{k-1}
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Pri tome vrijedi

$$a_1 = \langle a_1, v_1\rangle v_1, \quad \langle a_1, v_1\rangle > 0 \quad [\text{jer je } \langle a_1, v_1\rangle = \langle a_1, \tfrac{a_1}{\|a_1\|}\rangle = \|a_1\| > 0]$$
$$a_2 = \langle a_2, v_1\rangle v_1 + \langle a_2, v_2\rangle v_2, \quad \langle a_2, v_2\rangle > 0 \quad [\text{jer je } \langle a_2, v_2\rangle = \tfrac{1}{\|v_2'\|}(\langle a_2, a_2\rangle - 0) > 0]$$
$$a_3 = \langle a_3, v_1\rangle v_1 + \langle a_3, v_2\rangle v_2 + \langle a_3, v_3\rangle v_3, \quad \langle a_3, v_3\rangle > 0$$
$$\ldots$$
$$a_k = \langle a_k, v_1\rangle v_1 + \cdots + \langle a_k, v_k\rangle v_k, \quad \langle a_k, v_k\rangle > 0$$

Sljedeći *Mathematica*-program ortonormira $k \le n$ vektora $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$.

```
In[1]:= GSn[A_, eps_] := Module[{v = Table[0, {j, Length[A]}]},
                          v[[1]] = A[[1]]/Norm[A[[1]]];
                          Do[
                              v[[j]] = A[[j]] - Sum[(A[[j]].v[[s]]) v[[s]], {s,j-1}];
                              v[[j]] = v[[j]]/Norm[v[[j]]] // N;
                       , {j, Length[A]}];
                       Round[v, -eps]]                              ]
```

Primjer 1.19. *Za vektore* $a_1 = (6, 7, 7, 2, 6)$, $a_2 = (0, 2, 1, 5, -6)$, $a_3 = (3, 1, 5, 3, -4)$, $a_4 = (-7, 1, -5, 7, -5)$ *primjenom modula* ***GSn*** *odredit ćemo ortonormirane vektore s točnošću na 2 decimale.*

Stavimo $k = 4$; eps=.005; $A = Table[a[[i]], \{i, k\}]$ i dobivamo

`GSn[A,eps]=`

{{0.455, 0.53, 0.53, 0.15, 0.455}, {0.02, 0.27, 0.15, 0.625, -0.72},
{0.355, -0.565, 0.61, -0.275, -0.32}, {-0.575, -0.365, 0.405, 0.495, 0.36}}

Poglavlje 2

Matrice

Definicija 2.1. *Neka je $\mathbf{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ polje, a $m, n \geq 1$ prirodni brojevi. Preslikavanje*

$$A\colon \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbf{F}$$

zovemo ***matrica tipa*** *(m, n), a vrijednost $A(i, j) \in \mathbf{F}$ element (koeficijent) matrice. Element matrice A neki puta ćemo označavati s a_{ij} ili $[A]_{ij}$.*

Uobičajeno je da se skup svih vrijednosti preslikavanja A također zove matrica i označava kao

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \text{ili} \qquad A = [a_{ij}]. \tag{2.1}$$

Skup svih matrica tipa (m, n) označavamo s M_{mn}. Specijalno ako je $m = n$, govorimo o skupu kvadratnih matrica M_n.

Primjer 2.1. *Nul matrica O je matrica čiji su svi elementi jednaki 0;*
Jedinična matrica $I \in M_n$ je kvadratna matrica koja se zapisuje pomoću Kroneckerovog simbola $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & ako\ i = j \\ 0, & ako\ i \neq j \end{cases}$.
Glavnu dijagonalu matrice A čine elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots$;
Dijagonalna matrica je kvadratna matrica $D \in M_n$ kojoj svi elementi izvan glavne dijagonale iščezavaju. Pišemo je kao $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$;
Za matricu U kažemo da je gornjetrokutasta (donjetrokutasta) ako svi njeni elementi ispod (iznad) glavne dijagonale iščezavaju;

A je **simetrična matrica** *ako vrijedi $a_{ij} = a_{ji}$;*
A je **antisimetrična matrica** *ako vrijedi $a_{ij} = -a_{ji}$;*
Matrica koju dobijemo od matrice A zamjenom redaka i stupaca naziva se **transponirana matrica** *i označava s A^T. Za simetričnu matricu A vrijedi $A^T = A$, a za antisimetričnu $A^T = -A$;*
Kažemo da su dvije matrice $A, B \in M_{mn}$ **jednake**, *ako su istog tipa i ako su im svi odgovarajući elementi jednaki $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.*

2.1 Računske operacije

a) **Zbrajanje matrica**
Za dvije matrice $A, B \in M_{mn}$ zbroj $A + B$ je matrica $C \in M_{mn}$ s elementima

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

b) **Množenje matrice sa skalarom**
Za matricu $A \in M_{mn}$ i skalar $\lambda \in \mathbf{F}$ produkt λA je matrica $D \in M_{mn}$ s elementima

$$d_{ij} = \lambda a_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Primjer 2.2. *$(M_{mn}, +, \cdot)$ je vektorski prostor dimenzije $m \cdot n$.*

Zadatak 2.1. Odredite barem jednu bazu u vektorskom prostoru M_{23}.

c) **Množenje matrica**
Kažemo da su matrice $A \in M_{mr}$, $B \in M_{sn}$ ulančane ako je $r = s$. Za dvije ulančane matrice $A \in M_{mr}$, $B \in M_{rn}$ njihov produkt $A \cdot B$ je matrica $C \in M_{mn}$ s elementima

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Primjer 2.3. *Navest ćemo nekoliko primjera koji se najčešće pojavljuju:*

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} =: C;$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 \end{bmatrix} =: C;$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: C.$$

Svojstva.

(a) Množenje matrica općenito nije binarna operacija, ali na skupu kvadratnih matrica M_n množenje matrica $\cdot : M_n \times M_n \to M_n$ je binarna operacija;

(b) Za množenje matrica (ako je izvodivo) općenito ne vrijedi zakon komutacije;

(c) Za svaku matricu $A \in M_{mn}$ i odgovarajuće ulančanu nul-matricu O vrijedi: $A \cdot O = O$ i $O \cdot A = O$;

(d) Za svaku matricu $A \in M_{mn}$ i odgovarajuće ulančanu jediničnu matricu I vrijedi: $A \cdot I = A$ i $I \cdot A = A$.

Teorem 2.1. *Skup svih kvadratnih matrica M_n snabdjeven binarnom operacijom množenja je asocijativna algebra s jedinicom, tj. za sve $A, B, C \in M_n$ i za svaki $\alpha \in \mathbf{F}$ vrijedi:*

(1) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;

(2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

(3) $(\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B) = \alpha(A \cdot B)$;

(4) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;

(5) $I \cdot A = A \cdot I = A$.

Dokaz. Dokazat ćemo samo svojstvo (1). Ostala svojstva dokazuju se analogno.

$$\begin{aligned}[A(B+C)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}[B+C]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \\ &= [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = [AB+AC]_{ij}.\end{aligned}$$

□

Zadatak 2.2. Matematičkom indukcijom pokažite da za kvadratne matrice $A_1, \ldots, A_k \in M_n$ vrijedi

$$(A_1 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdots A_1^T.$$

2.2 Svojstva množenja u algebri M_n

- Moguće je pronaći matrice $A, B \in M_n$, $A, B \neq O$, takve da je $AB = O$. Primjerice, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;
- Za neku matricu $A \in M_n$ moguće je pronaći takvu matricu $B \in M_n$, tako da bude: $AB = BA = I$. Primjerice, za $I \in M_n$, $I \cdot I = I$.

  Navedimo i jedan netrivijalni primjer. Za matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ vrijedi spomenuta jednakost, ali za matricu $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ takva matrica B ne postoji.

Definicija 2.2. *Za matricu $A \in M_n$ kažemo da je* **regularna** *(nesingularna, invertibilna) ako postoji matrica $B \in M_n$ takva da je*

$$AB = BA = I. \tag{2.2}$$

Kažemo da je matrica $C \in M_n$ **singularna** *ako nije regularna.*

Primjerice, jedinična matrica $I \in M_n$ je regularna jer vrijedi $I \cdot I = I$.

Propozicija 2.1. *Za regularnu matricu $A \in M_n$ postoji jedinstvena matrica $B \in M_n$ za koju vrijedi* (2.2).

Dokaz. Dokaz ove tvrdnje provest ćemo kontradikcijom. Pretpostavimo da postoji još jedna matrica $D \in M_n$ takva da vrijedi

$$AD = DA = I.$$

Tada je

$$D = D \cdot I = D \cdot (AB) = (DA)B = I \cdot B = B.$$

□

Budući da sukladno Propoziciji 4.1 za regularnu matricu $A \in M_n$ postoji jedinstvena matrica $B \in M_n$ sa svojstvom (2.2), tu matricu označavat ćemo s $A^{-1} \in M_n$ i zvati inverzna matrica matrice $A \in M_n$. Dakle,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I. \tag{2.3}$$

Skup svih regularnih matrica reda n označit ćemo s GL_n. Skup GL_n nije prazan jer je $I \in GL_n$, ali $GL_n \neq M_n$ jer $O \notin GL_n$.

Sljedeći teorem pokazuje da je skup GL_n snabdjeven binarnom operacijom množenja grupa, koju zovemo [1] opća linearna grupa reda n.

Teorem 2.2.

(1) Produkt dviju regularnih matrica $A, B \in GL_n$ je regularna matrica;

(2) Vrijedi asocijativnost;

(3) Jedinična matrica je u skupu GL_n i za nju vrijedi

$$AI = IA = A, \quad \forall A \in GL_n;$$

(4) Za svaku regularnu matricu $A \in GL_n$ postoji jedinstvena inverzna matrica $A^{-1} \in GL_n$.

Dokaz.

(1) Za dvije regularne matrice $A, B \in GL_n$ njihov produkt AB je također regularna matrica. Naime, lako se može pokazati da je $(AB)^{-1} := B^{-1}A^{-1}$ jer vrijedi:

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I \\ (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I.\end{aligned}$$

(2) Vrijedi asocijativnost na čitavom skupu M_n pa onda i na skupu GL_n. Pri tome za proizvoljne $A, B, C \in GL_n$ i matrice $(AB)C$, $A(BC)$ su regularne.

(3) Jedinična matrica $I \in M_n$ je regularna, a njena inverzna matrica je ponovo I.

(4) Za regularnu matricu $A \in GL_n$ njena inverzna matrica A^{-1} je također regularna i vrijedi $(A^{-1})^{-1} = A$.

□

Zadatak 2.3. Matematičkom indukcijom pokažite da je za regularne matrice $A_1, \ldots, A_k \in GL_n$ njihov produkt također regularna matrica. Što je inverzna matrica matrice $(A_1 \cdots A_k)$?

2.3 Elementarne transformacije nad stupcima i retcima matrice

Uvedimo najprije zapis matrice $A \in M_{mn}$ pomoću njezinih stupaca:

$$A = [a_{ij}] = [a_1, \ldots, a_n], \text{ gdje je } a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \cdots, a_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

ili redaka

$$A = [a_{ij}] = (a^1, \ldots, a^m), \text{ gdje je } a^1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, a^m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn}).$$

Sada možemo stupce (odnosno retke) promatrati kao vektore, ispitivati njihovu linearnu zavisnost i pomoću njih uvesti vektorske prostore:

$$R(A) = L(a_1, \dots, a_n) : \text{vektorski prostor razapet stupcima matrice;}$$
$$R^\star(A) = L(a^1, \dots, a^m) : \text{vektorski prostor razapet retcima matrice.}$$

Definicija 2.3. *Maksimalni broj linearno nezavisnih stupaca matrice zovemo rang matrice po stupcima ($\dim R(A)$), a maksimalni broj linearno nezavisnih redaka matrice zovemo rang matrice po retcima ($\dim R^\star(A)$)*

Rang matrice $A \in M_{mn}$ po stupcima jednak je rangu matrice po retcima i označava se jednostavno s $r(A)$ [1, 6, 7].

