Vježbe - Slučajni procesi
IV. dio

Dekompozicija skupa stanja i apsorpcijske vjerojatnosti

Definicija 1.

Neka je $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ Markovljev lanac sa skupom stanja S i matricom prijelaznih vjerojatnosti Π. Za $B \subseteq S$ definiramo ***prvo vrijeme pogađanja*** *tog skupa kao*

$$T_B = \min\{n \geq 0 : X_n \in B\},$$

uz konvenciju da je $\min \emptyset := +\infty$.

Napomena 1.

U slučaju $B = \{j\}$ za $j \in S$ zbog jednostavnosti pišemo T_j umjesto preciznijeg $T_{\{j\}}$.

Definicija 2.

Kažemo da je stanje $j \in S$ ***dostižno*** *iz stanja $i \in S$ (oznaka $i \longrightarrow j$) ako je*

$$P(T_j < \infty | X_0 = i) > 0,$$

tj. stanje j dostižno je iz stanja i ako lanac s pozitivnom vjerojatnošću posjeti stanje j krenuvši iz stanja i.

Propozicija 1.

Sljedeća svojstva stanja Markovljevog lanca su ekvivalentna:

(i) $i \longrightarrow j$,

(ii) $p_{ij}^{(n)} > 0$ za neko $n \geq 0$,

(iii) $p_{ii_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1} j} > 0$ za neka stanja $i_1, \dots, i_{n-1}$ i neki $n > 0$.

Definicija 3.

Kažemo da stanja i i j **komuniciraju** *(oznaka $i \longleftrightarrow j$) ako je $i \longrightarrow j$ i $j \longrightarrow i$.*

Napomena 2.

Relacija komuniciranja je relacija ekvivalencije na $S \times S$ i inducira particiju skupa stanja S na **klase komuniciranja***:*

- *klasu C_i čine sva stanja iz skupa S koja međusobno komuniciraju ($i \in C_i \subset S$ je predstavnik klase, no svaki element klase može igrati ulogu njezinog reprezentanta),*
- *klasa može biti konačno ili beskonačno mnogo, ali svakako manje ili jednako broju elemenata skupa S,*
- *unija svih klasa jednaka je cijelom skupu stanja S,*
- *klase su međusobno disjunktne.*

Definicija 4.

Markovljev lanac $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ je ***ireducibilan*** *ako se prostor stanja S sastoji samo od jedne klase komuniciranja, tj. ako $i \longleftrightarrow j$ za sva stanja $i, j \in S$.*

Napomena 3.

Ako su svi elementi matrice prijelaznih vjerojatnosti Markovljevog lanca pozitivni, onda je svako stanje dostižno iz bilo kojeg drugog stanja jer je $p_{ij} > 0$, za sve $i, j \in S$. Takav Markovljev lanac je ireducibilan, no pozitivnost elemenata matrice prijelaznih vjerojatnosti nije nužan uvjet ireducibilnosti Markovljevog lanca.

Definicija 5.

Podskup skupa stanja $C \subset S$ je ***zatvoren*** *ako $\forall i \in C$ vrijedi*

$$P(T_{S \setminus C} = \infty | X_0 = i) = 1.$$

Napomena 4.

Skup $C \subset S$ je zatvoren ako lanac gotovo sigurno ne može napustiti skup C jednom kad se nađe u njemu.

Definicija 6.

Za stanje $j \in S$ kažemo da je ***apsorbirajuće*** *ako je $\{j\}$ zatvoren podskup skupa S.*

Napomena 5.

Ako je $j \in S$ apsorbirajuće stanje Markovljevog lanca, tada vjerojatnosti $P(T_j < \infty | X_0 = i)$, $i \in S$, nazivamo ***apsorpcijskim vjerojatnostima****.*
Ako je $B \subset S$ zatvoren podskup skupa stanja S, tada su apsorpcijske vjerojatnosti oblika $P(T_B < \infty | X_0 = i)$, $i \in S$.

Teorem 1.

Neka je $h_i^B = P(T_B < \infty | X_0 = i)$, *za svaki* $i \in S$. *Vektor* $h^B = (h_i^B, i \in S)$ *je minimalno nenegativno rješenje sustava linearnih jednadžbi*

$$h_i^B = 1, \qquad \text{za } i \in B,$$

$$h_i^B = \sum_{j \in S} p_{ij} h_j^B, \quad \text{za } i \notin B.$$

Napomena 6.

