Vježbe - Slučajni procesi
V. dio

Osnovni pojmovi

Definicija 1.

Slučajan proces $\{X_t,\ t \in T\}$ *s diskretnim skupom stanja* S *je Markovljev lanac ako vrijedi*

$$P(X_t = i | X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \ldots, X_{t_n} = i_n) = P(X_t = i | X_{t_n} = i_n),$$

za sve $t_1, \ldots, t_n, t \in T$ *takve da je* $t_1 < \cdots < t_n < t$ *i za sve* $i, i_1, \ldots, i_n \in S$ *za koje su gornje uvjetne vjerojatnosti dobro definirane.*

Definicija 2.

Funkcija prijelaznih vjerojatnosti *Markovljevog lanca dana je izrazom*

$$p(i, s; t, j) = P(X_t = j | X_s = i), \quad i, j \in S, \quad s < t.$$

Napomena 1.

Proučavat ćemo samo slučaj $T = N_0$.
Prema prethodnoj definiciji, funkcija prijelaznih vjerojatnosti u jednom koraku dana je izrazom

$$p(i, n; n+1, j) = P(X_{n+1} = j | X_n = i), \quad n \in \mathbb{N}, \quad i, j \in S.$$

Teorem 1.

Markovljev lanac $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *je potpuno određen poznavanjem distribucije slučajne varijable* X_0 *i funkcije prijelaznih vjerojatnosti u jednom koraku* $p(i, n; n+1, j)$.

Napomena 2.

Ukoliko funkcija prijelaznih vjerojatnosti u jednom koraku ne ovisi o n, tj. za sve $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$p(i, n; n+1, j) = p(i, m; m+1, j),$$

kažemo da se radi o ***homogenom Markovljevom lancu****. Budući u ovom slučaju funkcija prijelaznih vjerojatnosti u jednom koraku ovisi samo o sadašnjem stanju i i budućem stanju j Markovljevog lanca, pišemo:*

$$p(i, n; n+1, j) = p_{ij}, \quad i, j \in S.$$

Matrica $\Pi = [p_{ij}]_{i,j \in S}$ zove se ***matrica prijelaznih vjerojatnosti*** *homogenog Markovljevog lanca (može biti beskonačna matrica). Elementi ove matrice su nenegativni, tj. $p_{ij} \geq 0$ za sve $i, j \in S$, a zbroj elemenata u svakom njezinom retku jednak je jedan, tj. $\sum\limits_{j \in S} p_{ij} = 1$ za svaki $i \in S$. Matricu čiji elementi zadovoljavaju navedena svojstva nazivamo* ***stohastičkom matricom****.*

Napomena 3.

U nastavku proučavamo samo homogene Markovljeve lance te pod pojmom "Markovljev lanac" u daljnjem tekstu podrazumijevamo homogen Markovljev lanac.

Napomena 4.

Konačnodimenzionalne distribucije Markovljevog lanca u potpunosti su određene njegovom početnom distribucijom (tj. distribucijom slučajne varijable X_0) i matricom prijelaznih vjerojatnosti u jednom koraku, tj. ako je $\lambda_i = P(X_0 = i)$ i $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$, $i, j \in S$, tada je

$$P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = \lambda_{i_0}\, p_{i_0 i_1}\, p_{i_1 i_2}\, \ldots\, p_{i_{n-1} i_n}.$$

Napomena 5.

Vrijedi i obrat teorema 1. Naime, ako neki slučajan proces ima definirane konačnodimenzionalne distribucije kao gore, za bilo koju vjerojatnosnu distribuciju λ i stohastičku matricu Π, onda je taj proces Markovljev lanac s početnom distribucijom λ i matricom prijelaznih vjerojatnosti Π.

Napomena 6.

Jednodimenzionalne distribucije Markovljevog lanca sa skupom stanja S, *početnom distribucijom* $\lambda = (\lambda_i,\ i \in S)$ *i matricom prijelaznih vjerojatnosti u jednom koraku* $[p_{ij}]_{i,j \in S}$, *računamo na sljedeći način:*

$$P(X_n = i) = P(X_n = i, X_{n-1} \in S, \ldots, X_0 \in S) =$$

$$= \sum_{i_0 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} \lambda_{i_0}\, p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-2} i_{n-1}}\, p_{i_{n-1} i}.$$

Obzirom da je ovim izrazom dana i*-ta komponenta vektor retka* $\lambda\,\Pi^n$ *kraće ga zapisujemo na sljedeći način:*

$$P(X_n = i) = (\lambda\,\Pi^n)_i.$$

Napomena 7.