* * * * *

Pod elementarnim transformacijama nad stupcima i retcima matrice podrazumijevamo:

(1) Izmjena (permutacija) dvaju stupaca (odnosno redaka) matrice;

(2) Množenje jednog stupca (odnosno retka) matrice brojem $\lambda \neq 0$;

(3) Dodavanje nekom stupcu (odnosno retku) nekog drugog stupca (odnosno retka) prethodno pomnoženog nekim brojem $\lambda \in \mathbb{R}$.

Poopćenje svojstva (3) znači da se nekom stupcu (odnosno retku) dodaje proizvoljna linearna kombinacija ostalih stupaca (odnosno redaka).

Ako uvedemo tzv. elementarne matrice, onda se prethodno spomenute elementarne operacije s matricama mogu formalno zapisati kao množenje matrice s nekom elementarnom matricom.

Definicija 2.4. *Neka je $I = [e_1, \dots, e_n] \in M_n$ jedinična matrica sa stupcima $e_1, \dots, e_n$. Kvadratna matrica $P_{ij} \in M_n$, $i \neq j$ je matrica koja se iz jednične matrice I dobiva permutacijom i-tog i j-tog stupca.*

Ako neku matricu $A \in M_{mn}$ zdesna pomnožimo nekom matricom $P_{ij} \in M_n$, u matrici A zamijenit će mjesta i-ti i j-ti stupac

$$AP_{ij} = A[\cdots e_j \cdots e_i \cdots] = [\cdots Ae_j \cdots Ae_i \cdots] = [\cdots a_j \cdots a_i \cdots].$$

Primjer 2.4. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. *Tada je* $AP_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ *matrica koja je od matrice* A *dobivena zamjenom drugog i trećeg stupca.*

Zadatak 2.4. Kako treba postupiti s matricom $A \in M_{mn}$ da se od nje dobije matrica u kojoj su i-ti i j-ti redak zamijenili mjesta? Ilustrirajte primjerom.

Zadatak 2.5. Koliko ima svih matrica $P_{ij} \in M_n$? Što je P_{ij}^{-1}?

Definicija 2.5. $P_i(\lambda) \in M_n$, $\lambda \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$ *je matrica koja se od jedinične matrice* I *dobije tako da stupac* e_i *pomnožimo brojem* λ

$$P_i(\lambda) = [\cdots \lambda e_i \cdots].$$

Množenjem zdesna matrice $A \in M_{mn}$ matricom $P_i(\lambda) \in M_n$, i-ti stupac matrice A bit će pomnožen brojem λ

$$AP_i(\lambda) = A[\cdots \lambda e_i \cdots] = [\cdots \lambda A e_i \cdots] = [\cdots \lambda a_i \cdots].$$

Primjerice, ako matricu $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \in M_{23}$ zdesna pomnožimo matricom $P_2(\lambda) \in M_3$, dobivamo $AP_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 3 \\ 1 & 2\lambda & -3 \end{bmatrix}$.

Zadatak 2.6. Je li matrica $P_i(\lambda)$ regularna? Ako jest, što je njena inverzna matrica?

Definicija 2.6. $P_i(\lambda; j)$, $i \neq j \in M_n$ *je matrica koja se od jedinične matrice* I *dobije tako da stupcu* e_i *dodamo stupac* e_j *prethodno pomnožen brojem* λ

$$P_i(\lambda; j) = [\cdots e_i + \lambda e_j \cdots e_j \cdots].$$

Množenjem matrice $A \in M_{mn}$ zdesna matricom $P_i(\lambda; j)$, i-tom stupcu matrice A bit će dodan j-ti stupac prethodno pomnožen brojem λ

$$AP_i(\lambda; j) = A[\cdots e_i + \lambda e_j \cdots e_j \cdots] = [\cdots Ae_i + \lambda Ae_j \cdots Ae_j \cdots] = [\cdots a_i + \lambda a_j \cdots a_j \cdots].$$

Primjerice, ako matricu $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \in M_{23}$ zdesna pomnožimo matricom $P_2(\lambda; 3) \in M_3$, dobivamo $AP_2(\lambda; 3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 + 3\lambda & 3 \\ 1 & 2 - 3\lambda & -3 \end{bmatrix}$.

Zadatak 2.7. Je li matrica $P_i(\lambda; j)$ regularna? Ako jest, što je njena inverzna matrica?

Primjedba 2.1. *S Q_{ij}, $Q_i(\lambda)$, $Q_i(\lambda; j)$ redom označimo kvadratne matrice reda m koje se dobiju transponiranjem matrica P_{ij}, $P_i(\lambda)$, $P_i(\lambda; j) \in M_m$. Primijetite da su matrice P_{ij} i $P_i(\lambda)$ simetrične, pa je $Q_{ij} = P_{ij}$ i $Q_i(\lambda) = P_i(\lambda)$. Množenje matrice A zdesna matricama P_{ij}, $P_i(\lambda)$, $P_i(\lambda; j) \in M_n$ odgovara elementarnim transformacijama nad stupcima matrice A, a množenje matrice A slijeva matricama Q_{ij}, $Q_i(\lambda)$, $Q_i(\lambda; j) \in M_m$ odgovara elementarnim transformacijama nad retcima matrice A. Matrice tipa P: P_{ij}, $P_i(\lambda)$, $P_i(\lambda; j)$ i matrice tipa Q: Q_{ij}, $Q_i(\lambda)$, $Q_i(\lambda; j)$ su regularne matrice i zovu se elementarne matrice.*

Definicija 2.7. *Za dvije matrice $A, B \in M_{mn}$ kažemo da su ekvivalentne ako se jedna iz druge dobiva primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija ili preciznije, matrice $A, B \in M_{mn}$ su ekvivalentne ako postoje elementarne matrice $P_1, \ldots, P_r$, $Q_1, \ldots, Q_s$ takve da vrijedi*

$$B = Q_1 \cdots Q_s \cdot A \cdot P_1 \cdots P_r. \tag{2.4}$$

Rangovi dviju ekvivalentnih matrica su jednaki.

Zadatak 2.8. Za matricu $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ odredite matrice $Q_1(-5)A$ i $Q_1(-5; 2)A$.

Zadatak 2.9. Množenjem matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ odgovarajućim elementarnim matricama konstruirajte ekvivalentnu gornjetrokutastu matricu $B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$.

2.4 Praktično određivanje ranga matrice

Kao što smo naveli ranije, retke matrice $A \in M_{mn}$ možemo promatrati kao skup od m vektora, a stupce kao skup od n vektora. Pri tome broj linearno nezavisnih redaka jednak je broju linearno nezavisnih stupaca. Taj broj nazivamo rang matrice A i označavamo s $r(A)$ (vidi Definiciju 2.3).

Množenjem matrice $A \in M_{mn}$ zdesna nekom elementarnom P-matricom ili slijeva nekom elementarnom Q-matricom rang matrice neće se promijeniti. Na taj način elementarnim transformacijama nad retcima i stupcima matricu $A \in M_{mn}$ moguće je svesti na dijagonalnu matricu oblika[1] $A \sim \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0 \ldots, 0)$. Broj jedinica ove dijagonalne matrice odgovara rangu[2] $r(A)$ matrice A. Specijalno, matrica $A \in M_n$ je regularna onda i samo onda ako je $r(A) = n$.

Primjer 2.5. *Sukcesivnom primjenom elementarnih transformacija nad retcima i stupcima matrice dobivamo*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \overset{P_{12}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 11 & 56 & 5 \\ -1 & 2 & 5 & -6 \end{bmatrix} \overset{Q_3(-4;1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 12 & -3 \\ -1 & 2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\overset{Q_4(1;1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 12 & -3 \\ 0 & 4 & 16 & -4 \end{bmatrix} \overset{Q_3(-3;2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 16 & -4 \end{bmatrix} \overset{Q_4(-4;2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nadalje, sukcesivnim primjenama elementarnih transformacija nad stupcima moguće je postići $A \sim$ *diag* $(1, 1, 0, 0)$. *Dakle,* $r(A) = 2$.

Primjer 2.6. *Primjenom elementarnih transformacija nad retcima i stupcima matrice može se pokazati da vrijedi*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -3 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, $r(A) = 3$.

---

[1] U tu svrhu koristite *Mathematica*-program `ElMatrice.nb` http://www.mathos.unios.hr/images/homepages/scitowsk/ElMatrice.nb.

[2] U programskom sustavu *Mathematica* rang matrice A određuje se naredbom `MatrixRank[A]`

Zadatak 2.10. Odredite rang matrice

$$a)\begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}, \quad b)\begin{bmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{bmatrix}, \quad c)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: a) $r = 2$; b) $r = 2$; c) $r = 4$.

Zadatak 2.11. Ispitajte regularnost sljedećih kvadratnih matrica

$$a)\begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad b)\begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad c)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: a) singularna jer je $r = 2$; b) regularna jer je $r = 3$; c) singularna jer je $r = 2$.

2.5 Invertiranje regularne matrice

Teorem 2.3. *Neka je $A \in GL_n$ i $D \in M_n$, Tada se primjenom elementarnih transformacija samo nad retcima blok-matrice $[A; D]$ može se dobiti blok-matrica $[I; R_1]$, gdje su $I, R_1 \in M_n$, tj. postoji elementarne matrice $Q_1, \ldots, Q_r$ takve da je $Q_1, \ldots, Q_r[A; D] = [I; R_1]$.*

Dokaz ovog teorema je konstruktivan (vidi primjerice [7, str. 179]) i nećemo ga navoditi.

Korolar 2.1. *Ako je $A \in GL_n$, onda postoje elementarne matrice $Q_1, \ldots, Q_r$ i elementarne P-matrice $P_1, \ldots, P_s$ takve da je*

$$A = Q_1 \cdots Q_r, \qquad A = P_1 \cdots P_s. \tag{2.5}$$

Dokaz. Za regularnu matricu A^{-1} Teorem 2.3 daje elementarne Q-matrice $Q_1, \ldots, Q_r$ takve da je

$$Q_1 \cdots Q_r A^{-1} = I,$$

odakle slijedi $A = Q_1 \cdots Q_r$.

Specijalno, za matricu A^T postoje elementarne Q-matrice $\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_s$ takve da je $A^T = \tilde{Q}_1 \cdots \tilde{Q}_s$. Transponiranjem dobivamo

$$A = \tilde{Q}_s^T \cdots \tilde{Q}_1^T,$$

što je prikaz matrice A kao produkt elementarnih P-matrica. $\square$

Specijalno, samo primjenom elementarnih transformacija nad retcima blok matrice $[A; I]$, $A \in GL_n$ možemo dobiti blok matricu $[I; R_1]$, što daje matricu $A^{-1} = R_1$. Naime, prema Teoremu 2.3 za regularnu matricu A postoje elementarne Q-matrice $Q_1, \ldots, Q_r$ takve da je

$$Q_1 \cdots Q_r\, [A; I] = [I; R_1],$$

odnosno

$$[Q_1 \cdots Q_r\, A; Q_1 \cdots Q_r\, I] = [I; R_1],$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned} Q_1 \cdots Q_r\, A = I \quad &\& \quad Q_1 \cdots Q_r \cdot I = R_1 \\ \Rightarrow R_1 A = I \quad \Rightarrow \quad &R_1 = A^{-1}. \end{aligned}$$

Primjerice,

$$[A; I] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{Q_{12}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{Q_2(-2;1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & | & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{Q_3(1;1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{Q_{32}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & | & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \overset{Q_3(-4;2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{Q_1(1;2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 & -6 & -4 \end{bmatrix} \overset{Q_3(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \overset{Q_2(-1;3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{Q_1(-1;3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Provjerite da je $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ inverzna matrica matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Zadatak 2.12. Ako postoji, odredite inverznu matricu matrice:

$$a)\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad c)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad d)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Poglavlje 3

Determinanta matrice

3.1 Uvod i motivacija

Promatrajmo sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Koeficijente uz nepoznanice a_{ij} možemo zapisati u obliku tablice, koju nazivamo **matrica sustava** – u ovom slučaju matrica drugog reda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Primijetite da prvi indeks i koeficijenta a_{ij} označava redak matrice (redni broj jednadžbe), a drugi indeks j označava stupac matrice (redni broj nepoznanice) u kome se element nalazi.

