Vježbe - Slučajni procesi
III. dio

Uvjetno očekivanje

- Želimo proširiti pojam uvjetnog očekivanja i uvjetne vjerojatnsoti.
- Poznate definicije
- Ovdje ćemo definirati

  $$E[X|\mathcal{F}]$$

  za slučajnu varijablu X i neku σ-algebru $\mathcal{F}$

σ-algebra

Definicija 1.

Familiju $\mathcal{F}$ podskupova nekog nepraznog skupa Ω naziva σ-algebra ako je

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(iii) $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

- Za bilo koju familiju $\mathcal{C}$ podskupova od Ω postoji $\sigma(\mathcal{C})$ najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{C}$.

Zadaci

Zadatak 1.

(a) *Neka je* $\Omega \neq \emptyset$. *Odredite* $\sigma(\mathcal{C})$ *za*

$$\mathcal{C} = \emptyset;$$

$$\mathcal{C} = \{A\};$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{P}(\Omega).$$

(b) *Neka je* $\Omega = \{1,2,3\}$. *Odredite* $\sigma(\mathcal{C})$ *za za* $\mathcal{C} = \{\{1\},\{1,2\}\}$.

σ-algebra generirana slučajnom varijablom

- σ-algebra generirana funkcijom $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je familija

$$\sigma(X) = \{\{X \in B\} : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\},$$

  gdje je $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ Borelova σ-algebra i

$$\{X \in B\} = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}.$$

- Uočimo da je to najmanja σ-algebra uz koju je X izmjeriva (dakle, slučajna varijabla).
- Ako je $\mathcal{F}$ σ-algebra ona je X $\mathcal{F}$-izmjeriva ako i samo ako

$$\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}.$$

- Za proizvoljnu familiju $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ funkcija definiramo

$$\sigma(X_\lambda, \lambda \in \Lambda) = \sigma\left(\{X_\lambda \in B\} : \lambda \in \Lambda, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\right).$$

Zadaci

Zadatak 2.

Odredite σ-algebre generirane sljedećim slučajnim varijablama na $(\Omega, \mathcal{F})$:

(a) $X(\omega) = c, \forall \omega \in \Omega$ *za neki* $c \in \mathbb{R}$.

(b) X *diskretna slučajna varijabla sa slikom* $\{y_1, \ldots, y_n\}, y_i \in \mathbb{R}$.

(c) $\Omega = [0, 1], \mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ *i* $X(\omega) = \omega, \omega \in \Omega$.

Interpretacija

- U kontekstu vjerojatnosnih modela, na σ-algebru $\mathcal{F}$ gledamo kao na skup informacija.
- $\sigma(X)$ - informacije o slučajnoj varijabli X.
- $\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$ - informacija o Y je sadržana u $\mathcal{F}$.
- $\sigma(X_1) \subseteq \sigma(X_2)$ - X_2 sadrži više informacija od X_1.

Uvjetno očekivanje u odnosu na σ-algebru

Definicija 2.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ vjerojatnosni prostor, X slučajna varijabla na njemu, $E|X| < \infty$ i $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_0$.
Slučajna varijabla Z je uvjetno očekivanje od X uz danu $\mathcal{F}$ ako vrijedi

(i) *Z je $\mathcal{F}$-izmjeriva, tj. $\sigma(Z) \subseteq \mathcal{F}$,*

(ii) *za sve $A \in \mathcal{F}$ vrijedi*

$$E\left[Z\mathbf{1}_A\right] = E\left[X\mathbf{1}_A\right].$$

Pišemo $Z = E[X|\mathcal{F}]$.

- $E[X|\mathcal{F}]$ - najbolje što možemo reći o X na osnovu informacije iz $\mathcal{F}$.
- Dodatno definiramo

$$E[X|Y] = E[X|\sigma(Y)],$$

$$P(A|\mathcal{F}) = E[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}].$$

Zadaci

Zadatak 3.

Uvjetno očekivanje je jedinstveno g.s.

Zadatak 4.

