Vježbe - Slučajni procesi
I. dio

Uvod

Definicija 1.

Slučajni proces $\{X_t,\ t \in T\}$ *je familija slučajnih varijabli na istom vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, pri čemu je* t *element parametarskog skupa ili skupa indeksa* $T \subseteq \mathbb{R}$.

Napomena 1.

Skup vrijednosti koje može poprimiti svaka slučajna varijabla X_t *naziva se* ***skup stanja*** *slučajnog procesa* $\{X_t,\ t \in T\}$ *i označava sa* S, $S \subseteq \mathbb{R}$. *Elemente skupa* S *nazivamo stanjima slučajnog procesa* $\{X_t,\ t \in T\}$. *S obzirom na skup* S*, razlikujemo sljedeće kategorije slučajnih procesa:*

- *ako je* S *diskretan skup, govorimo o slučajnom procesu sa diskretnim skupom stanja,*
- *ako* S *nije diskretan skup, npr. ako je* $S = \mathbb{R}$ *ili je* S *interval realnih brojeva, govorimo o slučajnom procesu sa neprekidnim skupom stanja.*

Napomena 2.

Elementi skupa indeksa $T \subseteq \mathbb{R}$ *najčešće se interpretiraju kao vremenski trenuci. S obzirom na skup indeksa* T, *razlikujemo sljedeće kategorije slučajnih procesa:*

- *ako je* T *diskretan skup, npr.* $T = \mathbb{Z}$, $T = \mathbb{N}$ *ili* $T = \mathbb{N}_0$, *govorimo o slučajnom procesu u diskretnom vremenu,*
- *ako* T *nije diskretan skup, npr. ako je* $T = [a, b\rangle$, $-\infty < a < b \leq \infty$, *ili* $T = \mathbb{R}$, *govorimo o slučajnom procesu u neprekidnom vremenu.*

Napomena 3.

Slučajni proces $X = \{X_t,\ t \in T\}$ *sa skupom stanja* $S \subseteq \mathbb{R}$ *definiran na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *možemo shvatiti kao funkciju dviju varijabli:*

$$X \colon T \times \Omega \to S.$$

- *Ako fiksiramo* $t \in T$, *tada promatramo funkciju*

  $$\omega \mapsto X_t(\omega) = X(\omega, t),$$

  definiranu na Ω, *tj. slučajnu varijablu na* Ω *koja opisuje realizaciju slučajnog procesa u fiksiranom trenutku* t.
- *Ako fiksiramo* $\omega \in \Omega$, *tada promatramo funkciju*

  $$t \mapsto X_t(\omega) = X(\omega, t)$$

  definiranu na skupu indeksa T *koja opisuje evoluciju procesa tijekom vremena za fiksirani* $\omega \in \Omega$.

Definicija 2.

*Funkciju koja za fiksirani $\omega \in \Omega$ svakom elementu $t \in T$ pridružuje realizaciju $X_t(\omega)$ nazivamo **trajektorijom** (engl. sample path) slučajnog procesa $\{X_t,\ t \in T\}$.*

Definicija 3.

***Konačnodimenzionalne distribucije slučajnog procesa** $\{X_t,\ t \in T\}$ su distribucije konačnodimenzionalnih slučajnih vektora $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, za sve moguće izbore $t_1, \dots, t_n \in T$ i svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Zadaci

Zadatak 1.

Neka su $X_1, X_2, \dots$ *međusobno nezavisne Bernoullijeve slučajne varijable, tj.*

$$X_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad p \in \langle 0, 1\rangle, \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Familija $\{X_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ *zove se Bernoullijev proces.*

a) *Odredite skup stanja i skup indeksa Bernoullijevog procesa.*
b) *Simulirajte i skicirajte jednu trajektoriju Bernoullijevog procesa.*
c) *Odredite vjerojatnost pojavljivanja dijela trajektorije koju ste simulirali u zadatku b).*

Zadatak 2.