Sustav ćemo riješiti metodom suprotnih koeficijenata. Množeći prvu jednadžbu sustava (3.1) brojem a_{22}, a drugu brojem $(-a_{12})$, nakon zbrajanja tako pomnoženih jednadžbi dobivamo

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\, x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \tag{3.2}$$

Ako sada proizvoljnoj matrici A pridružimo broj $\det A$ na sljedeći način

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \tag{3.3}$$

onda (3.2) možemo zapisati

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \text{odnosno} \quad Dx_1 = D_1, \tag{3.4}$$

pri čemu broj $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ zovemo **determinanta sustava**. Pokušajte sami slično dobiti da je

$$Dx_2 = D_2 \qquad \text{gdje je} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \tag{3.5}$$

Uređen par $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ je rješenje sustava (3.1). Iz (3.4) i (3.5) možemo zaključiti:

- ako je $D \neq 0$, sustav (3.1) ima jedinstveno rješenje
$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}; \tag{3.6}$$
- ako je $D = 0$ i $D_1 = D_2 = 0$, sustav je rješiv i ima beskonačno mnogo rješenja;
- ako je $D = 0$, a pri tome barem jedan od brojeva D_1, D_2 različit od nule, sustav nema rješenja.

Zadatak 3.1. Prethodno navedene tvrdnje u literaturi su poznate kao **Cramerovo pravilo**. Pokušajte dati njihovu geometrijsku interpretaciju. Sve ilustrirajte primjerima.

Primjer 3.1. *Primjenom Cramerovog pravila diskutirat ćemo sljedeći sustav jednadžbi u ovisnosti o parametru* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 3x_1 + \lambda x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Dobivamo

$$D = \lambda^2 - 9, \quad D_1 = \lambda - 3, \quad D_2 = \lambda - 3.$$

Prema Cramerovom pravilu sustav ima jedinstveno rješenje $x_1 = x_2 = \frac{1}{\lambda+3}$ za $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, za $\lambda = 3$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja koja leže na pravcu $3x_1 + 3x_2 = 1$, a za $\lambda = -3$ sustav nema rješenja.

Pokazat ćemo da vrijedi i općenitija tvrdnja (vidi Teorem 3.4). Neka je zadan sustav od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k = b_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Neka je nadalje, $A = [a_1, \ldots, a_n]$ matrica čiji su stupci sastavljeni od odgovarajućih koeficijenata uz nepoznanice.

Ako je determinanta matrice A (D=det A) različita od nule, onda, vrijedi:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D},$$

gdje je $D_1 = \det[b, a_2, \ldots, a_n]$, $D_2 = \det[a_1, b, a_3, \ldots, a_n]$, ...

* * * * *

Pod determinantom matrice drugog reda možemo podrazumijevati funkciju koja svakoj kvadratnoj matrici A drugog reda pridružuje realan broj det A definiran s (3.3). Uobičajeno je da se i vrijednost te funkcije također naziva determinanta matrice.

Funkciju $A \mapsto \det A$ definirat ćemo induktivno:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

...

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{1n} \det A_{1n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det A_{1k}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

gdje je A_{1k} kvadratna matrica $(n-1)$-og reda koja se dobiva iz matrice A ispuštanjem prvog retka i k-tog stupca. Posebno za $A = [a]$ definiramo $\det A = a$.

Primjer 3.2. *Na osnovi prethodne definicije dobivamo*

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \\ -4 & -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -90.$$

3.2 Svojstva determinanti

Navedimo osnovna svojstva determinante koja će nam poslužiti u teorijske svrhe, ali i kod praktičnog izračunavanja. Prilikom dokazivanja većine pravila koristit ćemo princip matematičke indukcije. To znači da pravilo najprije treba dokazati za determinantu nižeg (primjerice drugog) reda. Nakon toga uz pretpostavku da pravilo vrijedi za determinantu $(n-1)$-og reda, pravilo ćemo dokazati za determinantu n-tog reda.

Pravilo 1. *Ako svi elementi nekog stupca matrice $A = [a_1, \ldots, a_n] \in M_n$ iščezavaju, onda je $\det A = 0$.*

Dokaz. Tvrdnja se lako dokaže za $n = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za skup matrica M_{n-1}.

Dokažimo tvrdnju za matricu $A \in M_n$. Pretpostavimo da r-ti stupac matrice A iščezava, tj. $a_r = [a_{1r}, \ldots, a_{nr}]^T = 0$. Tada suma $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det A_{1k}$ iz (3.7) iščezava jer je $a_{1r} = 0$, a sve submatrice A_{1k}, $k \neq r$, imaju jedan nul-stupac pa po induktivnoj pretpostavci njihove determinante iščezavaju. Dakle, $\det A = 0$ $\square$

Primjer 3.3. *Na osnovi definicije provjerite da je* $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

Pravilo 2. *Determinanta trokutaste matrice $A \in M_n$ jednaka je produktu dijagonalnih elemenata, tj. $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$.*

Dokaz. Tvrdnja se lako dokaže za $n = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za skup trokutastih matrica M_{n-1}.

Dokažimo tvrdnju za trokutastu matricu $A \in M_n$. Ako je A donjetrokutasta matrica, onda prema (3.7) vrijedi $\det A = a_{11} \det A_{11}$, a kako je $\det A_{11}$ donjetrokutasta determinanta $(n-1)$-og reda, tvrdnja je dokazana.

Ako je A gornjetrokutasta, onda prema Pravilu 1 vrijedi $\det A_{12} = \cdots = \det A_{1n} = 0$ pa je

$$\det A = a_{11} \det A_{11}.$$

Kako je $\det A_{11}$ determinanta gornjetrokutaste matrice $(n-1)$-og reda, po induktivnoj pretpostavci je

$$\det A_{11} = a_{22} \cdots a_{nn},$$

što zajedno s prethodnom jednakošću daje traženu formulu. □

Primjer 3.4. *Vrijedi li:*

$$\begin{aligned} &\det I = 1; && \\ &\det P_{ij} = -1, && \det P_{ij}^T = -1; \\ &\det P_i(\lambda) = \lambda, && \det P_i^T(\lambda) = \lambda; \\ &\det P_i(\lambda; j) = 1, && \det P_i^T(\lambda; j) = 1. \end{aligned}$$

Pravilo 3. *Ako dva stupca determinante zamijene mjesta, determinanta mijenja predznak, tj. ako r-ti i s-ti stupac zamijene mjesta, vrijedi*

$$\det(AP_{rs}) = -\det A. \tag{3.8}$$

Dokaz. Tvrdnja se lako dokaže za $n = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za skup matrica M_{n-1}.

Dokažimo tvrdnju za matricu $A \in M_n$.

Najprije ćemo razmotriti slučaj zamjene dva susjedna stupca a_r, a_{r+1} matrice A. Neka je

$$B = AP_{r,r+1} = [\cdots a_{r+1}, a_r \cdots]$$

Elementi prvog retka nove matrice B su

$$b_{1r} = a_{1,r+1}, \quad b_{1,r+1} = a_{1r}, \qquad b_{1j} = a_{1j} \quad \text{za } j \notin \{r, r+1\}.$$

Pripadne submatrice elemenata b_{1r} i $b_{1,r+1}$ su:

$$B_{1r} = A_{1,r+1}, \quad B_{1,r+1} = A_{1r},$$

a njihove determinante

$$\det B_{1r} = \det A_{1,r+1}, \quad \det B_{1,r+1} = \det A_{1r}.$$

Za $j \notin \{r, r+1\}$ submatrica $B_{1j} \in M_{n-1}$ se od submatrice $A_{1j} \in M_{n-1}$ razlikuje u elementima dva susjedna stupca pa po pretpostavci indukcije vrijedi

$$\det B_{1j} = -\det A_{1j} \quad \text{za } j \notin \{r, r+1\}.$$

Zato prema (3.7) vrijedi

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} b_{1k} \det B_{1k} \\
&= \sum_{k \neq r, r+1}^{n} (-1)^{k-1} b_{1k} \det B_{1k} + (-1)^{r-1} b_{1r} \det B_{1r} + (-1)^{r} b_{1,r+1} \det B_{1,r+1} \\
&= -\sum_{k \neq r, r+1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det A_{1k} + (-1)^{r-1} a_{1,r+1} \det A_{1,r+1} + (-1)^{r} a_{1r} \det A_{1r} \\
&= -\sum_{k \neq r, r+1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det A_{1k} - (-1)^{r-1} a_{1r} \det A_{1r} - (-1)^{r} a_{1,r+1} \det A_{1,r+1} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det A_{1k} = -\det A
\end{aligned}$$

Razmotrimo nadalje slučaj zamjene stupca a_r i a_{r+2} matrice A

$$B = AP_{r,r+2} = [\cdots a_{r+2}, a_{r+1}, a_r \cdots].$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
\det(AP_{r,r+2}) &= \det[\cdots a_{r+2}, a_{r+1}, a_r \cdots] = (-1)^1 [\cdots a_{r+2}, a_r, a_{r+1}, \cdots] \\
&= (-1)^2 [\cdots a_r, a_{r+2}, a_{r+1}, \cdots] = (-1)^3 [\cdots a_r, a_{r+1}, a_{r+2} \cdots] \\
&= -\det A.
\end{aligned}$$

Primijetite da je u ovom slučaju između stupaca koji se zamjenjuju nalazio jedan stupac i da je bilo potrebno provesti $3 = 2 \cdot 1 + 1$ sukcesivnih zamjena.

Ako bi se između stupaca koji se zamjenjuju $\{a_r, a_{r+3}\}$ nalazila dva stupca

$$B = AP_{r,r+3} = [\cdots a_{r+3}, a_{r+1}, a_{r+2}, a_r \cdots],$$

bilo bi potrebno provesti $5 = 2 \cdot 2 + 1$ zamjena pa bismo opet imali traženi rezultat.

Općenito, u slučaju ako se između stupaca koji se zamjenjuju nalazi p stupaca, bilo bi potrebno provesti $2p + 1$ zamjena i opet bismo imali traženi rezultat. □

Primjer 3.5. *Provjerite da vrijedi*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Primjer 3.6. *Budući da se matrica P_{ij} dobije od jedinične matrice I zamjenom i-tog i j-tog stupca, $\mathrm{det} P_{ij} = -1$. Budući da se matrica AP_{ij} dobiva od matrice A zamjenom i-tog i j-tog stupca, vrijedi $\det(AP_{ij}) = -\det A$. Zato formalno možemo pisati*

$$\det(AP_{ij}) = \det A \cdot \det P_{ij},$$

što znači da je u ovom slučaju determinanta produkta jednaka produktu determinanti!

Pravilo 4. *Ako matrica $A \in M_n$ ima dva jednaka stupca, njena determinanta iščezava, tj. $\det A = 0$.*

Dokaz. Dokažimo tvrdnju za matricu $A \in M_n$. Pretpostavimo da su r-ti i s-ti stupac matrice A jednaki. Tada je $A = AP_{rs}$, što prema Pravilu 3 povlači

$$\det A = \det(AP_{rs}) = -\det A \quad \Rightarrow \quad \det A = 0.$$

□

Primjer 3.7. *Na osnovi definicije provjerite da vrijedi* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_1 \\ c_1 & c_2 & c_1 \end{vmatrix} = 0.$

Pravilo 5. *Ako je stupac a_j matrice $A \in M_n$ linearna kombinacija nekih vektora stupaca $b, c \in M_{n1}$, vrijedi svojstvo linearnosti determinante:*

$$\det A = \det[\cdots \lambda b + \mu c \cdots] = \lambda \det[\cdots b \cdots] + \mu \det[\cdots c \cdots]. \tag{3.9}$$

Dokaz. Tvrdnja se lako dokaže za $n = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za skup matrica M_{n-1}.