Pretpostavimo da su sva uvjetna očekivanja dobro definirana (u smislu $E|X| < \infty$) i $\mathcal{F}$ σ-algebra. Svojstva uvjetnog očekivanja:

1. *za X_1, X_2 slučajne varijable i $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*

$$E[c_1X_1 + c_2X_2|\mathcal{F}] = c_1E[X_1|\mathcal{F}] + c_2E[X_2|\mathcal{F}],$$

2.

$$E[E[X|\mathcal{F}]] = E[X],$$

3. *Ako je X $\mathcal{F}$-izmjeriva tada je $E[X|\mathcal{F}] = X$*
4. *Ako su X i $\mathcal{F}$ nezavisne (u smislu $P(\{X \in B\} \cap A) = P(\{X \in B\})P(A)$ za sve $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ i $A \in \mathcal{F}$), tada je*

$$E[X|\mathcal{F}] = E[X],$$

5. *Ako je X $\mathcal{F}$-izmjeriva i $E|Y| < \infty, E|XY| < \infty$, onda*

$$E[XY|\mathcal{F}] = XE[Y|\mathcal{F}].$$

6. *Ako su $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ σ-algebre i $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ onda*

$$E[E[X|\mathcal{F}_1]|\mathcal{F}_2] = E[X|\mathcal{F}_1],$$

$$E[E[X|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1] = E[X|\mathcal{F}_1].$$

Zadatak 5.

Ako je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *izmjeriva i* $E|g(X)| < \infty$ *izračunajte* $E[g(X)|X]$.

Zadatak 6.

Neka je X slučajna varijabla i Y diskretna slučajna varijabla s vrijednostima $\{y_1, \dots, y_n\}$, obje na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada je

$$E[X|Y](\omega) = \frac{E[X\mathbf{1}_{\{Y=y_i\}}]}{P(Y=y_i)}, \text{ za } \omega \in \{Y = y_i\}.$$

Zadatak 7.

Neka su X i Y nezavisne Bernoullijeve slučajne varijable s parametrom p, $Z = \mathbf{1}_{\{X+Y=0\}}$ i $\mathcal{F} = \sigma(Z)$. Izračunajte $E[X|\mathcal{F}]$ i $E[Y|\mathcal{F}]$. Jesu li one nezavisne?

Filtracije

- Za teoriju slučajnih procesa, pogodno je proširiti klasičnu strukturu $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ objektom koji opisuje informacije o ponašanju procesa kroz vrijeme.

Definicija 3.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Familiju σ-algebri $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ takvih da je $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ i $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ za sve n nazivamo filtracija.
U neprekidnom vremenu promatramo filtracije $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, za koje je $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ i $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ za $s \leq t$.

Definicija 4.

Za slučajan proces $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ kažemo da je adaptiran na filtraciju $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ako je za sve $n \in \mathbb{N}_0$ slučajna varijable X_n $\mathcal{F}_n$-izmjeriva, tj. $\sigma(X_n) \subseteq \mathcal{F}_n$.
Analogno u neprekidnom vremenu.

- Prirodna filtracija procesa $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je niz σ-algebri

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_0 &= \sigma(X_0), \\
\mathcal{F}_1 &= \sigma(X_0, X_1), \\
&\vdots \\
\mathcal{F}_n &= \sigma(X_0, \ldots, X_n), \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

- Dodatno definiramo

$$
\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right).
$$

- Očigledno je svaki proces adaptiran na svoju prirodnu filtraciju.
- Filtraciju interpretiramo kao rastući niz informacija o procesu.

Martingali

Definicija 5.

Slučajan proces $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *je* ***martingal*** *(u diskretnom vremenu) s obzirom na filtraciju* $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *ako vrijedi:*

(i) $E[|X_n|] < \infty$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}_0$,

(ii) $\{X_n\}$ *je adaptiran na* $\{\mathcal{F}_n\}$,

(iii) *za svaki* $n \in \mathbb{N}_0$ *vrijedi*

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n.$$

Ako umjesto $=$ *u gornjoj definiciji vrijedi* $\leq$, *odnosno* $\geq$ *onda govorimo o* ***supermartingalu***, *odnosno* ***submartingalu***.

- Svojstvo (iii) nazivamo martingalno svojstvo. Ekvivalentna formulacija je da za sve $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$\begin{aligned} E[X_{n+k}|\mathcal{F}_n] &= E[E[X_{n+k}|\mathcal{F}_{n+k-1}]|\mathcal{F}_n] = E[X_{n+k-1}|\mathcal{F}_n] \\ &= \cdots = E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n. \end{aligned}$$

- Najbolje što možemo reći o budućnosti na osnovu prošlosti i sadašnjosti je sadašnjost.
- Martingale možemo shvatiti kao model za pravedne igre. Naime, ako X_n opisuje iznos novca kojeg igrač ima u trenutku n, tada martingalno svojstvo kaže da očekivani iznos njegovog bogatsva nakon sljedeće igre jednak trenutnom bogatsvu, uvjetno na poznate ishode prethodnih igara.