*Vjerojatnosti prelaska homogenog Markovljevog lanca iz stanja $i \in S$ u stanje $j \in S$ u m koraka, tj. m-**koračne prijelazne vjerojatnosti**, računamo na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} P(X_m = j | X_0 = i) &= \frac{P(X_m = j, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\ &= \frac{1}{\lambda_i} \sum_{i_1 \in S} \cdots \sum_{i_{m-1} \in S} \lambda_i p_{ii_1} \cdots p_{i_{m-1}j} \\ &= (\Pi^m)_{ij} \end{aligned}$$

Elemente matrice Π^m zovemo m-koračne prijelazne vjerojatnosti $p_{ij}^{(m)}$ homogenog Markovljevog lanca. Zbog homogenosti je i

$$P(X_{n+m} = j | X_n = i) = (\Pi^m)_{ij}, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}$$

Teorem 2.

Prijelazne vjerojatnosti homogenog Markovljevog lanca zadovoljavaju ***Chapman-Kolmogorovljeve jednadžbe****:*

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(r)} \, p_{kj}^{(n-r)}, \quad i, j \in S, \quad 0 \leq r \leq n,$$

odnosno

$$P(X_n = j | X_0 = i) = \sum_{k \in S} P(X_r = k | X_0 = i) \, P(X_{n-r} = j | X_0 = k)$$

Matrični zapis prethodne tvrdnje je

$$\Pi^n = \Pi^r \cdot \Pi^{n-r}.$$

Zadaci

Zadatak 1.

Pretpostavimo da Marko tijekom jednog dana može biti veseo (V), pomalo neraspoložen (PN) ili tužan (T).

- *ako je danas tužan, sutra će biti T, PN ili V s vjerojatnostima* 0.5, 0.3 *i* 0.2, *redom,*
- *ako je danas pomalo neraspoložen, sutra će biti T, PN ili V s vjerojatnostima* 0.3, 0.4 *i* 0.3, *redom,*
- *ako je danas veseo, sutra će biti T, PN ili V s vjerojatnostima* 0.1, 0.4 *i* 0.5, *redom.*

Očito Markovo dnevno raspoloženje možemo modelirati slučajnom varijablom koja vrijednostima iz skupa $\{T, PN, V\}$ *pridružuje primjerice vrijednosti* $\{-1, 0, 1\}$ *redom. Evoluciju njegovog dnevnog raspoloženja kroz vrijeme možemo modelirati slučajnim procesom* $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$*, gdje je* X_n *slučajna varijabla kojom je opisano Markovo raspoloženje n-tog dana.*

a) *Obrazložite zašto je slučajan proces* $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *Markovljev lanac.*
b) *Odredite skup stanja i matricu prijelaznih vjerojatnosti ovog Markovljevog lanca.*
c) *Prikažite shematski prostor stanja i prijelazne vjerojatnosti usmjerenim grafom.*

Zadatak 2.

Pretpostavimo da poznavanje vremenskih prilika tijekom samo dva prethodna dana omogućuje prognoziranje sutrašnjeg vremena, tj. da je za prognoziranje sutrašnjeg vremena dovoljno znati jučerašnje i današnje vremenske uvjete. Neka je poznato sljedeće:

- *ako je i jučer i danas kišilo, sutra će kišiti s vjerojatnošću* 0.7,
- *ako jučer nije kišilo, a danas jest, sutra će kišiti s vjerojatnošću* 0.5,
- *ako je jučer kišilo, a danas nije, sutra će kišiti s vjerojatnošću* 0.4,
- *ako ni jučer ni danas nije kišilo, sutra će kišiti s vjerojatnošću* 0.2.

Neka slučajna varijabla X_n *opisuje vremenske uvjete* $(n-1)$*-og i* n*-tog dana. Uočite da tako definiran slučajan proces ima Markovljevo svojstvo.*

a) *Odredite skup stanja i matricu prijelaznih vjerojatnosti Markovljevog lanca* $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}\}$.

b) *Prikažite shematski prostor stanja i prijelazne vjerojatnosti usmjerenim grafom.*

Zadatak 3.

Tri studenta matematike i tri studenta fizike odlaze na Bahame na zasluženi odmor nakon uspješno završene studijske godine. Stigavši u hotel, raspoređuju se u dvije trokrevetne sobe. Kako se nisu mogli dogovoriti tko će se smjestiti u koju sobu i nisu zadovoljni prvobitnim rasporedom, svaki dan se na slučajan način (nezavisno i s jednakom vjerojatnošću) bira po jedan student iz svake sobe i oni mijenjaju mjesta. Pretpostavimo da je broj studenata matematike u prvoj sobi $(n+1)$-vog dana, $n \in \mathbb{N}_0$, modeliran slučajnom varijablom X_n.

a) *Obrazložite zašto je slučajan proces $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ Markovljev lanac.*
b) *Odredite skup stanja i matricu prijelaznih vjerojatnosti ovog Markovljevog lanca.*
c) *Ako je svaki mogući broj studenata matematike u prvoj sobi prvog dana jednako vjerojatan, tj. ako je*

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

odredite distribuciju slučajne varijable X_1 koja modelira njihov broj u prvoj sobi drugog dana boravka na Bahamima.