Dokažimo tvrdnju za matricu $A \in M_n$. Bez smanjenja općenitosti (temeljem Pravila 3) pretpostavimo da je prvi stupac a_1 linearna kombinacija vektora $b, c \in M_{n1}$. Naime, u tom bi slučaju vrijedilo

$$\begin{vmatrix} \lambda b_1 + \mu c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda b_2 + \mu c_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda b_n + \mu c_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ako bi primjerice, treci stupac bio $a_3 = \lambda b + \mu c$, onda bi primjednom Pravila 3 lako pokazali da vrijedi Pravilo 5 i za treći stupac:

$$\begin{aligned} \det A &= -det[a_3\, a_2\, a_1\, a_4 \cdots] = -det[\lambda b + \mu c\, a_2\, a_1\, a_4 \cdots] \\ &= -\lambda\, det[b\, a_2\, a_1\, a_4 \cdots] - \mu\, det[c\, a_2\, a_1\, a_4 \cdots] \\ &= \lambda\, det[a_1\, a_2\, b\, a_4 \cdots] + \mu\, det[a_1\, a_2\, c\, a_4 \cdots]. \end{aligned}$$

Dokažimo zato Pravilo 5 za prvi stupac a_1. S $\tilde{a}_k$ $(k \geq 2)$, označimo k-ti stupac matrice A kome je ispušten prvi element. Slično označimo i $\tilde{b}, \tilde{c}$. Razvojem determinante $\det A$ po elementima prvog retka (definicija (3.7)!)

$$\begin{aligned} \det A = {} & (\lambda b_1 + \mu c_1) \det[\tilde{a}_2 \cdots \tilde{a}_n] \\ & + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \begin{vmatrix} \lambda b_2 + \mu c_2 & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda b_n + \mu c_n & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Kako prema induktivnoj pretpostavci determinantu $(n-1)$-og reda u prethodnoj sumi možemo pisati kao

$$\lambda \det[\tilde{b} \cdots \tilde{a}_{k-1}\tilde{a}_{k+1} \cdots \tilde{a}_n] + \mu \det[\tilde{c} \cdots \tilde{a}_{k-1}\tilde{a}_{k+1} \cdots \tilde{a}_n],$$

imamo

$$\begin{aligned}
\det A = &(\lambda b_1 + \mu c_1) \det[\tilde{a}_2 \cdots \tilde{a}_n] \\
&+\lambda \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det[\tilde{b} \cdots \tilde{a}_{k-1}\tilde{a}_{k+1} \cdots] + \mu \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det[\tilde{c} \cdots \tilde{a}_{k-1}\tilde{a}_{k+1} \cdots] \\
&= \lambda\Big(b_1 \det[\tilde{a}_2 \cdots \tilde{a}_n] + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det[\tilde{b} \cdots \tilde{a}_{k-1}\tilde{a}_{k+1} \cdots]\Big) \\
&+ \mu\Big(c_1 \det[\tilde{a}_2 \cdots \tilde{a}_n] + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det[\tilde{c} \cdots \tilde{a}_{k-1}\tilde{a}_{k+1} \cdots]\Big) \\
&= \lambda \det[b, a_2 \cdots a_n] + \mu \det[c, a_2 \cdots a_n].
\end{aligned}$$

□

Zadatak 3.2. Korištenjem Pravila 5 pokažite da je $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda+1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda.$

Korolar 3.1. *Lako se vidi da vrijedi poopćenje Pravila 5 za slučaj kada je neki stupac linearna kombinacija r stupaca iz M_{n1}:*

$$\det[\cdots \sum_{k=1}^{r} \lambda_k b_k \cdots] = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \det[\cdots b_k \cdots].$$

Kao specijalni slučaj Pravila 5 dobivamo sljedeće pravilo za množenje determinante brojem.

Korolar 3.2. *Determinanta se množi brojem λ tako da bilo koji njezin stupac pomnožimo brojem λ.*

Dokaz.

$$\det[\cdots \lambda a_j \cdots] \overset{P5}{=} \lambda \det[\cdots a_j \cdots] = \lambda \det A.$$

□

Primjer 3.8. *Prema Primjeru 3.4, str.59,* $\det P_j(\lambda)) = \lambda$. *Budući da se matrica* $AP_j(\lambda)$ *dobiva od matrice* A *množenjem* j*-tog stupca s* λ, *vrijedi* $\det(AP_i(\lambda)) = \lambda \det A$. *Zato formalno možemo pisati*

$$\det(AP_i(\lambda)) = \det A \cdot \det P_i(\lambda),$$

što znači da je i u ovom slučaju determinanta produkta jednaka produktu determinanti!

Pravilo 6. *Ako nekom stupcu determinante dodamo linearnu kombinaciju ostalih stupaca, determinanta ne mijenja vrijednost.*

Dokaz. Tvrdnja se lako dokaže za $n = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za skup matrica M_{n-1}.

Dokažimo tvrdnju za matricu $A \in M_n$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da smo prvom stupcu a_1 dodali linearnu kombinaciju ostalih stupaca. Tada korištenjem Pravila 5 i Pravila 4 dobivamo

$$\det[a_1+\sum_{k=2}^{n} \lambda_k a_k, a_2 \cdots a_n] \overset{P5}{=} \det[a_1, a_2 \cdots a_n]+\sum_{k=2}^{n} \lambda_k \det[a_k, a_2 \cdots a_n] \overset{(P4)}{=} \det A.$$

$\square$

Korolar 3.3. *Ako* i*-tom stupcu determinante dodamo* j*-ti stupac prethodno pomnožen brojem* λ, *determinanta ne mijenja vrijednost, tj.*

Dokaz.

$$\det[\cdots a_r+\lambda a_s \cdots a_s \cdots] \overset{P5}{=} \det[\cdots a_r \cdots a_s \cdots]+\lambda \det[\cdots a_s \cdots a_s \cdots] = \det A.$$

$\square$

Primjer 3.9. *Prema Primjeru 3.4, str.59, vrijedi* $\det P_i(\lambda; j) = 1$. *Budući da se matrica* $AP_i(\lambda; j)$ *dobiva od matrice* A *tako da* i*-tom stupcu dodamo* j*-ti stupac prethodno pomnožen brojem* λ, *prema Korolaru 3.3 vrijedi* $\det(AP_i(\lambda; j)) = \det A$. *Zato formalno možemo pisati*

$$\det(AP_i(\lambda; j)) = \det A \cdot \det P_i(\lambda; j),$$

što znači da je i u ovom slučaju determinanta produkta jednaka produktu determinanti!

Zadatak 3.3. U cilju određivanja vrijednosti determinante iz Primjera 3.2, korištenjem Korolara 3.3 matricu svedite na donjetrokutastu i primijenite Pravilo 2.

Pravilo 7. *Ako je neki stupac determinante linearna kombinacija ostalih stupaca, vrijednost determinante jednaka je nuli.*

Dokaz. Tvrdnja se lako dokaže za $n = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za skup matrica M_{n-1}.

Dokažimo tvrdnju za matricu $A \in M_n$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $a_1 = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k a_k$. Korištenjem Korolara 3.1 i Pravila 4 dobivamo:

$$\det[a_1 \cdots a_n] = \det[\sum_{k=2}^{n} \lambda_k a_k, a_2 \cdots a_n] \overset{Cor\ 3.1}{=} \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \det[a_k, a_2 \cdots a_n] \overset{Pr}{=} 0.$$

□

Primjer 3.10. *Dokažimo sljedeću tvrdnju: „Ako su u nekoj determinanti dva stupca linearno zavisna, njena vrijednost jednaka je nuli".*

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su prva dva stupca linearno zavisna, tj. da vrijedi $a_1 = \lambda a_2$. Tada vrijedi:
$\det A = \det[a_1, a_2, \ldots, a_n] = \det[\lambda a_2, a_2, \ldots, a_n] \overset{Cor\ 3.2}{=} \lambda \det[a_2, a_2, \ldots, a_n] \overset{P4}{=} 0.$

Pravilo 8. *Ako je A singularna matrica, onda je $\det A = 0$ i $\det A^T = 0$.*

Dokaz. Ako je A singularna matrica, njeni stupci su linearno zavisni pa je prema Pravilu 7 $\det A = 0$. Također, i retci matrice A (stupci matrice A^T) su linearno zavisni pa je $\det A^T = 0$. □

3.3 Binet-Cauchyjev teorem

Teorem 3.1. (Binet-Cauchy)
Za bilo koje dvije matrice $A, B \in M_n$ vrijedi

$$\det(A\,B) = \det A \cdot \det B.$$

Dokaz. Ako je jedna od matrica $A, B \in M_n$ singularna, tvrdnja vrijedi. Primjerice, ako je B singularna matrica, onda je i $A \cdot B$ singularna, pa je $\det B = 0$ i $\det(A \cdot B) = 0$. Dakle, tvrdnja vrijedi.

Pretpostavimo da je B regularna. Na osnovi Primjera 3.6, 3.8, 3.9 zaključujemo da za svaku matricu $A \in M_n$ i za svaku elementarnu P-matricu, $P \in M_n$, vrijedi

$$\det(A\,P) = \det A \cdot \det P. \tag{3.10}$$

Prema Korolaru 2.1 postoje elementarne P-matrice $P_1, \ldots, P_r$ takve da je $B = P_1 \cdots P_r$. Zato prema (3.10) dobivamo

$$\begin{aligned}
\det B &= \det(P_1 \cdots P_{r-1}) \cdot \det P_r, \\
&\ldots \\
\det B &= \det P_1 \cdots \det P_{r-1} \cdot \det P_r.
\end{aligned}$$

Također prema (3.10) dobivamo

$$\begin{aligned}
\det(A \cdot B) &= \det(A \cdot P_1 \cdots P_{r-1}) \cdot \det P_r, \\
&\ldots \\
\det(A \cdot B) &= \det A \cdot \det P_1 \cdots \det P_{r-1} \cdot \det P_r, \\
&= \det A \cdot \det B.
\end{aligned}$$

□

Teorem 3.2. *Za svaku matricu $A \in M_n$ vrijedi*

$$\det A^T = \det A. \tag{3.11}$$

Dokaz. Tvrdnja očigledno vrijedi za svaku singularnu i svaku simetričnu matricu, pa tako i za elementarne matrice P_{ij} i $P_i(\lambda)$. Tvrdnja vrijedi i za elementarnu matricu $P_i(\lambda; j)$ jer je prema Primjeru 3.9 $\det P_i(\lambda; j) = 1$ i $\det P_i^T(\lambda; j) = 1$. Zato tvrdnja vrijedi za svaku elementarnu P-matricu.

Pretpostavimo da je A regularna matrica. Prema Korolaru 2.1 postoje elementarne P-matrice $P_1, \ldots, P_r$ takve da je $A = P_1 \cdots P_r$, odnosno $A^T = P_r^T \cdots P_1^T$. Na osnovi Teorema 3.1 dobivamo

$$\det A^T = \det P_r^T \cdots \det P_1^T = \det P_r \cdots \det P_1 = \det(P_1 \cdots P_r) = \det A.$$

□

Primjedba 3.1. *Prethodno dokazani Teorem 3.2 pokazuje da sva pravila kod izračunavanja determinanti koja vrijede za stupce matrice A, vrijede i za njezine retke.*

3.4 Izračunavanje vrijednosti determinante

Primjer 3.11. *Promatramo problem polinomijalne interpolacije skupa podataka (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$ (vidi primjerice [5][str. 287], [13][str. 19]). Uz pretpostavku*

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n \tag{3.12}$$

treba odrediti koeficijente polinoma $P_{n-1}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ tako da bude

$$P_{n-1}(x_i) = y_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Geometrijski, to znači da treba pronaći polinom P_{n-1} čiji graf prolazi točkama $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Koeficijente polinoma P_{n-1} mogli bi odrediti iz uvjeta (3.13) *rješavajući sustav od n jednadžbi s n nepoznanica:*

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_{n-1} x_2^{n-1} = y_2 \\ \cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_{n-1} x_n^{n-1} = y_n \end{array} \tag{3.14}$$

Uz uvjet (3.12) *ovaj sustav je uvijek rješiv i ima jedinstveno rješenje (determinanta matrice sustava je poznata* Vandermondova *determinanta, koja je uz uvjet* (3.12) *različita od nule. Izračunajmo vrijednost Vandermondove determinante*

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{3.15}$$

Najprije ćemo od elemenata svakog stupca (osim prvog) oduzeti odgovarajuće elemente prethodnog stupca pomnožene s x_1. Dobivamo

$$V(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & x_2^2(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2-x_1) \\ 1 & x_3-x_1 & x_3(x_3-x_1) & x_3^2(x_3-x_1) & \cdots & x_3^{n-2}(x_3-x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & x_n-x_1 & x_n(x_n-x_1) & x_n^2(x_n-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}.$$

Razvojem po elementima prvog retka i redom u dobivenoj subdeterminanti izlučivanjem faktora $(x_2-x_1),(x_3-x_1),\dots,(x_n-x_1)$ iz drugog, trećeg, … i posljednjeg retka dobivamo

$$V(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}=\prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)V(x_2,\dots,x_n),$$

gdje je $V(x_2,\dots,x_n)$ opet Vandermondova determinanta, ali $(n-1)$-og reda.