Neka su $Z_1, Z_2, \dots$ nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable s distribucijom

$$Z_t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad p \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Ako slučajne varijable $X_0, X_1, \dots$ definiramo sa

$$X_0 = 0, \quad X_t = \sum_{i=1}^{t} Z_i, \quad t \in \mathbb{N},$$

tada je familija slučajnih varijabli $\{X_t,\ t \in \mathbb{N}_0\}$ slučajni proces kojeg zovemo ***jednostavna slučajna šetnja****.*

a) *Odredite skup stanja i skup indeksa jednostavne slučajne šetnje.*
b) *Simulirajte i skicirajte jednu trajektoriju simetrične jednostavne slučajne šetnje ($p = 1/2$).*
c) *Odredite jednodimenzionalnu distribuciju jednostavne slučajne šetnje, tj. odredite $P(X_t = k)$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Zadatak 3.

Neka je $\{X_t,\ t \in \mathbb{N}_0\}$ *jednostavna slučajna šetnja. Slučajni proces* $\{X_\tau, \tau \in T\}$ *je familija slučajnih varijabli* X_τ *definiranih na sljedeći način:*

$$X_\tau = X_t, \quad \tau \in [t, t+1\rangle.$$

a) *Odredite skup stanja i skup indeksa slučajnog procesa* $\{X_\tau, \tau \in T\}$.

b) *Koristeći trajektoriju jednostavne slučajne šetnje simuliranu u zadatku 2. b) skicirajte trajektoriju slučajnog procesa* $\{X_\tau, \tau \in T\}$.

Zadatak 4.

Promotrimo slučajni proces $\{X_t,\ t \in T\} = \{Y \cos(kt),\ t \geq 0\}$ *gdje je* $k \in \mathbb{R}$, *a* Y *uniformna slučajna varijabla na intervalu* $\langle 0, 1 \rangle$.

a) *Odredite skup stanja i skup indeksa slučajnog procesa* $\{X_t,\ t \in T\}$.

b) *Odredite jednodimenzionalnu distribuciju slučajnog procesa slučajnog procesa* $\{X_t,\ t \in T\}$.

Funkcije izvodnice vjerojatnosti

Definicija 4.

Neka je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u skupu $\mathbb{N}_0$ i neka je njen zakon razdiobe zadan na sljedeći način:

$$p_k = P(X = k), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Funkcija izvodnica vjerojatnosti slučajne varijable X je funkcija G definirana sa

$$G_X(s) = E\left[s^X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$$

za one $s \in \mathbb{R}$ za koje je $E\left[|s^X|\right] = \sum_{k=0}^{\infty} |s^k| p_k < \infty$.

Napomena 4.

Budući je $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ *zaključujemo da za* $|s| \leq 1$ *red iz prethodne definicije apsolutno konvergira. Specijalno, vrijedi sljedeće:*

- $G_X(0) = p_0 = P(X = 0)$,
- $G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

Napomena 5.

Zbog apsolutne konvergencije red $\sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$ *za* $|s| \leq 1$ *možemo derivirati član po član proizvoljno mnogo puta. Time dobivamo:*

$$G_X^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)p_n s^{n-k}.$$

Uvrštavanjem $s = 0$ *u gornju* k*-tu derivaciju slijedi:*

$$p_k = \frac{1}{k!} \cdot G^{(k)}(0).$$

Teorem 1.

Neka je X slučajna varijabla s funkcijom izvodnicom vjerojatnosti $G_X(s)$. Tada vrijedi:

- $E[X] = G'_X(1)$,
- $E[X(X-1)\dots(X-k+1)] = G_X^{(k)}(1)$.
- $\mathrm{Var}(X) = G''_X(1) + E[X] - (E[X])^2$.

Teorem 2.

Neka su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne slučajne varijable koje poprimaju nenegativne cjelobrojne vrijednosti te neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Tada vrijedi:

$$G_{S_n}(s) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(s).$$

Teorem 3.