Zadatak 4.

Zadan je Markovljev lanac sa skupom stanja $S = \{0, 1\}$ *i matricom prijelaznih vjerojatnosti* Π,

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

a) *Korištenjem Chapman-Kolmogorovljevih jednadžbi odredite matricu* 2*-koračnih i* 3*-koračnih prijelaznih vjerojatnosti.*

b) *Odredite matricu n-koračnih prijelaznih vjerojatnosti.*

c) *Ako je početna distribucija Markovljevog lanca* $\lambda = [1/2, 1/2]$*, tj. ako je*

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

odredite jednodimenzionalnu distribuciju lanca nakon n koraka.

Zadatak 5.

Promotrimo još jednom zadatak 2 u kojemu je Markovljev lanac definiran na temelju uvjeta da poznate vremenske prilike tijekom samo dva prethodna dana omogućuju prognoziranje sutrašnjeg vremena. Ako je poznato da je kišilo u ponedjeljak i utorak, kolika je vjerojatnost da će kišiti i u četvrtak.

Zadatak 6 (Socijalna gibanja).

Pretpostavimo da se promatrana obitelj u nultoj generaciji gotovo sigurno nalazi u srednjoj socijalnoj klasi (stanje 1). Iz te klase obitelj u sljedećoj generaciji može prijeći u nižu socijalnu klasu (stanje 0) ili višu socijalnu klasu (stanje 2). Generacijsko kretanje promatrane obitelji kroz ove tri socijalne klase možemo modelirati Markovljevim lancem $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ *sa skupom stanja* $S = \{0, 1, 2\}$ *i matricom prijelaznih vjerojatnosti (među socijalnim klasama)*

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

a) *Odredite matricu n-koračnih prijelaznih vjerojatnosti.*
b) *S obzirom na zadanu početnu distribuciju Markovljevog lanca, odredite distribuciju lanca nakon n koraka.*
c) *Kolika je vjerojatnost da će u prvoj generaciji obitelj doći u gornju klasu (stanje 2), a potom u drugoj generaciji pasti u nižu klasu (stanje 0)?*

Zadatak 7 (Kockarev kraj - slučajna šetnja s apsorbirajućim granicama).

Promotrimo igru u koju kockar kreće s k kuna te nakon svake partije osvaja jednu kunu s vjerojatnošću $p = 0.4$ ili gubi jednu kunu s vjerojatnošću $q = 0.6$. Pretpostavimo da su partije ove igre međusobno nezavisne, da se kockar nakon fiksnog osvojenog iznosa od $N > k$ kuna svojevoljno povlači iz igre te da nakon totalnog gubitka (tj. u trenutku kad njegov kapital iznosi 0 kuna) mora prestati igrati prema pravilima kockarnice. Iznos koji kockar posjeduje nakon n partija ove igre modeliran je nenegativnom slučajnom varijablom X_n, $n \in \mathbb{N}$.

a) *Obrazložite zašto je slučajan proces*

$$\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}, \quad X_0 = k, \quad k \in \mathbb{N},$$

Markovljev lanac.

b) *Odredite skup stanja i matricu prijelaznih vjerojatnosti ovog Markovljevog lanca te ga shematski prikažite usmjerenim grafom.*

c) *Za specijalan slučaj u kojemu je $N = 4$ u programskom paketu Mathematica izračunajte matricu 20-koračnih prijelaznih vjerojatnosti. Proanalizirajte prijelazne vjerojatnosti $p_{2j}^{(20)}$, $j \in \{0, \dots 4\}$, te obrazložite svoj zaključak o prelascima ovog Markovljevog lanca u 20 koraka iz stanja 2 u stanje $j \in S$.*

Zadatak 8 (Ehrenfestov model).

[a] *Neka se promatrani sustav sastoji od jedne crvene i jedne zelene posude u kojima se nalazi ukupno N jednakih kuglica. Na slučajan način biramo jednu kuglicu i prebacujemo je u drugu posudu. Broj kuglica u crvenoj posudi nakon n-tog odabira i premještanja jedne kuglice modeliramo slučajnom varijablom X_n, $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je prije prvog izvlačenja kuglice iz jedne od kutija svaki mogući broj kuglica u crvenoj kutiji jednako vjerojatan, tj. $X_0 \sim \mathfrak{U}(1/N)$.*

a) *Obrazložite zašto je slučajan proces $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ Markovljev lanac.*
b) *Odredite skup stanja i matricu prijelaznih vjerojatnosti ovog Markovljevog lanca te ga shematski prikažite usmjerenim grafom.*
c) *Za specijalan slučaj u kojemu je $N = 5$ u programskom paketu Mathematica odredite jednodimenzionalnu distribuciju ovog Markovljevog lanca nakon pet koraka, tj. distribuciju slučajne varijable X_5.*

---

[a] Ehrenfestov model je matematički model fizikalnog sustava dvaju spremnika zraka koji su međusobno povezani malim otvorom. Jednostavniji model ovog tipa sastoji se od dvije posude u kojima se nalazi unaprijed određen broj jednakih kuglica.