Ponavljanjem postupka dobivamo

$$V(x_2,\dots,x_n)=\prod_{i=3}^{n}(x_i-x_2)V(x_3,\dots,x_n),$$

i konačno

$$\begin{aligned} V(x_{n-2},x_{n-1},x_n) &= \prod_{i=n-1}^{n}(x_i-x_{n-2})V(x_{n-1},x_n)=\prod_{i=n-1}^{n}(x_i-x_{n-2})\begin{vmatrix} 1 & x_{n-1} \\ 1 & x_n \end{vmatrix} \\ &= (x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1}). \end{aligned}$$

Konačno dobivamo

$$\begin{aligned} V(x_1,\dots,x_n) &= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1) \\ &\quad\cdot(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2) \\ &\quad\cdots \\ &\quad\cdot(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2}) \\ &\quad\cdot(x_n-x_{n-1})=\prod_{i>k}^{n}(x_i-x_k). \end{aligned}$$

Primjedba 3.2. *Linearnu zavisnost vektora $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}^n$ na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$, na kome je definiran skalarni produkt, možemo ispitati na sljedeći način. Množenjem jednakosti*

$$\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n=0$$

redom vektorima a_k, $k = 1, \ldots, n$ dobivamo sustav linearnih jednadžbi s matricom sustava

$$G(a_1, \ldots, a_n) = \begin{bmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \cdots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \cdots & \langle a_n, a_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Matricu G zovemo Gramova *matrica. Može se pokazati da je skup vektora $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ linearno nezavisan onda i samo onda ako je $\det G \neq 0$. Obrazložite ovu tvrdnju za slučaj $n = 2$, odnosno $n = 3$.*

Zadatak 3.4. Na osnovi *Primjedbe 3.2* ispitajte linearnu zavisnost vektora $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $b = \vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j} \in X_0(E)$.
Rješenje: Budući da je $\det G = 9$, vektori su linearno nezavisni.

3.4.1 Kako izračunati vrijednost determinante n-tog reda

Vrijednost determinante matrice $A \in M_n$ možemo pokušati odrediti primjenom prethodno navedenih pravila. Pri tome izabrat ćemo jedan reprezentant promatrane matrice nižeg reda, ali koji dovoljno dobro predstavlja zadanu matricu $A \in M_n$. Obično postupamo na jedan od sljedećih načina (vidi također [**?**]):

- svođenjem na gornjetrokutastu ili donjetrokutastu matricu;
- primjenom *Pravila 5* determinantu razbijemo na zbroj više determinanti ako očekujemo da će se one moći jednostavnije izračunati;
- primjenom definicije (3.7), str.57 razvijemo determinantu po elementima prvog retka (ili ako prethodno matricu transponiramo, po elementima prvog stupca) i na taj način dobijemo više determinanti nižeg reda ako očekujemo da ćemo na taj način dobiti determinante koje ćemo lakše riješiti.

Primjer 3.12. *Sve ćemo ilustrirati na primjeru determinante n-tog reda iz Zadatka 3.8a pri čemu ćemo se koristiti programskim sustavom* Mathematica. *Matricu, čiju determinantu želimo izračunati, definirat ćemo na sljedeći način:*

```
In[1]:= n = 5; A = Table[a, {i, n}, {j, n}];
        Do[A[[i, i]] = x, {i, n}]
```

Matrica reda $n = 5$ dovoljno dobro reprezentira zadanu matricu. Korištenjem modula iz http://www.mathos.unios.hr/images/homepages/scitowsk/ElMatrice.nb, a uz primjenu elementarnih transformacija, pripadnu matricu A svest ćemo na gornjetrokutastu formu.

Najprije ćemo, primjenom elementarnih transformacija nad retcima matrice svakom retku (osim posljednjeg) dodati redak ispod njega prethodno pomnožen s (-1) (tj. od svakog retka (osim posljednjeg) oduzet ćemo redak ispod njega). Tako dobivamo novu matricu B_1 s pripadnom determinantom

$$B_1 = Q_4(-1;5)\cdot Q_3(-1;4)\cdot Q_2(-1;3)\cdot Q_1(-1;2)\cdot A$$

$$\det A = \det B_1 = \begin{vmatrix} x & a & a & a & a \\ a & x & a & a & a \\ a & a & x & a & a \\ a & a & a & x & a \\ a & a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & a-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-a & a-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & a-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a & a-x \\ a & a & a & a & x \end{vmatrix}.$$

Nakon toga, iz svakog retka (osim posljednjeg) izlučujemo faktor $(x-a)$. Tako dobivamo matricu B_2 s pripadnom determinantom

$$B_2 = Q_4(\tfrac{1}{x-a})\cdot Q_3(\tfrac{1}{x-a})\cdot Q_2(\tfrac{1}{x-a})\cdot Q_1(\tfrac{1}{x-a})\cdot B_1$$

$$\det A = (x-a)^{5-1}\det B_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ a & a & a & a & x \end{vmatrix}.$$

Konačno, sukcesivno i-ti redak (osim posljednjeg) pomnožim s $(-ia)$ i dodamo posljednjem retku. Tako dobivamo matricu B_3 s pripadnom determinantom

$$B_3 = Q_5(-4a;4)\cdot Q_5(-3a;3)\cdot Q_5(-2a;2)\cdot Q_5(-a;1)\cdot B_2$$

$$\det A = (x-a)^{5-1}\det B_3$$

$$=(x-a)^{5-1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2a & a & a & x \end{vmatrix} = \cdots = (x-a)^{5-1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4a+x \end{vmatrix},$$

što konačno, uz primjenu *Pravila 2* (determinanta gornjetrokutaste matrice) daje

$$\det A = (x-a)^{5-1}(x+(5-1)a).$$

Sada možemo pretpostaviti da je determinanta matrice iz Zadatka 3.8a jednaka $\det A = (x-a)^{n-1}(x+(n-1)a)$, a dokaz možemo provesti matematičkom indukcijom.

Zadatak 3.5. Transponiranjem polazne determinante i korištenjem Vandermondove determinante pokažite da vrijedi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & (n+1)^2 \\ & & & \cdots & \\ 1 & 2^n & 3^n & \cdots & (n+1)^n \end{vmatrix} = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdots n!$$

Zadatak 3.6. Odredite vrijednosti determinanti

$$a)\ \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}, \quad b)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \quad c)\ \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

Rješenja: a) 0, b) $(b-a)(c-a)(c-b)$, c) $-2(x^3+y^3)$.

Zadatak 3.7. Odredite vrijednosti determinanti n-tog reda

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ & & & \cdots & \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \ b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ & & & \cdots & & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}, \ c)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ & & & \cdots & \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

Rješenja: a) $n!$, b) $(n-1)!$, c) $-2(n-2)!$.

Zadatak 3.8. Odredite vrijednosti determinanti n-tog reda

$$a)\ \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ & & & \cdots & \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}, \ b)\ \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ & & & \cdots & & \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}, \ c)\ \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

Rješenja: a) $[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$, b) $\frac{1}{2}((x+a)^n + (x-a)^n)$, c) $(-1)^n(n+1)a_1a_2\cdots a_n$.

Zadatak 3.9. Pokažite da vrijedi

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

3.5 Laplaceov razvoj determinante

Definicija 3.1. *Minor (subdeterminanta) elementa a_{ik} matrice $A \in M_n$ je broj*[1]

$$\det A_{ik},$$

a kofaktor (algebarski komplement) elementa a_{ik} matrice $A \in M_n$ je broj

$$(-1)^{i+k} \det A_{ik},$$

gdje je A_{ik} submatrica koja se iz matrice A dobiva ispuštanjem i-tog retka i k-tog stupca.

Teorem 3.3. *Za svaku matricu $A \in M_n$ vrijedi Laplaceov razvoj determinante po elementima i-tog retka*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}, \tag{3.16}$$

i po elementima j-tog stupca

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{kj} \det A_{kj}. \tag{3.17}$$

Dokaz. Pomoću $i-1$ permutacija susjednih redaka matrice A matricu $A = (a^1, \ldots, a^n)$ prevodimo u matricu

$$B = (a^i, a^1, \ldots, a^{i-1}, a^{i+1}, \ldots, a^n).$$

Vrijedi

$$(-1)^{i-1} \det A = \det B = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} b_{1k} \det B_{1k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{ik} \det A_{ik},$$

jer je $b_{1k} = a_{ik}$ i $B_{1k} = A_{ik}$. Množenjem s $(-1)^{i-1}$ dobivamo (3.16) $[(-1)^{i+k-2} = \frac{(-1)^{i+k}}{(-1)^2} = (-1)^{i+k}]$.

Laplaceov razvoj (3.17) dobiva se iz (3.16) i Teorema 3.2. □

---

[1] Prilikom ispitivanja definitnosti kvadratne forme posebnu ulogu imaju glavni minori koji se dobiju izdvajanjem proizvoljnih k redaka i k stupaca matrice (ali tako da su skupovi indeksa odabranih redaka i stupaca identični) i vodeći glavni minori: $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \det(\mathbf{A})$ (vidi [5, str. 284]).

Primjer 3.13. *Laplaceovim razvojem po elementima 2-og retka sljedeće determinante, dobivamo*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-3)\cdot(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Provjerite da bi se isti rezultat dobio ako bi primijenili Laplaceov razvoj determinante po nekom drugom retku ili stupcu.

Primijetite da bi se računanje vrijednosti determinante znatno pojednostavilo kad bi se u nekom retku ili stupcu pojavilo više nula, što možemo postići primjenom spomenutih svojstava. Tako primjerice ako bi u prethodnoj determinanti treći redak dodali prvom retku, determinanta ne bi promijenila vrijednost, ali bi izračunavanje njene vrijednosti razvojem po elementima prvog retka ili drugog stupca bilo puno brže

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \left(\text{odnosno } (-1)\cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \right) = 6.$$

Pravilo 9 Vrijedi poopćenje Teorema 3.3:

[elementi r-tog retka, a algebarski komplementi iz s-tog retka:]

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{s+k} a_{rk} \det A_{sk} = \delta_{rs} \det A, \tag{3.18}$$

[elementi r-tog stupca, a algebarski komplementi iz s-tog stupca:]

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{s+k} a_{kr} \det A_{ks} = \delta_{rs} \det A. \tag{3.19}$$

Dokaz. Pokažimo formulu (3.19) u slučaju $r \neq s$. Neka je C matrica koja se od matrice A dobije tako da njezin r-ti stupac zamijenimo s-tim. Dakle, $c_r = c_s = a_s$, pa je zato $\det C = 0$ (dva jednaka stupca).

S druge strane, iz (3.17) slijedi

$$0 = \det C = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{r+k} c_{kr} \det C_{kr} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{r+k} a_{ks} \det A_{kr},$$

jer je $C_{kr} = A_{kr}$ i $c_{kr} = a_{ks}$. □

Primjedba 3.3. *Kvadratnoj matrici* $A \in M_n$ *možemo pridružiti matricu* $\tilde{A} \in M_n$ *s elementima*

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}. \tag{3.20}$$

Primijetite da elementu $\tilde{a}_{ij}$ *odgovara kofaktor (algebarski komplement) elementa* a_{ji} *matrice* A *(vidi Definiciju 3.1)).*

Jednakost (3.19) *tada možemo zapisati kao*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kr}\tilde{a}_{sk} = \delta_{rs} \det A,$$

odnosno u matričnom obliku kao

$$\tilde{A} \cdot A = \det A \cdot I. \tag{3.21}$$

Korolar 3.4. *Matrica* $A \in M_n$ *je regularna onda i samo onda ako je* $\det A \neq 0$.