Neka su $\forall n \in \mathbb{N}$ *cjelobrojne slučajne varijable* $Z, X_1, \ldots, X_n$ *nezavisne i neka su* X_k*,* $k \in \mathbb{N}$ *jednako distribuirane. Stavimo:*

$$S_0 = 0,\; S_Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_Z = \sum_{k=1}^{Z} X_k.$$

Tada vrijedi:

$$G_{S_Z}(s) = G_Z[G_{X_1}(s)].$$

Jednostavni proces granjanja (Galton-Watsonov proces)

- Populacija nekih jedinki započinje u trenutku $n = 0$ i sastoji se od jedne jedinke koju nazivamo predak - dakle, predak čini nultu generaciju promatrane populacije.
- U trenutku $n = 1$ predak rađa neki broj potomaka, a sam nestaje iz populacije - broj potomaka koji čine prvu generaciju promatrane populacije modeliramo distribucijom

$$\mathcal{Z} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}.$$

- U trenutku $n \in \mathbb{N}$ svaka jedinka iz $(n-1)$-ve generacije rađa neki broj potomaka koji modeliramo distribucijom $\mathcal{Z}$ - svi potomci svih jedinki iz $(n-1)$-ve generacije čine n-tu generaciju promatrane populacije.

- Formalno, neka su $\{Z_{n,j}, n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\}$ nezavisne jednako distribuirane po distribuciji $\mathcal{Z}$ - broj potomaka j-te jedinke nastale u $(n-1)$-oj generaciji
- Ako sa X_n, $n \in \mathbb{N}_0$, označimo slučajnu varijablu kojom je modeliran broj jedinki koje čine n-tu generaciju promatrane populacije, onda je $(X_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ slučajni proces sa skupom stanja $S = \mathbb{N}_0$ i skupom indeksa $T = \mathbb{N}_0$ - **jednostavan proces grananja** ili **Galton-Watsonov proces**, pri čemu je:

$$\begin{aligned} X_0 &= 1 \\ X_1 &= Z_{1,1} \\ X_2 &= \sum_{k=1}^{X_1} Z_{2,k} \\ X_3 &= \sum_{k=1}^{X_2} Z_{3,k} \\ &\vdots \\ X_n &= \sum_{k=1}^{X_{n-1}} Z_{n,k} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Napomena 6.

Neka je $(X_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ *jednostavan proces grananja te neka je* $G(s)$ *funkcija izvodnica vjerojatnosti slučajne varijable* X_1*, a* $G_n(s)$ *funkcija izvodnica vjerojatnosti slučajne varijable* X_n*,* $n \in \{2, 3, \ldots\}$*. Tada vrijedi:*

$$G_n(s) = G_{n-1}(G(s)) = G(G_{n-1}(s)).$$

Zadaci

Zadatak 5.

U jednostavnom procesu grananja slučajnom varijablom X_n, $n \in \mathbb{N}$, modeliran je broj jedinki u n-toj generaciji promatrane populacije. Neka je $E[X_1] = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$, te neka je $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$, $\sigma^2 > 0$. Pokažite da je $E[X_n] = \mu^n$ te da je

$$\mathrm{Var}(X_n) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2(\mu^n - 1)\mu^{n-1}}{\mu - 1} & , \quad \mu \neq 1 \\ n\sigma^2 & , \quad \mu = 1 \end{cases}.$$

Zadatak 6.

Neka je u Bernoullijevom pokusu vjerojatnost realizacije uspjeha jednaka p, $p \in \langle 0, 1 \rangle$. *Slučajna varijabla* X *kojom je modeliran broj neuspjeha prije prvog pojavljivanja uspjeha pri nezavisnom ponavljanju Bernoullijevog pokusa je geometrijska slučajna varijabla s parametrom* p *i zadana je zakonom razdiobe*

$$P(X = k) = (1-p)^k p, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Pokažite da je

$$G_X(s) = \frac{p}{1 - s(1-p)}$$

funkcija izvodnica vjerojatnosti ove slučajne varijable.

