

2. kontrolna zadaća iz Matematike III

1. [10 bodova] Dopunite sljedeću defeniciju:

Neka je Ω područje u \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zadana funkcija i $P_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$. Kažemo da funkcija f ima parcijalnu derivaciju po x u točki P_0 , ako postoji

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

2. [10 bodova] Neka je $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 y^2 + x + y}$. Odredite gradijent funkcije f u točki $T(1, 2)$.

3. [10 bodova] Neka je $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s $u(x, y, z) = \frac{x - z}{x + y} - x + y$. Izračunajte $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z}$.

4. [10 bodova] Neka je Ω područje u \mathbb{R}^2 i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Diferencijal drugog reda funkcije f računa se po formuli

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

5. [10 bodova] Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s $f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2)$, gdje je $x = e^{t^3+2t}$, $y = \ln(3t^2 - 2)$. Izračunajte $\frac{\partial f}{\partial t}$.

6. [10 bodova] Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ u točki $T(2, -1, 1)$.

7. [10 bodova] Dopunite Schwartzov teorem:

Neka je Ω područje u \mathbb{R}^2 i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija _____ na Ω . Tada je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \forall P \in \Omega, \quad i, j = 1, 2.$$

8. [10 bodova] Odredite diferencijal prvog reda funkcije $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definirane s $f(x, y) = \sin^3(2xy^3) + \cos^2(3x^3y^2)$.

9. [10 bodova] Neka je Ω područje u \mathbb{R}^2 . Točka $A \in \Omega$ je stacionarna točka funkcije $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ako je _____ = 0 za $i = 1, 2$.

10. [10 bodova] Odredite lokalne ekstreme funkcije $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definirane s $f(x, y) = (x - 1)^3 + (x - y)^2$.