Dokaz. Ako je A regularna matrica, postoji A^{-1} takva da je $A \cdot A^{-1} = I$. Prema Binet-Cauchyjevom teoremu je $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, odakle slijedi $\det A \neq 0$.

Obratno, ako je $\det A \neq 0$, iz (3.21) slijedi regularnost. Nakon dijeljenja s $\det A$ dobivamo eksplicitnu formulu za inverznu matricu

$$A^{-1} = \tfrac{1}{\det A}\tilde{A}. \tag{3.22}$$

$\square$

Primjer 3.14. *Ako je* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\det A = ad - bc \neq 0$, *onda je* $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Zadatak 3.10. Primjenom formule (3.22) odredite inverznu matricu matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje: $\det A = -1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

3.6 Cramerova metoda

Sljedeći teorem uvodi poznatu Cramerovu metodu za rješavanje sustava linearnih jednadžbi $Ax = b$, gdje je $A \in GL_n$ regularna matrica. Metoda ima uglavnom teorijski značaj jer pretpostavlja izračunavanje $n+1$ determinanti n-tog reda, a to za nešto veći n može uzeti značajnu količinu vremena rada računala.

Promatramo sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$ koji možemo zapisati kao

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.23}$$

Teorem 3.4. (G. Cramer)
Ako je $A \in GL_n$ regularna matrica, onda je rješenje sustava (3.23) *dano s*

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{3.24}$$

gdje je $D = \det[a_1, \ldots, a_n] = \det A$, a

$$D_1 = \det[b, a_2, \ldots, a_n], \quad D_2 = \det[a_1, b, a_3, \ldots, a_n], \ldots, D_n = \det[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b].$$

Dokaz. Sustav (3.23) možemo zapisati u matričnom obliku kao $Ax = b$. Kako je A regularna matrica postoji njen inverz kojim slijeva pomnožimo jednadžbu i dobivamo rješenje $x = A^{-1}b$. Korištenjem (3.22) dobivamo

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{(\tilde{A} \cdot b)_j}{\det A} = \tfrac{1}{D} \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{jk} b_k \\ &= \tfrac{1}{D} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \det A_{kj} b_k = \tfrac{D_j}{D}, \end{aligned}$$

jer je $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \det A_{kj} b_k$ Laplaceov razvoj po j-tom stupcu determinante dobivene od determinante D zamjenom j-tog stupca vektorom slobodnih koeficijenata b. [Napišite determinantu D_j i napravite njezin razvoj po elementima j-tog stupca] $\square$

Korolar 3.5. *Sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$, $A \in M_n$, ima jedinstveno rješenje onda i samo onda ako je $\det A \neq 0$ (matrica sustava je regularna).*

Specijalno, homogeni sustav $Ax = 0$ ima samo trivijalno rješenje $x_1 = \cdots = x_n = 0$ onda i samo onda ako je $\det A \neq 0$ (matrica sustava je regularna).

Ako je $D = 0$ i $D_1 = \cdots = D_n = 0$, sustav je rješiv i ima beskonačno mnogo rješenja.

Ako je $D = 0$, a pri tome barem jedan od brojeva $D_1, \ldots, D_n$ različit od nule, sustav nema rješenja.

Primjer 3.15. *Primjenom Cramerovog pravila diskutirat ćemo sljedeći sustav jednadžbi u ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= \lambda^2 \end{aligned}$$

Rješenje: *Ako je $(\lambda-1)(\lambda+2) \neq 0$, $x_1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}$, $x_2 = \frac{1}{\lambda+2}$, $x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$. Ako je $\lambda = 1$, sustav ima rješenje koje ovisi o dva parametra. Ako je $\lambda = -2$, sustav nema rješenja.*

Prethodni primjer možemo riješiti i primjenom niže navedenog *Mathematica*-programa.

```
In[1]:=                        (* Unos podataka *)
        A={{lam,1,1}, {1,lam,1}, {1,1,lam}}; b={1,lam,lam^2}; n=Length[A];
        Print["A=", MatrixForm[A], "; b=", MatrixForm[b]];
                                (* Račun *)
        Print["D=", det = Factor[Det[A]]]
        B = Transpose[A];
        Do[
         Dj = Replace[B, Association[{B[[j]] -> b}], 1];
         Print["A", j, "= ", MatrixForm[Transpose[Dj]]];
         Print["D", j, "= ", det1 = Factor[Det[Dj]], "; x", j, "=",
                det1/det // Simplify];
         , {j, n}]
```

Zadatak 3.11. Primjenom Cramerovog pravila riješite sljedeći sustav

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 &= -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Rješenje: $D = -2$, $D_1 = 168$, $D_2 = 93$, $D_3 = -31$, $x_1 = -84$, $x_2 = -\frac{93}{2}$, $x_3 = \frac{31}{2}$.

Zadatak 3.12. Primjenom Cramerovog pravila diskutirajte sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 &= \lambda \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 &= 2\lambda \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Rješenje: $D = \lambda^2(\lambda - 1)$.

Zadatak 3.13. Primjenom Cramerovog pravila diskutirajte sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}
\lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+1)x_3 &= \lambda \\
\lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda-1)x_3 &= \lambda \\
(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (2\lambda+3)x_3 &= 1
\end{aligned}$$

Rješenje: $D = -2\lambda$. Ako je $\lambda \neq 0$, $x_1 = 1 - \lambda$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = 0$. Ako je $\lambda = 0$, $x_1 = 1$, $x_3 = 0$, x_2 proizvoljan.

Cramerovo pravilo može se analogno primijeniti i za rješavanje većih kvadratnih sustava linearnih jednadžbi. Pri tome ova metoda ima samo teorijsku vrijednost jer je njena efikasnost vrlo niska.

Niže navedenim *Mathematica*-programom možemo riješiti sustav linearnih jednadžbi ako je matrica sustava regularna [određeni sustav].

```
In[1]:=                (* Definiranje sustava *)
        SeedRandom[13]; n = 4;
        A=RandomInteger[{-10,10}, {n,n}]; b=RandomInteger[{-10,10},{n}];
        x = Table[0, {i, n}];
        Print["A=", MatrixForm[A], "; b=", MatrixForm[b]];
        If[Det[A] != 0, Print["D= ",det=Det[A]],
            Print["Sustav nije odrđen jer je det A=0"]]
                            (* Račun *)
        B = Transpose[A];
        Do[
         Dj = Replace[B, Association[{B[[j]] -> b}], 1];
         Print["A", j, "= ", MatrixForm[Transpose[Dj]]];
         Print["D",j,"= ",det1=Det[Dj],"; x",j,"=",x[[j]]=det1/det //N];
         , {j, n}]
        Print["Rješenje= ", x]
        Print["Kontrola= ", A.x]
```

Niže navedenim *Mathematica*-programom izračunava se vrijednost velikih determinante čiji su elementi slučajni realni brojevi na intervalu $[0, 100]$ i pri tome se mjeri vrijeme rada računala (tzv. CPU-time).

```
In[1]:=n = 10000;
       A = RandomReal[{0, 100}, {n, n}];
       Timing[Det[A]]

Out[1]={9.95313, -1.980808127726937*10^32434}
```

Poglavlje 4

Sustavi linearnih jednadžbi

Primjer 4.1. *Tri radnika* A, B, C *radeći zajedno obave neki posao za* 10 *dana. Isti posao radnici* A *i* B *obavili bi za* 12 *dana, a radnici* B *i* C *za* 15 *dana. Koliko dana je potrebno svakom radniku da sam obavi cijeli posao?*

Uvedimo oznake:
x: broj dana potreban radniku A da sam obavi cijeli posao;
y: broj dana potreban radniku B da sam obavi cijeli posao;
z: broj dana potreban radniku C da sam obavi cijeli posao;

$$x_1 = \frac{1}{x}, \quad x_2 = \frac{1}{y}, \quad x_3 = \frac{1}{z}.$$

Primjerice, x_1 je dio posla koji radnik A može obaviti za 1 dan. Zato problem možemo postaviti ovako:

$$\begin{array}{ccccccc} 10x_1 & + & 10x_2 & + & 10x_3 & = & 1 \\ 12x_1 & + & 12x_2 & & & = & 1 \\ & & 15x_2 & + & 15x_3 & = & 1 \end{array}$$

Rješenje ovog sustava je: $x_1 = \frac{1}{30}$, $x_2 = \frac{1}{20}$, $x_3 = \frac{1}{60}$, a rješenje postavljenog problema: $x = 30$, $y = 20$, $z = 60$.

Općenito, sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica nad poljem $\mathbb{R}$ je

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\cdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \tag{4.1}$$

Brojevi a_{ij} zovu se koeficijenti sustava, a brojevi b_i slobodni koeficijenti. Koeficijenti sustava mogu također biti i kompleksni brojevi i tada govorimo o sustavu linearnih jednadžbi nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

Definicija 4.1. *Kažemo da je sustav* (4.1) *rješiv ako postoji* $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ *tako da zamjenom*

$$x_1 \leftarrow \xi_1, \ldots, x_n \leftarrow \xi_n,$$

zadovoljavamo sve jednadžbe u (4.1).

Uvodimo sljedeće oznake: matrica sustava, vektor nepoznanica, vektor slobodnih koeficijenata i proširena matrica sustava:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}, \quad A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \cdot & \cdots & \cdot & | & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}.$$

Sustav (4.1) možemo zapisati u matričnom obliku

$$Ax = b. \tag{4.2}$$

U nastavku razmotit ćemo:

- problem egzistencije rješenja sustava (4.1);
- opće rješenje sustava (4.1);
- Gaussovu i Gauss-Jordanovu metodu za rješavanje sustava (4.1).

4.1 Egzistencija rješenja

Direktnom provjerom može se ustanoviti da vrijedi

Propozicija 4.1. *Uređena n-torka* $(\xi_1, \ldots \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ *je rješenje sustava* (4.1) *onda i samo onda ako vrijedi*

$$b = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n,$$

gdje je $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *stupčana reprezentacija matrice* A.

Teorem 4.1. *(Kronecker–Capelli)*
Sustav $Ax = b$ *je rješiv onda i samo onda ako vrijedi*

$$r(A) = r(A_p).$$

Dokaz. Kako je $L(a_1, \dots, a_n)$ potprostor u $L(a_1, \dots, a_n, b)$, vrijedi

$$r(A) \leq r(A_p).$$

Nadalje vrijedi:

$$\begin{aligned} r(A) = r(A_p) &\iff \quad L(a_1, \dots, a_n) = L(a_1, \dots, a_n, b) \\ &\iff \quad b \in L(a_1, \dots, a_n) \\ &\iff \quad \exists\, \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R},\ \text{tako da je } b = \xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n \\ &\overset{Prop. 4.1}{\iff} \quad (\xi_1, \dots, \xi_n) \text{ je rješenje sustava.} \end{aligned}$$

□

4.2 Opće rješenje sustava linearnih jednadžbi

Definicija 4.2. *Kažemo da je sustav* (4.1)*, odnosno* (4.2)*,* homogen *ako vrijedi* $b_1 = \dots = b_m = 0$*, odnosno* $b = 0$ *i pišemo*

$$Ax = 0. \tag{4.3}$$

Propozicija 4.2. *Homogeni sustav* (4.3) *uvijek je rješiv. Skup svih rješenja* Ω *homogenog sustava* (4.3) *je vektorski prostor.*

Dokaz. Homogeni sustav (4.3) uvijek je rješiv jer ima barem trivijalno rješenje $(\xi_1, \dots, \xi_n)^T = (0, \dots, 0)^T$.