Zadatak 7.

Pretpostavimo da u jednostavnom procesu grananja slučajna varijabla X_1 *ima geometrijsku distribuciju s parametrom* $p = \frac{1}{2}$*. Pokažite da u tom slučaju promatrana populacija gotovo sigurno izumire, tj. da je*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n = 0\}\right) = 1.$$

Brownovo gibanje (Wienerov proces)

Definicija 5.

*Slučajni proces $\{X_t,\ t \geq 0\}$ naziva se **standardno Brownovo gibanje** ili **Wienerov proces** ako vrijedi:*

(i) *za $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ su prirasti $X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ međusobno nezavisne slučajne varijable,*

(ii) $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, $0 \leq s < t < \infty$,

(iii) $P(X_0 = 0) = 1$.

Napomena 7.

Svojstvo (i) - Brownovo gibanje je slučajni proces s nezavisnim prirastima.
Svojstvo (ii) - Brownovo gibanje je slučajni proces sa stacionarnim prirastima.
Iz svojstva (ii) slijedi da je $X_t \sim \mathcal{N}(0, t)$.

- Ekvivalentna definicija:

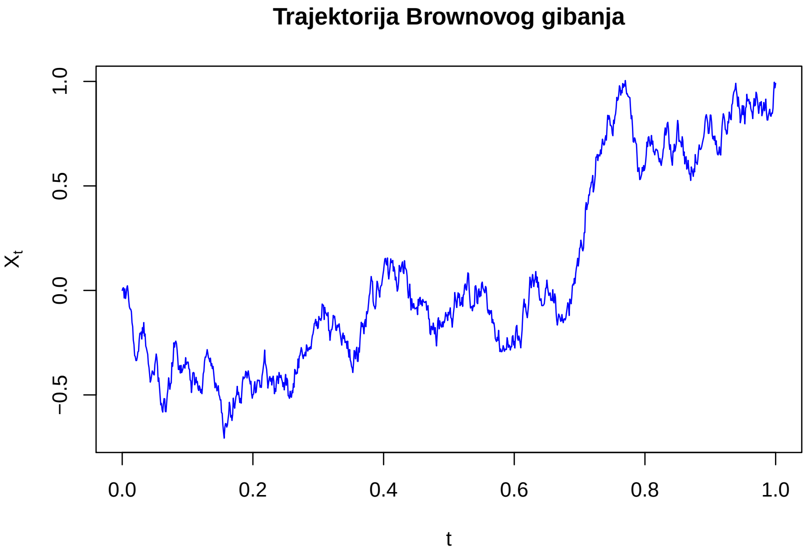
Definicija 6.

Slučajni proces $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *naziva se* ***standardno Brownovo gibanje*** *ili* ***Wienerov proces*** *ako vrijedi:*

(i) $\{X_t\}$ *je Gaussov proces,*

(ii) $EX_s = 0,\ \forall s$ *i* $EX_sX_t = \min\{s, t\}$,

(iii) *g.s., trajektorije* $t \mapsto X_t$ *su neprekidne.*


Trajektorija Brownovog gibanja
1.0
0.5
0.0
−0.5
X_t
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t

Zadaci

Zadatak 8.

Pokažite da nezavisnost prirasta i svojstvo $X_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ povlači stacionarnost prirasta, tj.

$$X_{t+s} - X_t \stackrel{d}{=} X_s.$$

Zadatak 9.

Slučajni proces čije su sve konačnodimenzionalne distribucije višedimenzionalne Gaussove distribucije naziva se Gaussov proces. Pokažite da je Brownovo gibanje Gaussov proces.

Zadatak 10.

Provjerite je li geometrijsko Brownovo gibanje

$$(e^{\mu t+\sigma X_t},\, t \geq 0), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma < 0,$$

Gaussov proces.

Poissonov proces

Definicija 7.