Minimalnost znači da ako je $(x_i, i \in S)$ *neko drugo nenegativno rješenje gornjeg sustava, tada vrijedi* $x_i \geq h_i^B$ *za sve* $i \in S$.

Teorem 2.

Neka je $g_i^B = E[T_B | X_0 = i]$*, za svaki* $i \in S$*, očekivano vrijeme pogađanja skupa* B *ako lanac kreće iz stanja* i*. Vektor* $g^B = (g_i^B, \, i \in S)$ *je minimalno nenegativno rješenje sustava linearnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} g_i^B &= 0, && \text{za } i \in B, \\ g_i^B &= 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} g_j^B, && \text{za } i \notin B. \end{aligned}$$

Zadaci

Zadatak 1.

Neka je Markovljev lanac $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *zadan sljedećom matricom prijelaznih vjerojatnosti i skupom stanja* S*:*

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad S = \{0, 1, 2\};$$

a) *Prikažite shematski prostor stanja i prijelazne vjerojatnosti ovog Markovljevog lanca usmjerenim grafom.*

b) *Odredite dekompoziciju skupa stanja na klase komuniciranja. Je li lanac ireducibilan?*

c) *Nađite (ako postoje) zatvorene podskupove skupa stanja* S *te identificirajte (ako postoje) apsorbirajuća stanja.*

Zadatak 2.

Neka je Markovljev lanac $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *zadan sljedećom matricom prijelaznih vjerojatnosti i skupom stanja* S:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \{0, 1, 2, 3\};$$

a) *Prikažite shematski prostor stanja i prijelazne vjerojatnosti ovog Markovljevog lanca usmjerenim grafom.*

b) *Odredite dekompoziciju skupa stanja na klase komuniciranja. Je li lanac ireducibilan?*

c) *Nađite (ako postoje) zatvorene podskupove skupa stanja* S *te identificirajte (ako postoje) apsorbirajuća stanja.*

Zadatak 3.

Neka je Markovljev lanac $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ zadan sljedećom matricom prijelaznih vjerojatnosti i skupom stanja S:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}, \quad S = \{0, 1, 2, 3, 4\};$$

a) *Prikažite shematski prostor stanja i prijelazne vjerojatnosti ovog Markovljevog lanca usmjerenim grafom.*

b) *Odredite dekompoziciju skupa stanja na klase komuniciranja. Je li lanac ireducibilan?*

c) *Nađite (ako postoje) zatvorene podskupove skupa stanja S te identificirajte (ako postoje) apsorbirajuća stanja.*

Zadatak 4.

Neka je Markovljev lanac $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *zadan sljedećom matricom prijelaznih vjerojatnosti i skupom stanja* S:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

a) *Prikažite shematski prostor stanja i prijelazne vjerojatnosti ovog Markovljevog lanca usmjerenim grafom.*

b) *Odredite dekompoziciju skupa stanja na klase komuniciranja. Je li lanac ireducibilan?*

c) *Nađite (ako postoje) zatvorene podskupove skupa stanja* S *te identificirajte (ako postoje) apsorbirajuća stanja.*

Zadatak 5.

Navedite primjer:

a) *ireducibilnog Markovljevog lanca sa skupom stanja* $S = \{0, 1, 2\}$,

b) *Markovljavog lanca s proizvoljnim konačnim skupom stanja od kojih su dva stanja apsorbirajuća,*

c) *za svaki od navedenih primjera odredite dekompoziciju skupa stanja na klase komuniciranja.*

Zadatak 6.

Zadan je Markovljev lanac $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ sa skupom stanja $S = \{0, 1, 2, 3\}$ i matricom prijelaznih vjerojatnosti

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) *Prikažite shematski ovaj Markovljev lanac usmjerenim grafom. Odredite dekompoziciju skupa stanja S na klase komuniciranja te identificirajte apsorbirajuća stanja.*

b) *Odredite vjerojatnost da ovaj lanac bude apsorbiran u stanju 3 ako je poznato da je krenuo iz stanja $i \in S$, tj. za svaki $i \in S$ odredite*

$$P(T_3 < \infty | X_0 = i).$$

c) *Odredite očekivano vrijeme do apsorbcije ako je poznato da je Markovljev lanac krenuo iz stanja $i \in S$.*

Zadatak 7.