Budući da za $u_1, u_2 \in \Omega$ vrijedi $Au_1 = 0$, $Au_2 = 0$, za linearnu kombinaciju $\lambda u_1 + \mu u_2$ vrijedi

$$A(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda A(u_1) + \mu A(u_2) = 0,$$

iz čega slijedi $\lambda u_1 + \mu u_2 \in \Omega$, što prema Korolaru 1.1 znači da je Ω vektorski prostor. □

Propozicija 4.3. *Neka je* $A \in M_{mn}$, $b \in M_{m1}$, x_0 *rješenje sustava* $Ax = b$ *i* Ω *vektorski prostor rješenja pridruženog homogenog sustava* $Ax = 0$ *(fundamentalni skup rješenja).*

Tada je $x_0 + \Omega = \{x_0 + u \colon u \in \Omega\}$ *skup svih rješenja nehomogenog sustava* $Ax = b$.

Dokaz. Kako je $Ax_0 = b$ i $Au = 0$, $\forall u \in \Omega$, vrijedi

$$A(x_0 + u) = Ax_0 + Au = b + 0 = b,$$

iz čega slijedi da je $x_0 + u$ rješenje nehomogenog sustava $Ax = b$.

Obratno, pretpostavimo da je x_1 neko rješenje nehomogenog sustava $Ax = b$. Tada je $Ax_1 = b$. Oduzimanjem jednakosti $\{Ax_0 = b, Ax_1 = b\}$ dobivamo $A(x_1 - x_0) = 0$ iz čega zaključujemo da je $x_1 - x_0$ rješenje pridruženog homogenog sustava, pa postoji $u \in \Omega$ takav da je $u = x_1 - x_0$, odnosno $x_1 = x_0 + u$. $\square$

4.3 Gaussova metoda eliminacije

Razmotrimo sustav[1]

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -4 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \end{array} \tag{4.4}$$

Ako iz prve jednadžbe izrazimo $x_1 = -1 - x_2 - 2x_3$ i uvrstimo u drugu i treću jednadžbu, dobivamo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \\ & - & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \end{array} \tag{4.5}$$

Ako sada iz druge jednadžbe izrazimo $x_2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_3$ i uvrstimo u treću jednadžbu, dobivamo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \\ & & & - & 2x_3 & = & 4 \end{array} \tag{4.6}$$

Ovaj postupak doveo je do gornjetrokutaste forme, a u literaturi je poznat pod nazivom Gaussova metoda eliminacije. Nakon toga, postupkom rješavanja unazad redom dobivamo: $x_3 = -2$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$, odnosno $x = (1, 2, -2) \in \mathbb{R}^3$.

Primijetimo da smo sustav (4.5) mogli dobiti od sustava (4.4) i tako da prvu jednadžbu pomnožimo s (-2) i dodamo drugoj jednadžbi te prvu

[1] U programskom sustavu *Mathematica* modul za rješavanje sustava $Ax = b$ Gaussovom metodom eliminacije je `LinearSolve[A,b]`. Ovaj modul daje partikularno rješenje x_0 sustava $Ax = b$.

jednadžbu pomnožimo s (-4) i dodamo trećoj jednadžbi. Slično, sustav (4.6) mogli smo dobiti od sustava (4.5) i tako da drugu jednadžbu pomnožimo s (-1) i dodamo trećoj jednadžbi. U ovim operacijama prepoznajemo elementarne transformacije.

Formalno, mogli bismo promatrati proširenu matricu A_p, na nju primijeniti elementarne transformacije nad retcima i tako dobiti gornjetrokutastu matricu. Praktično, proširenu matricu A_p slijeva treba množiti odgovarajućim Q-elementarnim matricama:

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 2 & -1 & 2 & | & -4 \\ 4 & 1 & 4 & | & -2 \end{bmatrix} \overset{Q_3(-4;1)\cdot Q_2(-2;1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & -3 & -2 & | & -2 \\ 0 & -3 & -4 & | & 2 \end{bmatrix} \overset{Q_3(-1;2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & -3 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix}.$$

4.3.1 Gauss-Jordanova metoda

Nastavljanjem primjene Q-elementarnih matrica nad retcima posljednje matrice, matrica sustava prelazi u dijagonalnu formu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & -3 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \overset{Q_1(1;3)\cdot Q_2(-1;3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & -3 & 0 & | & -6 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \overset{Q_1(1/3;2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -3 & 0 & | & -6 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix},$$

odakle direktno čitamo vrijednosti nepoznanica: $x_3 = -2$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$.

Zadatak 4.1. Riješite sustav linearnih jednadžbi iz Primjera 4.1.

Zadatak 4.2. Kirchoffovi zakoni.

4.3.2 Traženje općeg rješenja sustava (4.1) Gaussovom metodom eliminacije

Definicija 4.3. *Dva sustava linearnih jednadžbi su* ekvivalentna *ako imaju jednaki broj nepoznanica i isti skup rješenja.*

Primjedba 4.1. *Primijetite da primijenimo konačno mnogo elementarnih transformacija nad jednadžbama sustava* (4.1) *dobivamo sustav koji je ekvivalentan polaznom.*

Primjer 4.2. *Gaussovom metodom eliminacije potražimo opće rješenje niže navedenog sustava.*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & -2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 6x_5 & = & 23 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & = & 12 \end{array}$$

Primjenom elementarnih transformacija nad retcima proširene matrice dobivamo

$$A_p = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array}\right] \overset{Q_4(-5;1)\cdot Q_2(-3;1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{array}\right]$$

$$\overset{Q_2(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{array}\right] \overset{Q_1(-1;2)\cdot Q_3(-1;2)\cdot Q_4(1;2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ako za vrijednost nepoznanice x_3 uzmemo proizvoljni parametar $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, za x_4 parametar $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ i za x_5 parametar $\lambda_3 \in \mathbb{R}$, onda iz zadnje matrice čitamo

$$\begin{aligned} x_1 &= -16 + \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3, \\ x_2 &= 23 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 6\lambda_3. \end{aligned}$$

Zato opće rješenje sustava u skladu s (**??**) možemo zapisati kao

$$x = x_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3,$$

gdje je

$$x_0 = \begin{bmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Primjer 4.3. *Gaussovom metodom eliminacije potražimo opće rješenje niže navedenog sustava.*

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \\ & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \end{array}$$

Opće rješenje sustava u skladu s (**??**) možemo zapisati kao

$$x = x_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2,$$

gdje je

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4.3. Gaussovom metodom eliminacije pokažite da je opće rješenje sustava

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 1 \\ 4x_1 & - & 10x_2 & + & 5x_3 & - & 5x_4 & + & 7x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 14x_2 & + & 7x_3 & - & 7x_4 & + & 11x_5 & = & -1 \end{array}$$

zadano s $x = x_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$, gdje je $x_0 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, 0, 0, 0)^T$, $u_1 = (0, \frac{1}{2}, 1, 0, 0)^T$, $u_2 = (0, -\frac{1}{2}, 0, 1, 0)^T$, $u_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, 0, 0, 1)^T$.

Općenito, ako je $A \in M_{mn}$, $b \in M_{m1}$ i $r(A) = r \leq n$, onda primjenom elementarnih transformacija nad retcima proširene matrice A_p dobivamo ekvivalentnu matricu

$$A'_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & | & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & | & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & | & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} & | & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & | & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & | & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 & | & b'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 & | & b'_m \end{bmatrix}$$

i sustav

$$\begin{array}{cccccccccc} x_1 & & +\cdots+ & & + & a'_{1,r+1}x_{r+1} & +\cdots+ & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ & x_2 & +\cdots+ & & + & a'_{2,r+1}x_{r+1} & +\cdots+ & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ & & & x_r & + & a'_{r,r+1}x_{r+1} & +\cdots+ & a'_{rn}x_n & = & b'_r \\ 0\cdot x_1+ & 0\cdot x_2 & +\cdots+ & 0\cdot x_r & + & 0\cdot x_{r+1} & +\cdots+ & 0\cdot x_n & = & b'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\ 0\cdot x_1+ & 0\cdot x_2 & +\cdots+ & 0\cdot x_r & + & 0\cdot x_{r+1} & +\cdots+ & 0\cdot x_n & = & b'_m \end{array} \tag{4.7}$$

Sukladno Kronecker-Capellijevom teoremu sustav (4.7) je rješiv onda i samo onda ako je

$$b'_{r+1} = \cdots = b'_m = 0. \tag{4.8}$$

Ako je barem jedan od brojeva $b'_{r+1}, \ldots, b'_m$ različit od nule, sustav nema rješenja jer bi u tom slučaju bilo $r(A_p) = r + 1 > r = r(A)$.

Razmotrimo detaljnije slučaj (4.8). U tom slučaju proširena matrica A'_p

postaje

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & | & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & | & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & | & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} & | & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & | & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & | & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 & | & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 & | & 0 \end{bmatrix},$$

odakle odmah dobivamo partikularno rješenje nehomogenog sustava $x_0 = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_r, 0, \ldots, 0)^T$.

U cilju pronalaženja baznih vektora $u_1, \ldots, u_{n-r}$ pripadnog vektorskog prostora Ω, razmotrimo matricu ekvivalentnu odgovarajućoj proširenoj matrici pripadnog homogenog sustava

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & | & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & | & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & | & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} & | & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & | & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & | & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 & | & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Direktnom provjerom može se utvrditi da su vektori

$$u_1 = \begin{bmatrix} -a'_{1,r+1} \\ -a'_{2,r+1} \\ \cdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -a'_{1,r+2} \\ -a'_{2,r+2} \\ \cdots \\ -a'_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad u_{n-r} = \begin{bmatrix} -a'_{1n} \\ -a'_{2n} \\ \cdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

rješenja pripadnog homogenog sustava. Zašto su ovi vektori linearno nezavisni?

Opće rješenje sustava sada možemo zapisati kao (vidi također (**??**))

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i u_i, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Što je opće rješenje homogenog sustava $Ax = 0$, $A \in M_n$, ako je $r(A) = n$?

Zadatak 4.4. Odredite opće rješenje sustava

$$a)\ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \end{array},$$

$$b)\ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 5x_3 & - & 5x_4 & + & 7x_5 & = & 3 \end{array}$$

Rješenje: a) $x = x_0+\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2,\ x_0 = 0,\ \ u_1 = (-\frac{4}{8}, -\frac{4}{8}, \frac{4}{8}, 1, 0)^T,\ u_2 = (\frac{7}{8}, \frac{5}{8}, -\frac{5}{8}, 0, 1)^T,$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

b) $x = x_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3,\ \ x_0 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0)^T,\ \ u_1 = (0, 1, 1, 0, 0)^T,\ \ u_2 = (0, 1, 0, 1, 0)^T,\ \ u_3 = (\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 0, 1)^T,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

4.4 Gaussova metoda kao LU-dekompozicija

Kao što smo pokazali u prethodnoj točki, konačnom primjenom elementarnih transformacija samo nad retcima matrice $A \in M_{mn}$ može se odrediti njoj ekvivalentna gornjetrokutasta matrica. Naravno, slično može se odrediti i njoj ekvivalentna donjetrokutasta matrica.

Nadalje, detaljnije ćemo razmotriti slučaj kvadratne matrice $A \in M_n$. U nekim slučajevima može se odrediti njoj ekvivalentna gornjetrokutasta (donjetrokutasta) matrica konačnom primjenom elementarnih transformacija samo nad retcima matrice $A \in M_n$, a da pri tome ne koristimo izmjenu redaka.

Primjer 4.4. *Navedimo primjer matrice $A \in M_3$ za koju to neće biti moguće*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{Q_2(-1;1)\cdot Q_3(-1;1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nadalje, bez izmjene drugog i trećeg retka nije moguće dobiti gornjetrokutastu matricu.

Zadatak 4.5. Konstruirajte primjer kvadratne matrice koji će pokazati da bez izmjene redaka nije uvijek moguće dobiti ekvivalentnu donjetrokutastu matricu.