Slučajni proces $\{N_t,\ t \geq 0\}$ *je Poissonov proces s intenzitetom* $\lambda > 0$ *ako vrijedi:*

(i) $N_0 = 0$,

(ii) *proces* $\{N_t,\ t \geq 0\}$ *ima nezavisne priraste,*

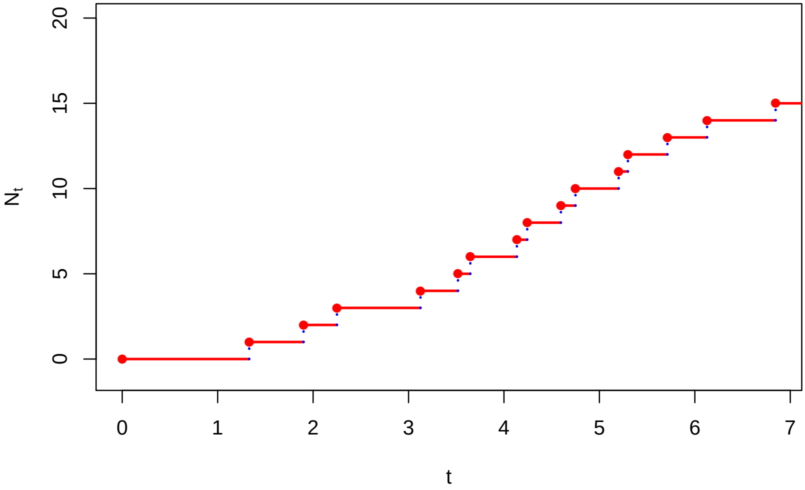
(iii) *broj događaja u bilo kojem intervalu duljine* t *modeliran je slučajnom varijablom* N_t *koja ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem* λt, *tj. za sve* $s, t > 0$ *vrijedi:*

$$P(N_{s+t} - N_s = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Napomena 8.

Vrijednost slučajne varijable N_t interpretiramo kao broj realizacija promatranog događaja u svakom vremenskom intervalu duljine t (npr. broj klijenata banke koji su stali u red od početka promatranja pa sve do trenutka t). Uočimo da treće svojstvo iz definicije znači da Poissonov proces ima stacionarne priraste.

Trajektorija Poissonovog procesa $\lambda = 2$



Definicija 8.

Ako je $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h} = 0$, *tada kažemo da je* $f(h) = o(h)$ *za* $h \to 0$.

Definicija 9.

Slučajni proces $\{N_t,\ t \geq 0\}$ *je Poissonov proces s intenzitetom* $\lambda > 0$ *ako vrijedi:*

(i) $N_0 = 0$,

(ii) *proces* $\{N_t,\ t \geq 0\}$ *ima nezavisne i stacionarne priraste,*

(iii) $P(N_t \geq 2) = o(t),\ t \to 0$,

(iv) $P(N_t = 1) = \lambda t + o(t),\ t \to 0$.

Napomena 9.

Ove dvije definicije Poissonovog procesa su ekvivalentne (pogledati predavanja).

Zadaci

Zadatak 11 (Međudolazna vremena).

Neka je $\{N_t,\ t \geq 0\}$ *Poissonov proces s intenzitetom* $\lambda > 0$. *Promotrimo slučajni proces* $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, *tj. niz slučajnih varijabli kojima modeliramo vrijeme proteklo između* $(n-1)$*-ve i* n*-te realizacije promatranog događaja. Pokažite da su slučajne varijable* X_n *nezavisne i eksponencijalno distribuirane s parametrom* λ.

Zadatak 12 (Dolazna vremena).

Slučajnom varijablom

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad i \in \mathbb{N},$$

modelirano je vrijeme čekanja do n-te realizacije promatranog događaja. Pokažite da slučajna varijabla S_n ima gamma distribuciju s parametrima $n \in \mathbb{N}$ i $\lambda > 0$, tj. da je

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\, e^{-\lambda t}\, t^{n-1}\, \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t).$$

Zadatak 13.