Zadan je Markovljev lanac $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *sa skupom stanja* $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *i matricom prijelaznih vjerojatnosti*

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

a) *Prikažite shematski prostor stanja usmjerenim grafom. Odredite dekompoziciju skupa stanja* S *na klase komuniciranja. Koja klasa komuniciranja je zatvoren podskup skupa stanja?*

b) *Odredite apsorpcijske vjerojatnosti ovog Markovljevog lanca ako je poznato da je lanac krenuo iz stanja* $i \in S$*, tj. za svaki* $i \in S$ *odredite*

$$P(T < \infty | X_0 = i),$$

gdje je T *vrijeme čekanja do ulaska Markovljevog lanca u zatvoren podskup skupa stanja.*

c) *Odredite očekivano vrijeme ulaska Markovljevog lanca u zatvoren podskup skupa stanja ako je poznato da je krenuo iz stanja* $i \in S$*, tj. za svaki* $i \in S$ *odredite*

$$E[T | X_0 = i].$$

Zadatak 8.

Zadan je Markovljev lanac $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *sa skupom stanja* $S = \{0, 1, 2, 3\}$ *i matricom prijelaznih vjerojatnosti*

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{7}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

a) *Prikažite shematski prostor stanja usmjerenim grafom. Odredite dekompoziciju skupa stanja* S *na klase komuniciranja. Koja klasa komuniciranja je zatvoren podskup skupa stanja?*

b) *Odredite apsorpcijske vjerojatnosti ovog Markovljevog lanca ako je poznato da je lanac krenuo iz stanja* $i \in S$, *tj. za svaki* $i \in S$ *odredite*

$$P(T < \infty | X_0 = i),$$

gdje je T *vrijeme čekanja do ulaska Markovljevog lanca u zatvoren podskup skupa stanja.*

c) *Odredite očekivano vrijeme ulaska Markovljevog lanca u zatvoren podskup skupa stanja ako je poznato da je krenuo iz stanja* $i \in S$, *tj. za svaki* $i \in S$ *odredite*

$$E[T | X_0 = i].$$

Zadatak 9.

Zadan je Markovljev lanac $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *sa skupom stanja* $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *i matricom prijelaznih vjerojatnosti*

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) *Prikažite shematski prostor stanja usmjerenim grafom. Odredite dekompoziciju skupa stanja* S *na klase komuniciranja te identificirajte apsorbirajuća stanja ovog Markovljevog lanca.*

b) *Odredite vjerojatnost da ovaj lanac bude apsorbiran u stanju* 1 *ako je poznato da je krenuo iz stanja* $i \in S$.

c) *Odredite očekivano vrijeme do apsorbcije ako je poznato da je Markovljev lanac krenuo iz stanja* $i \in S$.

Zadatak 10.

Kockar ima 2 *kn i želi na brzinu doći do* 5 *kn, a kad to uspije, prestaje igrati. Može igrati igru sa sljedećim pravilima: baca se simetričan novčić, ako igrač pogodi stranu dobiva onoliko koliko je uložio i vraća mu se ulog, a ako promaši gubi novac koji je uložio. Kockar se odlučuje za sljedeću strategiju: ako ima manje ili točno* 2*kn, ulagat će sve što ima, a ako ima više od* 2*kn, ulagat će onoliko koliko mu treba da bi došao do* 5*kn.*

(a) *Modelirajte kockarev kapital kroz vrijeme slučajnim procesom. Objasnite zašto je to Markovljev lanac.*

(b) *Sastavite matricu prijelaznih vjerojatnosti. Odredite dekompoziciju skupa stanja na klase komuniciranja.*

(c) *Koja je vjerojatnost da će kockar uspjeti u svom naumu da osvoji* 5*kn? Kolika je vjerojatnost da će izgubiti sve novce?*

(d) *Koliko će se očekivano puta baciti novčić prije nego igra završi?*

(e) *Odredite je li sljedeća strategija bolja ili lošija za kockara: uvijek ulaže samo po* 1*kn.*

Ponašanje Markovljevog lanca nakon m-tog koraka

- Neka je $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ Markovljev lanac sa skupom stanja S, početnom distribucijom λ i matricom prijelaznih vjerojatnosti Π.
- Ako znamo da je u m-tom koraku lanac došao u stanje i, onda buduće kretanje lanca ne ovisi o stanjima prije m-tog koraka.
- Posljedica ove činjenice je da vjerojatnost

$$P(X_{m+n} = i_{m+n}, \ldots, X_{m+1} = i_{m+1} | X_m = i_m) = p_{i_m i_{m+1}} \cdot \ldots \cdot p_{i_{m+n-1} i_{m+n}}$$

ne ovisi o početnoj distribuciji ovog Markovljevog lanca.

Teorem 3.

