# Vježbe - Slučajni procesi
# IV. dio

# Predvidivi procesi

**Definicija 1.**

*Slučajan proces* $\{H_n, n \in \mathbb{N}\}$ *je* ***predvidiv*** *s obzirom na filtraciju* $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *ako je za svaki* $n \in \mathbb{N}$, $H_n$ $\mathcal{F}_{n-1}$ *izmjeriva, tj.* $\sigma(H_n) \subseteq \mathcal{F}_{n-1}$.

- Ako $\{\mathcal{F}_n\}$ shvaćamo kao rastući niz informacija, onda predvidivost znači da proces treba biti "poznat" jedan korak unaprijed.

# Martingalna transformacija

## Definicija 2.

*Slučajan proces* $\{Z_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *takav da je*

$$Z_0 = 0, \quad Z_n = \sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1}), \qquad n \in \mathbb{N},$$

*gdje je* $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *martingal, a* $H = \{H_n, n \in \mathbb{N}\}$ *predvidiv proces u odnosu na filtraciju* $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$*, zovemo* ***martingalna tranformacija*** *procesa* $X$ *procesom* $H$.
*Pišemo:* $Z = H \circ X$.

- Neka $\{X_n\}$ modelira kapital igrača nakon $n$-te igre na sreću u koju on ulaže jedinični ulog. Tada je $X_n - X_{n-1}$ njegov dobitak (gubitak) u $n$-toj igri. Predvidivi proces $H$ možemo shvatiti kao strategiju ulaganja. $H_n$ je ulog na $n$-tu igru. Martingalna transformacija $H \circ X$ je onda ukupni kapital igrača koji ulaže po strategiji $H$.

**Teorem 1.**

*Neka je $H_n$ ograničena za svaki $n$. Tada je martingalna transformacija $Z = H \circ X$ martingal.*

- Slično vrijedi i: ako je $H_n$ ograničen i nenegativan za svaki $n$ i $X$ supermartingal, tada je i $H \circ X$ supermartingal.
- Isto vrijedi i za submartingale.

# Zadaci

## Zadatak 1 (Martingalna strategija).

*Naziv martingal dolazi od sljedeće kockarske strategije:*
*Kockar se kladi 1kn na ishod igre u kojoj dobiva i gubi 1kn s vjerojatnošću* $1/2$*. Ako izgubi, ulaže 2kn na istu takvu igru. Ako izgubi prvih* $n-1$ *igara, onda ulaže* $2^{n-1}$ *kn na n-tu igru. Nekad bi trebao dobiti, recimo u trenutku* $T$ *i onda odnosi dobitak*

$$2^{T-1} - (1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{T-2}) = 2^{T-1} - \frac{2^{T-1} - 1}{2 - 1} = 1.$$

*Nakon dobitka, nastavlja s jediničnim ulogom a zatim po istoj strategiji. Definirajte strategiju ulaganja. Je li proces koji opisuje igračev kapital martingal?*

**Zadatak 2.**

*Kockar ima* 2 *kn i želi na brzinu doći do* 5 *kn, a kad to uspije, prestaje igrati. Može igrati igru sa sljedećim pravilima: baca se simetričan novčić, ako igrač pogodi stranu dobiva onoliko koliko je uložio i vraća mu se ulog, a ako promaši gubi novac koji je uložio. Kockar se odlučuje za sljedeću strategiju: ako ima manje ili točno* 2*kn, ulagat će sve što ima, a ako ima više od* 2*kn, ulagat će onoliko koliko mu treba da bi došao do* 5*kn. Provjerite je li uz takvu strategija igra fer.*

# Vrijeme zaustavljanja

**Definicija 3.**

*Slučajna varijabla* $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ *zove se vrijeme zaustavljanja procesa* $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *ako je za svaki* $n \in \mathbb{N}_0$

$$\{T \leq n\} \in \sigma\{X_0, X_1, \ldots, X_n\},$$

*tj. događaj* $\{T \leq n\}$ *ovisi samo o* $X_0, X_1, \ldots, X_n$.
*Ako je uz proces dana i filtracija* $\{\mathcal{F}_n\}$, *ponekad se gornji zahtjev zamjenjuje sa*

$$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

**Napomena 1.**

*Intuitivno,* $T$ *je vrijeme zaustavljanja ako promatrajući proces do determinističkog trenutka* $n \in \mathbb{N}_0$ *možemo reći je li se slučajno vrijeme* $T$ *dogodilo do trenutka* $n$ *ili ne. Ako bi se trebali zaustaviti u* $T$, *onda bi promatrajući proces znali kada treba stati.*

**Propozicija 1.**

*Slučajna varijabla $T$ je vrijeme zaustavljanja procesa $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ onda i samo onda ako za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$\{T = n\} \in \sigma\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}.$$

# Zadaci

**Zadatak 3.**

*Neka su $S$ i $T$ vremena zaustavljanja procesa $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$. Pokažite da su sljedeće slučajne varijable također vremena zaustavljanja ovog procesa:*

a) $T + k,\ k \in \mathbb{N}_0$,

b) $S + T$,

c) $S \wedge T = \min\{S, T\}$,

d) $S \vee T = \max\{S, T\}$.