Pretpostavimo da ulazak inozemnih turista u zemlju u zračnoj luci možemo modelirati Poissonovim procesom s dnevnim intenzitetom $\lambda = 5$.

a) *Odredito očekivano vrijeme čekanja (u danima) do ulaska desetog turista u zemlju.*
b) *Izračunajte vjerojatnost da vremenski interval između ulaska desetog i jedanaestog turista u zemlju bude dulji od jednog dana.*

Zadatak 14.

Pretpostavimo da dolazak klijenata u banku možemo modelirati Poissonovim procesom $\{N(t),\, t \geq 0\}$ *s intenzitetom* $\lambda > 0$*. Neka je pri tome vjerojatnost da je klijent žena jednaka* $p \in \langle 0, 1 \rangle$*, a vjerojatnost da je klijent muškarac jednaka* $(1-p)$*. S* $N_t^{(1)}$ *označimo slučajnu varijablu kojom je modeliran broj žena, a s* $N_t^{(2)}$ *slučajnu varijablu kojom je modeliran broj muškaraca koji su ušli u banku do trenutka* t*. Broj klijenata u banci u trenutku* $t > 0$ *modeliran je slučajnom varijablom* $N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$*. Pokažite da su* $\{N_t^{(1)},\, t \geq 0\}$ *i* $\{N_t^{(2)},\, t \geq 0\}$ *nezavisni Poissonovi procesi s intenzitetima* $\lambda^{(1)} = \lambda p$ *i* $\lambda^{(2)} = \lambda(1-p)$*, redom.*

Zadatak 15.

Broj imigranata u neku razvijenu zemlju na tjednoj bazi možemo modelirati Poissonovim procesom $\{N_t,\, t \geq 0\}$ *s intenzitetom* $\lambda = 10$*. Poznato je da je vjerojatnost da je imigrant mlađi od 20 godina jednaka* $1/12$*. Odredite vjerojatnost da tijekom 28-dnevnog razdoblja u promatranu zemlju ne imigrira nitko mlađi od dvadeset godina.*

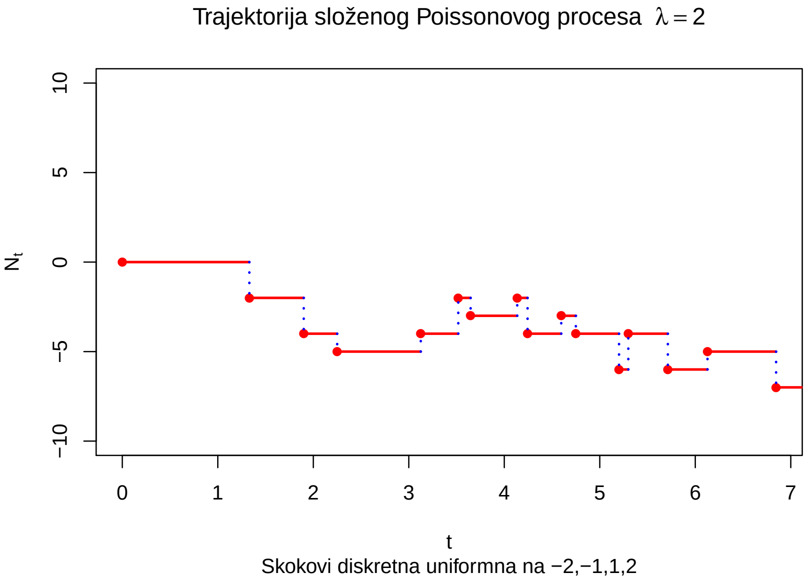
Složeni Poissonov proces

Definicija 10.

Složeni Poissonov proces je slučajni proces $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *gdje je*

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \geq 0,$$

gdje je $\{N_t,\ t \geq 0\}$ *Poissonov proces s intenzitetom* $\lambda > 0$, *a* $\{Y_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *familija nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli nezavisna od Poissonovog procesa* $\{N_t,\ t \geq 0\}$.