Zadatak 9 (Wright-Fisherov model).

Promotrimo fiksnu populaciju od $N \in \mathbb{N}$ jedinki i neka je populacija diploidna, što znači da ima ukupno $2N$ određenog gena. Promatrajmo gen koji može biti tipa a ili A. Populaciju koju promatramo u danom trenutku nazivamo "roditeljskom genskom populacijom", a populaciju koja od nje nastaje u sljedećem trenutku nazivamo "populacijom gena potomaka". Svaka "populacija gena potomaka" sastoji se od $2N$ gena i nastaje provođenjem $2N$ nezavisnih slučajnih odabira od po jednog gena iz "roditeljske genske populacije", s tim da se nakon svakog odabira izvučeni gen vraća u "roditeljsku gensku populaciju". Broj gena tipa a u n-toj "populaciji gena potomaka" modeliramo slučajnom varijablom X_n, $n \in \mathbb{N}$. Očito X_0 opisuje distribuciju gena tipa a u originalnoj "roditeljskoj genskoj populaciji".

a) *Obrazložite zašto je slučajan proces $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ Markovljev lanac i odredite njegov skup stanja.*
b) *Odredite funkciju prijelaznih vjerojatnosti pod pretpostavkom nepostojanja mutacija u "roditeljskoj genskoj populaciji".*
c) *Odredite funkciju prijelaznih vjerojatnosti pod pretpostavkom da u "roditeljskoj genskoj populaciji" gen tipa A mutira u gen tipa a s vjerojatnošću u, a gen tipa a mutira u gen tipa A s vjerojatnošću v.*

Zadatak 10 (Model zaliha (Inventory model)).

Trgovina računalnom opremom prodaje novi model ekološki prihvatljivog prijenosnog računala (tzv. eco-notebooka). Ako na kraju radnog dana u trgovini ne ostane niti jedan ili ostane samo jedan primjerak eco-notebooka prodavač ih naručuje onoliko koliko je potrebno da bi na početku sutrašnjeg radnog dana raspolagao sa točno pet primjeraka, dok inače ne naručuje novu pošiljku. Broj eco-notebooka na kraju n-tog radnog dana modeliramo slučajnom varijablom X_n, $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da tijekom jednog radnog dana u trgovinu može ući nula, jedan, dva ili tri potencijalna kupca te da je distribucija broja potencijalnih kupaca dana tablicom

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Također pretpostavimo da ako u trgovini postoji raspoloživi eco-notebook, potencijalni kupac ga zaista kupuje. Prodaja kreće s pet primjeraka.

a) *Obrazložite zašto je slučajan proces*

$$\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}, \quad X_0 = 5 \ g.s.,$$

Markovljev lanac te u terminima slučajne varijable X_n i slučajne varijable koja modelira potražnju za eco-notebookom $(n+1)$-og dana definirajte slučajnu varijablu X_{n+1}.

b) *Odredite skup stanja i matricu prijelaznih vjerojatnosti ovog Markovljevog lanca te ga shematski prikažite usmjerenim grafom.*

c) *Izračunajte $P(X_2 = 1, X_3 = 3)$ i $P(X_5 = 3, X_6 = 4)$.*

Zadatak 11 (Model uzastopnih uspjeha).

Neka je rezultat n-tog bacanja asimetričnog novčića modeliran slučajnom varijablom $Y_n : \{P, G\} \to \{0, 1\}$ *s distribucijom*

$$Y_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad Y_n(\{P\}) = 0, \quad Y_n(\{G\}) = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada je $\{Y_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Neka je* $X_n, n \in \mathbb{N}$ *niz uzastopnih uspjeha prije (i uključivo) trenutka* n*. Formalno možemo to zapisati*

$$X_0 = 0 \text{ g.s.}, \quad X_n = \sum_{i=1}^{n} i 1_{\{Y_n=1, Y_{n-1}=1, \dots, Y_{n-i+1}=1, Y_{n-i}=0\}}.$$

a) *Odredite skup stanja i obrazložite zašto je promatrani slučajan proces Markovljev lanac.*
b) *Odredite matricu prijelaznih vjerojatnosti ovog Markovljevog lanca te ga shematski prikažite usmjerenim grafom.*
c) *Odredite jednodimenzionalnu distribuciju ovog Markovljevog lanca nakon jednog koraka, tj. distribuciju slučajne varijable* X_1*.*