Odjel za matematiku
23. prosinca 2013.

Prvi kolokvij iz Numeričke linearne algebre

1. [**20 bodova**]

   a) Definirajte pozitivno semidefinitne matrice.

   b) Neka je A pozitivno semidefinitna matrica. Dokažite da je tada i matrica A^k pozitivno semidefinitna za svaki $k \in \mathbb{N}$.

2. [**20 bodova**] Dokažite da ako je $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, onda je

$$\|D\|_p = \max_i |d_i|, \quad 1 \le p \le \infty,$$

i odredite $\kappa_p(D)$.

3 [**20 bodova**] Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

   a) Za matricu A odredite LU faktorizaciju s djelomičnim pivotiranjem.

   b) Odredite $|\det A|$ pomoću matrica L, P i U.

4. [**20 bodova**]

   a) Koristeći svojstva Householderovih matrica, za opće Householderove matrice $H_1, H_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ odredite $|\det(H_1 H_2)|$, $\|H_1 H_2\|_F$ i $\|H_1 H_2\|_2$.

   b) Odredite Householderovu matricu H_1 koja poništava 3. i 4. komponentu vektora $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$, pri čemu 1. i 5. komponenta ostaju nepromijenjene, te Householderovu matricu H_2 koja poništava samo 2. komponentu vektora x.

5. [**20 bodova**] Neka je $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 26 \\ 12 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

   a) Odredite matricu R iz QR- faktorizacije matrice A.

   b) Koristeći algoritam za rješavanje sustava linearnih jednadžbi pomoću QR-faktorizacije, riješite sustav $Ax = b$ ako je $b = [35, 5, 0]^T$.