

**2. kontrolna zadaća iz Matematike III**

1. [10 bodova] Dopunite sljedeću definiciju:

Neka je  $\Omega$  područje u  $\mathbb{R}^2$ , neka je  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zadana funkcija i neka je  $P_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ .  
Kažemo da funkcija  $f$  ima parcijalnu derivaciju po  $y$  u točki  $P_0$ , ako postoji

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

2. [10 bodova] Neka je  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definirana s  $f(x, y) = \cos(e^{x^3 y^2 + xy})$ . Odredite  
gradijent funkcije  $f$  u točki  $T(1, 1)$ .

3. [10 bodova] Neka je  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definirana s  $u(x, y, z) = x + \frac{x - y}{y - z}$ . Pokažite da je  
 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$ .

4. [10 bodova] Neka je  $\Omega$  područje u  $\mathbb{R}^2$  i  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Diferencijal prvog reda funkcije  $f$   
računa se po formuli

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

5. [10 bodova] Neka je funkcija  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definirana s  $f(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$ , gdje je  
 $x = u^2 \sin 2v$ ,  $y = v^2 \cos 2u$ . Izračunajte  $\frac{\partial f}{\partial u}$  i  $\frac{\partial f}{\partial v}$ .

6. [10 bodova] Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu  $z = \frac{x^2}{2} - y^2$  u točki  
 $T(2, -1, 1)$ .

7. [10 bodova] Dopunite Schwartzov teorem:

Neka je  $\Omega$  područje u  $\mathbb{R}^2$ , neka je  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija klase  $C^2$  na  $\Omega$ . Tada je

$$\partial_i \partial_j f(P) = \partial_j \partial_i f(P) \quad \forall P \in \Omega, \quad i, j = 1, 2.$$

8. [10 bodova] Odredite diferencijal drugog reda funkcije  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definirane s  
 $f(x, y) = \sin^2 x + \cos^2 y$ .

9. [10 bodova] Neka je  $\Omega$  područje u  $\mathbb{R}^2$ . Točka  $A \in \Omega$  je stacionarna točka funkcije  
 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ako je  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$  za  $i = 1, 2$ .

10. [10 bodova] Odredite lokalne ekstreme funkcije  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definirane s  $f(x, y) =$   
 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2$ .