Vježbe - Slučajni procesi
II. dio

Slučajni procesi sa stacionarnim nezavisnim prirastima

Definicija 1.

Ako su slučajne varijable

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

nezavisne za svaki izbor $t_1, \ldots, t_n \in T$ *takvih da je* $t_1 < \ldots < t_n$, *kažemo da je familija slučajnih varijabli* $\{X_t,\ t \in T\}$ ***slučajni proces s nezavisnim prirastima***. *Ako postoji* $t_0 = \min T$, *tada pretpostavljamo da su slučajne varijable*

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

nezavisne.

Definicija 2.

Slučajni proces $\{X_t,\ t \in T\}$ je ***slučajni proces sa stacionarnim prirastima*** *ako vrijedi*

$$X_t - X_s =^d X_{t+h} - X_{s+h},$$

za sve $s, t \in T, s < t$ i sve h takve da je $t + h, s + h \in T$.
Drugim riječima, distribucija slučajne varijable $X_{t+h} - X_t$ ovisi samo o duljini vremenskog pomaka h i ne ovisi o $t \in T$.

Napomena 1.

Slučajni procesi sa stacionarnim nezavisnim prirastima predstavljaju generalizaciju slučajne šetnje na neprekidno vrijeme.
Neka je $X_0 = 0$ g.s. i $\{X_t, t \in [0, \infty)\}$ slučajni proces sa stacionarnim nezavisnim prirastima. Uočimo da je slučajni proces $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ slučajna šetnja

$$X_n = X_1 - X_0 + X_2 - X_1 + \cdots + X_n - X_{n-1}.$$

Zadaci

Zadatak 1.

Neka je $\{X_t,\ t \in [0,\infty)\}$ slučajni proces sa stacionarnim nezavisnim prirastima te neka je $X_0 = 0$. Uz pretpostavku da je $E[X_t^2] < \infty$ pokažite da je:

a) $E[X_t] = \mu_1 t$, *gdje je* $\mu_1 = E[X_1]$,

b) $\mathrm{Var}\,(X_t) = \sigma_1^2 t$, *gdje je* $\sigma_1^2 = \mathrm{Var}\,(X_1)$,

c) $\mathrm{Var}\,(X_t - X_s) = \sigma_1^2 (t-s)$, *gdje je* $t > s$, *a* $\sigma_1^2 = \mathrm{Var}\,(X_1)$,

d) $\mathrm{Cov}\,(X_t, X_s) = \sigma_1^2 \min(s,t)$, *gdje je* $\sigma_1^2 = \mathrm{Var}\,(X_1)$.

Zadatak 2.

(a) *Neka je* $\{Y_t, t \in [0, \infty)\}$ *slučajni proces na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *takav da vrijedi*

$$Y_{t+s} - Y_t \overset{d}{=} Y_s, \quad \forall s, t \in [0, \infty).$$

Pokažite da tada mora biti $Y_0 = 0$ P*-g.s.*

(b) *Neka je* $\{B_t, t \in [0, \infty)\}$ *standardno Brownovo gibanje i* $\{N_t, t \in [0, \infty)\}$ *Poissonov proces koji su međusobno nezavisni. Pokažite da slučajni proces* $\{X_t, t \in [0, \infty)\}$ *definiran s*

$$X_t = B_t + N_t, \ \ t \in [0, \infty),$$

ima stacionarne i nezavisne priraste. Je li $\{X_t\}$ *stacionaran u širem smislu? Je li stacionaran u užem smislu?*

Strogo i slabo stacionarni slučajni procesi

Definicija 3.

Slučajni proces $\{X_t, t \in T\}$ *je* ***stacionaran u užem smislu*** *(****strogo stacionaran****) ako su mu konačnodimenzionalne distribucije invarijantne na vremenske pomake, tj.*

$$(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}),$$

za svaki $h > 0$ *i proizvoljne* $t_1, \dots, t_n \in T$.

Definicija 4.