- Ako ne preciziramo filtraciju u definiciji martingala, onda smatramo da radi o prirodnoj filtraciji.
- U tom slučaju svojstvo (iii) je

$$E[X_{n+1}|X_0, X_1, \dots, X_n] = X_n.$$

Zadaci

Zadatak 8.

Neka je $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ *niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli,* $E|X_n| < \infty$ *i označimo* $EX_1 = \mu$*. Neka je* $\{S_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ *slučajna šetnja, tj.*

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Odredite uvjete pod kojima je slučajna šetnja martingal/supermartingal/submartingal uz filtraciju $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ *i* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ *za* $n \in \mathbb{N}$*.*

Zadatak 9.

Neka je $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *niz nezavisnih slučajnih varijabli sa svojstvima*

$$E[|X_n|] < \infty, \quad E[X_n] = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pokažite da je slučajan proces $\{M_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$*, gdje je*

$$M_0 = 1, \quad M_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

martingal uz filtraciju $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ *i* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ *za* $n \in \mathbb{N}$*.*

Zadatak 10.

Neka je $\{S_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ *jednostavna slučajna šetnja na* $\mathbb{Z}$*, tj.*

$$S_0 = 0, \quad S_n = S_0 + X_1 + \ldots + X_n,$$

gdje je $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ *niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s razdiobom*

$$P(X_1 = 1) = p, \quad P(X_1 = -1) = 1 - p, \quad p \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Pokažite da je slučajan proces

$$\{Z_n,\, n \in \mathbb{N}_0\} = \left\{ \left(\frac{1-p}{p} \right)^{S_n},\, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

martingal uz filtraciju $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ *i* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ *za* $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 11.

Neka je $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem 0 i varijancom σ^2. Neka je

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, n \in \mathbb{N}.$$

Provjerite je li slučajan proces

$$Y_n = S_n^2 - n\sigma^2,\ n \in \mathbb{N}_0,$$

martingal uz svoju prirodnu filtraciju.

Zadatak 12.

Neka je $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *jednostavan proces grananja, tj.*

$$X_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}} Z_{n,k},$$

gdje su $\{Z_{n,j}, n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\}$ *nenegativne nezavisne jednako distribuirane s očekivanjem* μ. *Pokažite da je sljedeći slučajan proces martingal*

$$\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\} = \left\{ \frac{X_n}{\mu^n}, n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

uz filtraciju $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ *i* $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_{k,j} : k \leq n, j \in \mathbb{N})$ *za* $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 13.

U početnom trenutku posudi se nalazi jedna bijela i jedna crna kuglica. U diskretnim vremenskim trenucima $n = 1, 2, 3, \ldots$ *iz posude se izvlači jedna kuglica i vraća se u posudu zajedno s još jednom kuglicom iste boje. Neka je* $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *omjer broja bijelih kuglica i ukupnog broja kuglica nakon n izvlačenja. Pokažite da je* $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *martingal (u odnosu na prirodnu filtraciju).*

Martingali u neprekidnom vremenu

Definicija 6.

Slučajan proces $\{X_t, t \in [0,\infty)\}$ *je* ***martingal*** *(u neprekidnom vremenu) s obzirom na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,\infty)\}$ *ako vrijedi:*

(i) $E[|X_t|] < \infty$, *za svaki* $t \geq 0$,

(ii) $\{X_t\}$ *je adaptiran na* $\{\mathcal{F}_t\}$,

(iii) *za svaki* $0 \leq s < t$ *vrijedi*

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s.$$

Ako umjesto $=$ *u gornjoj definiciji vrijedi* $\leq$, *odnosno* $\geq$ *onda govorimo o* ***supermartingalu***, *odnosno* ***submartingalu***.

Zadaci

Zadatak 14.

Pokažite da je Brownovo gibanje martingal u odnosu na svoju prirodnu filtraciju.

Zadatak 15.

Pokažite da je slučajan proces $\{B_t^2 - t^2, t \geq 0\}$ *martingal u odnosu na prirodnu filtraciju Brownovog gibanja* $\{B_t, t \geq 0\}$.

Zadatak 16.

Provjerite je li slučajan proces $\{B_t + t, t \geq 0\}$ *martingal u odnosu na prirodnu filtraciju Brownovog gibanja* $\{B_t, t \geq 0\}$.

Zadatak 17.

Pokažite da je za svaki $t \geq 0$ $EB_t^3 = 0$, *ali da* $\{B_t^3, t \geq 0\}$ *nije martingal u odnosu na prirodnu filtraciju Brownovog gibanja* $\{B_t, t \geq 0\}$.