Trajektorija složenog Poissonovog procesa λ = 2
N_t
10
5
0
−5
−10
0
1
2
3
4
5
6
7
t
Skokovi diskretna uniformna na −2,−1,1,2

Zadatak 16.

Pretpostavimo da migracije cijelih obitelji u određeno područje na tjednoj bazi možemo modelirati Poissonovim procesom s intenzitetom $\lambda = 2$. Neka je broj članova svake obitelji modeliran nezavisnim slučajnim varijablama s distribucijom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Odredite očekivanje slučajne varijable kojom je modeliran broj migranata u promatrano područje na kraju petotjednog razdoblja.

Nehomogeni Poissonov proces

Definicija 11.

Slučajni proces $\{N_t,\ t \geq 0\}$ je nehomogeni Poissonov proces s funkcijom intenziteta $\lambda(t), t \geq 0$ ako vrijedi:

(i) $N_0 = 0$,

(ii) *proces $\{N_t,\ t \geq 0\}$ ima nezavisne priraste,*

(iii) *za $0 \leq s < t$ je*

$$N_t - N_s \sim \mathcal{P}\left(\int_s^t \lambda(u)du\right).$$

Napomena 10.

Ako je $\lambda(t) = \lambda$ onda dobijemo standardni (homogeni) Poissonov proces. Nehomogeni Poissonov proces nema stacionarne priraste.

Zadatak 17.

Trgovina se otvara ujutro u 8 sati i zatvara u 17 sati. Od 8 do 11 kupci dolaze u prosjeku s intenzitetom koji linearno raste od 5 kupaca po satu u 8 ujutro do 20 kupaca po satu u 11 sati. Od 11 do 13 sati intenzitet je konstantan i jednak 20 kupaca po satu. Od 13 do 17 sati intenzitet linearno pada i u 17 sati je jednak 12 kupaca po satu. Pretpostavimo da je broj kupaca u disjunktnim vremenskim periodima nezavisan.

a) *Kolika je vjerojatnost da nema kupaca od 8:30 do 9:30?*

b) *Koji je očekivani broj kupaca u periodu od 10 do 12 sati?*

Zadatak 18.

Igrate sljedeću igru: loptice ispadaju iz kutije po Poissonovom procesu s intezitetom 6 *loptica po minuti i tako sve do kraja pete minute* $(5:00)$ *kada igra završava. Cilj igre je pogoditi koja je loptica posljednja na osnovu jednog pokušaja. Preciznije, u trenutku kad loptica ispadne iz kutije možete reći "Posljednja!" ili šutjeti. Za trajanja igre imate pravo samo jednom reći "Posljednja!". Ako nakon toga više ne ispadne niti jedna loptica, pobijedili ste. Ako nakon toga ispadne još loptica, izgubili ste. Ako igra istekne i niste ni jednom rekli "Posljednja!", onda ste izgubili.*
Strategija je sljedeća: reći ćete "Posljednja!" u trenutku kad iz kutije ispadne prva loptica nakon trenutka s.

(a) *Odredite vjerojatnost pobjede u igri ako je* $s = 4:30$.
(b) *Odredite* s *tako da vjerojatnost uspjeha bude maksimalna i odredite tu vjerojatnost.*
(c) *Ako je prva loptica ispala iz kutije u* 15*-toj sekundi, kolika je vjerojatnost da druga ne ispadne do* 35*-te sekunde.*
(d) *Ako pretpostavimo da loptice mogu biti crvene i crne, te da su crvene dvostruko vjerojatnije, definirajte slučajni proces koji broji crvene loptice i odredite vjerojatnost da u prvoj minuti ne ispadne niti jedna crvena loptica.*
(e) *Opet pretpostavimo da su loptice crvene i crne, te da su crvene dvostruko vjerojatnije. Neka su dodatno na lopticama ispisane vrijednosti* $1, 2, 3$, *svi jednako vjerojatni. Crne loptice nose duple bodova od ispisane vrijednosti. Odredite proces koji broji bodove i izračunajte očekivani broj bodova u* 5 *minuta.*