Za slučajni proces $X = \{X_t, t \in T\}$ *t.d. je* $E[X_t^2] < \infty$ *definiramo sljedeće funkcije:*

- *funkciju očekivanja slučajnog procesa:*

$$\mu_X : T \to \mathbb{R}, \quad \mu_X(t) = E[X_t],$$

- *funkciju autokovarijanci slučajnog procesa:*

$$R_{X,X} : T \times T \to \mathbb{R},$$

$$R_{X,X}(t,s) = \mathrm{Cov}\,(X_t, X_s) = E\left[(X_t - \mu_X(t))(X_s - \mu_X(s))\right],$$

- *autokorelacijsku funkciju slučajnog procesa:*

$$\rho_{X,X} : T \times T \to \mathbb{R},$$

$$\rho_{X,X}(t,s) = \frac{R_{X,X}(t,s)}{\sqrt{R_{X,X}(t,t)\, R_{X,X}(s,s)}}.$$

Definicija 5.

Slučajni proces $\{X_t, t \in T\}$ *je* ***stacionaran u širem smislu (slabo stacionaran***) *ako vrijedi:*

(i) $E[X_t^2] < \infty$, *za sve* $t \in T$,

(ii) $\mu_X(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$, *za sve* $t \in T$,

(iii) $R_{X,X}(t, t+h)$ *ovisi samo o* h *za sve* $t, h \in T$.

Napomena 2.

Slučajni proces koji je stacionaran u užem smislu i ima konačne sve druge momente je stacionaran i u širem smislu.

Napomena 3.

Za slučajne procese stacionarne u širem smislu zbog invarijantnosti funkcije kovarijanci na vremenske pomake (svojstvo (iii) iz definicije) možemo definirati funkciju $R_X : T \to \mathbb{R}$,

$$R_X(h) = R_{X,X}(0, h).$$

Tako za pomak $h = -t$ *i* $s > t$ *slijedi:*

$$R_{X,X}(t+h, s+h) = R_{X,X}(0, s-t) = R_X(s-t), \quad \forall s, t \in T.$$

Zadaci

Zadatak 3.

Neka je $\{X_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ slučajni proces takav da za nezavisne jednako distribuirane slučajne vektore $Z_t = (X_{2t-1}, X_{2t})$ vrijedi:

$$Z_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma), \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho \in \langle -1, 1 \rangle, \quad \rho \neq 0.$$

Je li proces $\{X_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ stacionaran u užem smislu?

Zadatak 4.

Neka je $\{X_t,\ t \in T\} = \{a\cos(\omega t + \theta),\ t \in T\}$, *gdje je* $T \subset \mathbb{R}$, $a, \omega \in \mathbb{R}$ *i* $\theta \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$, *slučajni proces u kojemu su slučajne varijable* X_t, $t \in T$, *međusobno nezavisne. Pokažite da je slučajni proces* $\{X_t,\ t \in T\}$ *stacionaran u širem smislu.*

Zadatak 5.

Provjerite je li slučajni proces $\{X_t,\ t \in T\} = \{a \sin(\omega t + \theta),\ t \in T\}$, *gdje je* $T \subset \mathbb{R}$, $a, \omega \in \mathbb{R}$ *i* $\theta \sim \mathcal{U}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, *stacionaran u širem smislu.*

Zadatak 6.

Neka je $\{X_t,\ t \in [0,\infty)\} = \{U\cos(\omega t) + V\sin(\omega t),\ t \in [0,\infty)\}$, *slučajni proces gdje je* $\omega \in \mathbb{R}$ *fiksna konstanta, a* U *i* V *slučajne varijable takve da je* $E[U] = E[V] = 0$ *i* $E[U^2] < \infty, E[V^2] < \infty$.
Pokažite da je proces $\{X_t\}$ *stacionaran u širem smislu ako i samo ako su* U *i* V *nekorelirane slučajne varijable s jednakim varijancama, tj.*

$$E[UV] = 0, \quad E[U^2] = E[V^2] = \sigma^2.$$