Pretpostavimo dakle, da smo kvadratnoj matrici $A \in M_n$ uspjeli odrediti njoj ekvivalentnu gornjetrokutastu matrica $U \in M_n$ konačnom primjenom elementarnih transformacija samo nad retcima te matrice, a da pri tome nismo koristili izmjenu redaka. To znači da postoje Q-elementarne matrice $Q_1, \ldots, Q_r$ takve da je

$$U = Q_r \cdots Q_1 \cdot A. \tag{4.10}$$

Pri tome lako se vidi da se to može postići samo primjenom elementarnih matrica oblika $Q_i(\lambda; j)$ i da je pri tome $i > j$ (neki redak pomnožimo brojem λ i dodamo nekom drugom retku ispod njega). Zato je matrica $Q_i(\lambda; j)$, $i > j$, donjetrokutasta s jedinicama na glavnoj dijagonali. Primijetimo da je i njena inverzna matrica $Q_i(-\lambda; j)$ također donjetrokutasta s jedinicama na glavnoj dijagonali. Zato iz (4.10) dobivamo

$$A = Q_1^{-1} \cdots Q_r^{-1} \cdot U, \tag{4.11}$$

pri čemu su sve matrice $Q_1^{-1}, \ldots, Q_r^{-1}$ donjetrokutaste s jedinicama na glavnoj dijagonali.

Lema 4.1. *Produkt dvije kvadratne gornjetrokutaste (donjetrokutaste) matrice $A, B \in M_n$ je ponovo gornjetrokutasta (donjetrokutasta) matrica.*

Dokaz. Dokažimo lemu za slučaj gornjetrokutastih matrica ($a_{ij} = b_{ij} = 0$ za $i > j$)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Označimo $C := A \cdot B$. Treba pokazati da je $c_{ij} = 0$ za $i > j$. Za $i > j$ dobivamo

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + a_{ii} b_{ij} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Prva suma $\sum\limits_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj}$ iščezava jer je u njoj $k \leq i - 1 < i$ pa su svi a_{ik} u toj sumi jednaki nuli. Drugi član jednak je nuli jer je $i > j$ pa je $b_{ij} = 0$. Konačno, i druga suma $\sum\limits_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ iščezava jer je u njoj $k \geq i + 1 > i > j$ pa je u toj sumi $b_{kj} = 0$. □

Zadatak 4.6. Pokažite da je produkt dviju kvadratnih gornjetrokutastih (donjetrokutastih) matrice $A, B \in M_n$ s jedinicama na glavoj dijagonali ponovo gornjetrokutasta (donjetrokutasta) matrica s jedinicama na glavoj dijagonali.

Primjedba 4.2. *Koristeći Lemu 4.1, odnosno rezultat Zadatka 4.6, zaključujemo da je produkt matrica* $L := Q_1^{-1} \cdots Q_r^{-1}$ *iz* (4.11) *donjetrokutasta matrica s jedinicama na glavnoj dijagonali. Time* (4.11) *prelazi u*

$$A = L \cdot U, \tag{4.12}$$

gdje je L *donjetrokutasta matrica s jedinicama na glavoj dijagonali, a* U *gornjetrokutasta matrica. Rastav* $A = LU$ *nazivamo* **LU-dekompozicija** *matrice* A.

*U općem slučaju može se pokazati (vidi primjerice [**?**]) da postoji (moguće je konstruirati)* LU*-dekompozicija kvadtatne matrice* $A \in M_n$ *ako su svi njezini glavni minori*

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = \det A$$

različiti od nule.

Ako ovaj uvjet nije ispunjen, onda je moguće načiniti LU*-dekompoziciju matrice* PA*, gdje je* P *matrica permutacija redaka (vidi primjerice [1, str.117]).*

Primjer 4.5. *Provjerimo je li* LU*-dekompozicija matrice* A *provediva i ako jest, pronađimo matrice* L *i* U

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Budući da je $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$, $\Delta_3 = \det A = -3$, postupak je provediv.

Dobivamo $U = Q_3(1;2) \cdot Q_3(3;1) \cdot Q_2(-3;1) \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $L = Q_2(3;1) \cdot Q_3(-3;1) \cdot Q_3(-1;2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Provjerite je li $LU = A$.

Zadatak 4.7. Ustanovite je li moguća LU-dekompozicija niže navedenih matrica te ako je moguća, pronađite odgovarajuće matrice L i U.

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: a) LU-dekompozicija ove matrice nije moguća jer je $\Delta_2 = 0$,
b) $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, c) $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 4 & 3/2 & -15/7 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

* * * * *

Razmotrimo ponovo problem rješavanja sustava linearnih jednadžbi

$$Ax = b, \tag{4.13}$$

gdje je $A \in M_n$ kvadratna matrica za koju je moguće provesti LU-dekompoziciju $A = LU$. U tom slučaju sustav (4.13) glasi

$$LUx = b. \tag{4.14}$$

Uz supstituciju

$$Ux = z, \tag{4.15}$$

sustav (4.14) prelazi u donjetrokutasti s jedinicama na glavnoj dijagonali

$$Lz = b. \tag{4.16}$$

Ovaj sustav se lako rješava supstitucijom unaprijed (vidi [13]) počevši s x_1 (Forward Supstitution). Označimo njegovo rješenje sa $z^\star$.

Ako sada vektor slobodnih koeficijenata sustava (4.15) zamijenimo sa $z^\star$, dobivamo gornjetrokutasti sustav koji se lako rješava supstitucijom unazad (vidi [13]) počevši s x_n (Back Supstitution). Označimo njegovo rješenje s $x^\star$.

Primjer 4.6. *Riješimo sustav $Ax = b$, gdje je A matrica iz Zadatka 4.7.b, a vektor slobodnih koeficijenata $b = (5, -2, -1)^T$.*

Najprije supstitucijom unaprijed riješimo donjetrokutast sustav $Lz = b$. Dobivamo $z^\star = (5, 8, -4)^T$. Nakon toga supstitucijom unazad riješimo gornjetrokutast sustav $Ux = z^\star$. Dobivamo $x^\star = (2, -1, 1)^T$.

Zadatak 4.8. Riješite sustav $Ax = b$, gdje je A matrica iz Zadatka 4.7.b, a vektor b jedan od vektora $b_1 = (7, 2, -7)^T$, $b_2 = (0, -4, 4)^T$, $b_3 = (2, -8, -6)^T$.
Rješenje: $x^1 = (3, 4, 4)^T$, $x^2 = (0, -4, -2)^T$, $x^3 = (4, 2, 0)^T$.

Poglavlje 6

Dodatak

Neke važne matematičke pojmove, kao što su „pojam nužno i dovoljno”, „princip kontradikcije” i „univerzalni i egzistencijalni kvantifikator”, a koje ćemo često koristiti, pokušat ćemo objasniti na nekoliko jednostavnih primjera.

6.1 Egzistencijalni i univerzalni kvantifikator

Egzistencijalni kvantifikator ($\exists$) čitamo „postoji barem jedan” ili češće samo „postoji”. Primjerice, činjenicu da postoji prirodan broj $p > 1$ koji dijeli broj 9 pišemo: $(\exists p \in \mathbb{N})\ p|9$.

Univerzalni kvantifikator ($\forall$) čitamo „za svaki” ili češće samo „svaki”. Primjerice, ako s $\mathcal{P}$ označimo skup svih prim-brojeva, a s $\mathcal{Q}$ skup svih složenih brojeva, onda vrijedi $\mathbb{N} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \cup \{1\}$, a činjenicu da je svaki složeni broj $q > 1$ djeljiv s barem jednim prim-brojem pišemo: $(\forall q \in \mathcal{Q})\ (\exists p \in \mathcal{P})\ p|q$.

6.2 Nužni i dovoljni uvjeti

Primjer 6.1. *Iz osnovne škole poznata nam je definicija četverokuta:* Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice.

Što su nužni i dovoljni uvjeti da bi neki četverokut bio kvadrat*?*

Da bi neki četverokut bio kvadrat nužno je da su mu sve četiri stranice jednako dugačke. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i svaki romb kvadrat.

Da bi neki četverokut bio kvadrat nužno je da su mu kutevi pravi. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i svaki pravokutnik kvadrat.

Sustav nužnih i dovoljnih uvjeta da bi neki četverokut bio kvadrat je:

(i) *sve njegove stranice jedanako su dugačke;*

(ii) *svi njegovi kutevi su pravi.*

Zato kažemo:
Četverokut je kvadrat onda i samo onda ako su sve njegove stranice jednako dugačke i ako su svi njegovi kutevi pravi.

Svaki od navedenih uvjeta je „nužan", ali ne i dovoljan. Je li navedeni sustav uvjeta jedini sustav nužnih i dovoljnih uvjeta da bi neki četverokut bio kvadrat? Pokušajete definirati neki drugi sustav nužnih i dovoljnih uvjeta da bi neki četverokut bio kvadrat.

Primjer 6.2. *Iz srednje škole poznata nam je definicija prim-broja (prostog broja):*
Prosti brojevi ili prim-brojevi su svi prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a strogo su veći od broja 1.

Što su nužni i dovoljni uvjeti da bi neki prirodni broj bio prim-broj*?*

Da bi neki prirodni broj bio prim-broj nužno je da je djeljiv bez ostatka s brojem 1. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i broj 8 prim-broj.

Da bi neki prirodni broj bio prim-broj nužno je da je djeljiv bez ostatka sam sa sobom. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i broj 4 prim-broj.

Nužni i dovoljni uvjeti da bi prirodni broj $p \in \mathbb{N}$ bio prim-broj su:

(i) *broj p djeljiv je bez ostatka s 1;*

(ii) *broj p djeljiv je bez ostatka sam sa sobom;*

(iii) *broj p nije djeljiv bez ostatka ni s jednim drugim prirodnim brojem;*

(iv) $p > 1$.

Zato kažemo:
Prirodni broj $p > 1$ je prim-broj onda i samo onda ako je djeljiv samo s 1 i sam sa sobom.

Svaki od navedenih uvjeta je „nužan", ali ne i dovoljan. Je li navedeni sustav uvjeta jedini sustav nužnih i dovoljnih uvjeta koji određuje skup prim-brojeva?

6.3 Princip kontradikcije

Princip kontradikcije zasniva se na Aristotelovom principu isključenja trećeg: „Neka tvrdnja je istinita ili lažna, a treća mogućnost ne postoji".

Primjer 6.3. *U prostoriji se nalazi 400 studenata.*

Tvrdnja T: *Barem dva studenta imaju na isti dan rođendan.*

Tvrdnja $\overline{T}$: *Svi studenti imaju rođendan na različite datume.*

Budući da godina ima 365 (ili eventualno 366) dana, tvrdnja $\overline{T}$ *nije istinita. Zato je prema principu kontradikcije tvrdnja* T *istinita.*

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] N. Elezović, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 1999.

[3] J. S. Golan, *The Linear Algebra a Beginning Graduate Student Ought to Know*, Dordrecht : Kluwer, 2004.

[4] L. Hogben, *Handbook of Linear Algebra*, Boca Raton : Chapman & Hall, 2007.

[5] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2017, `http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=707`.

[6] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1985.

[7] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[8] R. E. Larson, R. P. Hostetler, *Calculus With Analytic Geometry .*, Heath and Company, Lexington : D. C., 1982.

[9] L. Leithold, *The Calculus With Analytic Geometry : Part 1*, Harper & Row, New York, 1976.

[10] S. Lipschitz, *Beginning Linear Algebra*, McGraw Hill, New York, 1997.

[11] H. Neunzert, W. G. Eschmann, A. Blickensdörfer-Ehlers, *Analysis 2. Mit einer Einführung in die Vektor- und Matrizenrechnung*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[12] H. Neunzert, W. G. Eschmann, A. B. ckensdörfer Ehlers, K. Schelkes, *Analysis 1, 2*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[13] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 3, izdanje, 2015, `http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=541`.

[14] R. Scitovski, M. B. Alić, *Grupiranje podataka*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2016, `http://www.mathos.unios.hr/images/homepages/scitowsk/ASP-2016.pdf`.

[15] J. M. Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Mathematical Association of America, 2004.

[16] L. Čaklović, *Zbirka zadataka iz linearne algebre*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[17] E. B. Vinber, *A Course in Algebra*, Providence : American Mathematical Society, 2003.

[18] Š. Ungar, *Ne baš tako kratak Uvod u TEXs naglaskom na pdfLATEX*, Sveučilište u Osijeku, Odjel za matematiku, 2019, `http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=798`.

[19] F. Zhang, *Linear Algebra*, The Johns Hopkins University Press, London, 1996.