Neka je $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ Markovljev lanac sa skupom stanja S, početnom distribucijom λ i matricom prijelaznih vjerojatnosti Π. Tada je, uvjetno na $X_m = i$, slučajan proces $\{X_{m+n},\ n \in \mathbb{N}_0\}$ Markovljev lanac s početnom distribucijom

$$\delta^i(j) = \begin{cases} 1 & , \quad j = i \\ 0 & , \quad j \neq i \end{cases} , \quad j \in S$$

i istom matricom prijelaznih vjerojatnosti Π. Novi Markovljev lanac $\{X_{m+n},\ n \in \mathbb{N}_0\}$, uvjetno na $X_m = i$, je nezavisan o slučajnim varijablama $X_0, X_1, \ldots, X_m$.

Zadaci

Zadatak 11.

Promotrimo Markovljev lanac kojim modeliramo niz uzastopnih uspjeha (zadatak 11 - vježbe III. dio).

a) *Pretpostavimo da je* $P(X_0 = k) = \dfrac{1}{2^{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}_0$. *Izračunajte sljedeće vjerojatnosti:*
   - $P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 4)$,
   - $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2, \dots, X_{n-1} = n-1, X_n = n)$.

b) *Pretpostavimo da znamo da se ovaj Markovljev lanac nakon* n *koraka našao u stanju* 0. *Korištenjem matrice prijelaznih vjerojatnosti i početne distribucije novog Markovljevog lanca* $\{X_{n+k},\ k \in \mathbb{N}_0\}$ *odredite*
   - $P(X_n = 0, X_{n+1} = 1, X_{n+2} = 2, \dots, X_{n+m-1} = m-1, X_{n+m} = m)$,
   - *jednodimenzionalnu distribuciju Markovljevog lanca* $\{X_{n+k},\ k \in \mathbb{N}_0\}$ *nakon jednog koraka, tj. distribuciju slučajne varijable* X_{n+1}.

Jako Markovljevo svojstvo

Napomena 7.

Za dano vrijeme zaustavljanja $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ *definiramo slučajnu varijablu*

$$X_T(\omega) = X_n(\omega), \text{ ako je } T(\omega) = n.$$

Uočimo:

- X_T *je definirana je samo na skupu* $\{T < \infty\}$,
- X_T *je zaista slučajna varijabla na* $\Omega' = \{T < \infty\}$:

$$\{X_T = i\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{X_n = i, T = n\}.$$

Teorem 4.

Neka je $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ Markovljev lanac s početnom distribucijom λ i matricom prijelaznih vjerojatnosti Π te neka je T vrijeme zaustavljanja za taj proces. Tada je, uvjetno na $X_T = i$, slučajan proces $\{X_{T+n},\ n \in \mathbb{N}_0\}$ Markovljev lanac s početnom distribucijom δ^i i matricom prijelaznih vjerojatnosti Π. Osim toga, Markovljev lanac $\{X_{T+n},\ n \in \mathbb{N}_0\}$ nezavisan je od slučajnih varijabli $X_0, X_1, \ldots, X_T$ uvjetno na $X_T = i$.

Zadaci

Zadatak 12.

Klijent banke na tekućem računu može imati nenegativan iznos novca (stanje 0), može biti u dozvoljenom minusu (stanje 1) ili u nedozvoljenom minusu (stanje 2). Promjene stanja u kojemu se nalazi klijent tijekom vremena možemo modelirati Markovljevim lancem $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ sa skupom stanja $S = \{0, 1, 2\}$ i matricom prijelaznih vjerojatnosti

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

a) *Definirajte slučajnu varijablu T kojom modeliramo vrijeme prvog ulaska klijenta banke u nedozvoljeni minus i pokažite da je ta slučajna varijabla vrijeme zaustavljanja ovog Markovljevog lanca.*

b) *Pretpostavimo da je poznato da se klijent našao u nedozvoljenom minusu. Izračunajte vjerojatnost da nakon tri uplate na tekući račun klijent raspolaže nenegativnim iznosom novca te izračunajte*

$$P(X_T = 2, X_{T+1} = 1, X_{T+2} = 1, X_{T+3} = 0).$$

c) *Promotrite Markovljev lanac $\{X_{T+n},\ n \in \mathbb{N}_0\}$. Definirajte slučajnu varijablu kojom modeliramo vrijeme prvog ulaska klijenta banke u nenegativno stanje na tekućem računu i pokažite da je ta slučajna varijabla vrijeme zaustavljanja ovog Markovljevog lanca.*