## Definicija 4.

*Za dano vrijeme zaustavljanja* $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ *definiramo slučajnu varijablu*

$$X_T(\omega) = X_n(\omega), \text{ ako je } T(\omega) = n.$$

*Uočimo:*

- $X_T$ *je definirana samo na skupu* $\{T < \infty\}$,
- $X_T$ *je zaista slučajna varijabla na* $\Omega' = \{T < \infty\}$:

$$\{X_T = i\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{X_n = i, T = n\}.$$

# Zaustavljeni proces

**Definicija 5.**

*Neka je* $T$ *vrijeme zaustavljanja za proces* $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$. *Proces zaustavljen u vremenu* $T$ *je proces* $X^T = \{X_n^T, n \in \mathbb{N}_0\}$ *gdje je*

$$X_n^T = X_{T \wedge n} = \begin{cases} X_n, & n \leq T, \\ X_T, & n > T. \end{cases}$$

**Teorem 2.**

*Ako je* $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *martingal (supermartingal) i* $T$ *vrijeme zaustavljanja, tada je slučajan proces* $X^T = \{X_n^T, n \in \mathbb{N}_0\}$ *također martingal (supermartingal).*

# Teorem o opcionalnom zaustavljanju

- Zanima nas kada je $EX_T = EX_0$?

**Teorem 3 (Doob).**

*Neka je $X$ supermartingal i $T$ vrijeme zaustavljanja. Pretpostavimo da vrijedi jedan od sljedećih uvjeta*

(i) *$T$ je omeđeno (tj. postoji $N > 0$ takav da je $T(\omega) \leq N$ za sve $\omega \in \Omega$)*

(ii) *$X$ je omeđen (tj. postoji $K > 0$ takav da je $|X_n(\omega)| \leq K$ za sve $\omega \in \Omega$ i $n \in \mathbb{N}_0$)*

(iii) *$ET < \infty$ i postoji $K > 0$ takav da je $|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| \leq K$ za sve $\omega \in \Omega$ i $n \in \mathbb{N}$)*

*Tada je $X_T$ integrabilna i vrijedi $EX_T \leq EX_0$.*
*Ako je $X$ martingal i vrijedi jedan od uvjeta (i)-(iii) onda je $X_T$ integrabilna i $EX_T = EX_0$.*

# Zadaci

**Zadatak 4.**

*Kockar kreće igrati igru na sreću s početnim kapitalom $k$ kn. U svakoj igri može osvojiti $1kn$ s vjerojatnošću $p \neq 0.5$ ili izgubiti $1kn$ s vjerojatnošću $1 - p$. Zaustavlja se kada osvoji $N$ kn ili kada izgubi sve. Izračunajte vjerojatnost da kockar izgubi sve novce.*

**Zadatak 5.**

*Kockar igra fer igru u kojoj dobiva ili gubi 1kn s vjerojatnošću* $1/2$. *Pretpostavimo da kreće od kapitala* $0$ *i odlazi kada osvoji* $b \in \mathbb{N}$ *kuna ili bude u minusu* $a \in \mathbb{Z}$, $a < 0$ *kuna. Izračunajte očekivani broj igara koje će kockar odigrati.*

**Zadatak 6.**

*Kockarnica organizira fer igru, tako što nezavisno baca simetričan novčić i nudi dupli iznos od uloženog za pogođenu stranu. Beskonačan niz kockara se kladi na sljedeći način. Prije svakog bacanja u prostoriju ulazi jedan kockar i kladi se 1kn na P. Ako promaši gubi svoju 1kn i izlazi iz prostorije, a zatim ulazi sljedeći. Ako dobije, osvaja 2kn i u sljedećem bacanju stavlja 2kn na G (sada je u prostoriji još jedan kockar koji počinje s 1kn na P). Ako promaši, gubi sve i izlazi van. Ako pogodi, osvojio je 4kn i u idućoj igri se kladi cijelim iznosom na P. Ako dobije izlazi sa svojih 8kn i cijela igra prestaje.*
*Koliko će očekivano trajati igra?*