Vježbe - Slučajni procesi
VII. dio

Povratnost i prolaznost

- Pretpostavimo da je zadan Markovljev lanac $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ sa skupom stanja S i matricom prijelaznih vjerojatnosti Π, te fiksirajmo određeno stanje $i \in S$.

Definicija 1.

Vrijeme prvog povratka Markovljevog lanca u stanje $i \in S$ je slučajna varijabla

$$T_i^{(1)} = \min\{n > 0 : X_n = i\},$$

a vrijeme m-tog povratka u stanje $i \in S$ je slučajna varijabla

$$T_i^{(m)} = \begin{cases} \min\{n > T_i^{(m-1)} : X_n = i\} & , \quad T_i^{(m-1)} < \infty \\ \infty & , \quad T_i^{(m-1)} = \infty \end{cases}.$$

Definicija 2.

Stanje $i \in S$ je povratno ako vrijedi

$$P(T_i^{(1)} < \infty | X_0 = i) = 1.$$

Stanje $i \in S$ je prolazno ako vrijedi

$$P(T_i^{(1)} < \infty | X_0 = i) < 1,$$

tj. ako je $P(T_i^{(1)} = \infty | X_0 = i) > 0$.

U svrhu uspostavljanja kriterija za klasifikaciju stanja Markovljevog lanca na povratna i prolazna, definiramo sljedeće veličine:

- vjerojatnost da Markovljev lanac prvi puta posjeti stanje i u n-tom koraku ako je poznato da je $X_0 = j$:

$$f_{ji}^{(n)} = P(T_i^{(1)} = n | X_0 = j),$$

  gdje je $f_{ji}^{(0)} = 0$.
- vjerojatnost da Markovljev lanac (bilo kada) posjeti stanje i ako je poznato da je $X_0 = j$:

$$f_{ji} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_i^{(1)} = n | X_0 = j) = P(T_i^{(1)} < \infty | X_0 = j).$$

  Uočimo: za $i = j$, $f_{ii} = P(T_i^{(1)} < \infty | X_0 = i)$, pa onda $f_{ii} = 1 \iff i$ povratno stanje.

- funkcija izvodnica niza $(f_{ji}^{(n)},\, n \in \mathbb{N})$:

$$F_{ji}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}^{(n)} s^n, \quad s \in \langle 0, 1 \rangle.$$

- funkcija izvodnica niza $(p_{ji}^{(n)},\, n \in \mathbb{N}) = (P(X_n = i | X_0 = j),\, n \in \mathbb{N})$:

$$P_{ji}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)} s^n, \quad s \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Propozicija 1 (Dekompozicija u prvom vremenu posjeta).

a) *Za $i \in S$ vrijedi:*

$$p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

te za $s \in \langle 0, 1 \rangle$

$$P_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)}.$$

b) *Za $j \neq i$ vrijedi*

$$p_{ji}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ji}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

te za $s \in \langle 0, 1 \rangle$

$$P_{ji}(s) = F_{ji}(s) P_{ii}(s).$$

Propozicija 2.

Stanje $i \in S$ je povratno onda i samo onda ako je

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty.$$

Napomena 1 (Kriterij povratnosti i prolaznosti).

- *Stanje $i \in S$ je prolazno* $\Leftrightarrow f_{ii} < 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty.$
- *Stanje $i \in S$ je povratno* $\Leftrightarrow f_{ii} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty.$

Napomena 2.

Broj posjeta Markovljevog lanca stanju $i \in S$ modeliran je slučajnom varijablom

$$N_i = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n = i\}}.$$

Očekivani broj posjeta Markovljevog lanca stanju $i \in S$ uz uvjet da je lanac krenuo iz stanja $j \in S$ je

$$\begin{aligned} E_j[N_i] &= E[N_i | X_0 = j] = \sum_{n=0}^{\infty} E[1_{\{X_n = i\}} | X_0 = j] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = i | X_0 = j) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)}. \end{aligned}$$

Stanje $i \in S$ je

- *povratno ako i samo ako je $E_i[N_i] = \infty$,*
- *prolazno ako i samo ako je $E_i[N_i] < \infty$.*

Teorem 1.

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) *Stanje $i \in S$ je povratno.*

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.

(iii) $E_i[N_i] = \infty$.

(iv) $P(N_i = \infty | X_0 = i) = 1$.

Teorem 2.

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) *Stanje $i \in S$ je prolazno.*

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

(iii) $E_i[N_i] < \infty$.

(iv) $P(N_i < \infty | X_0 = i) = 1$.

Zadaci

Zadatak 1.

Zadan je Markovljev lanac $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ sa skupom stanja $S = \{0, 1, 2\}$ i matricom prijelaznih vjerojatnosti

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}.$$

a) *Odredite vjerojatnost da će Markovljev lanac, krenuvši iz stanja $j \in S$, prvi puta posjetiti stanje 2 nakon n koraka.*

b) *Odredite vjerojatnost da će Markovljev lanac, krenuvši iz stanja $j \in S$, (bilo kada) posjetiti stanje 2.*

c) *Je li stanje 2 povratno ili prolazno stanje ovog Markovljevog lanca?*

Zadatak 2.

Zadan je Markovljev lanac $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *sa skupom stanja* $S = \{1, 2, 3\}$ *i matricom prijelaznih vjerojatnosti*

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-2p & 2p & 0 \\ p & 1-2p & p \\ 0 & 2p & 1-2p \end{pmatrix}, \quad p \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle.$$

a) *Pomoću funkcija izvodnica* F_{ji} *i* P_{ji} *klasificirajte stanja ovog Markovljevog lanca na povratna i prolazna.*

b) *Izračunajte očekivano vrijeme povratka Markovljevog lanca u stanje* $i \in S$ *ako je poznato da je upravo iz tog stanja krenuo.*

Zadatak 3.

Promotrite primjer kockarevog kraja (zadatak 7 - vježbe V. dio) za slučaj $N = 4$ *i* $p = 0.4$, *tj. Markovljev lanac sa skupom stanja* $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *i matricom prijelaznih vjerojatnosti*

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) *Klasificirajte stanja ovog Markovljevog lanca na povratna i prolazna.*

b) *Odredite očekivani broj posjeta ovog Markovljevog lanca stanju* 3 *ako je poznato da je lanac krenuo iz stanja* 1.

Zadatak 4.

Nakon drugog svjetskog rata u Velikoj Britaniji provedeno je istraživanje s ciljem definiranja matematičkog modela kojim bi se mogla opisati fluktuacija zanimanja kroz generacije. Pri tome se za promatranu osobu (ženu ili muškarca, redom) u obzir uzima zanimanje roditelja (majke, odnosno oca, redom) kao zanimanje iz prethodne generacije. Zanimanja su kategorizirana na sljedeći jednostavan način:

- *kategorija* 1 - *radnici u administraciji i rukovodstvu,*
- *kategorija* 2 - *kvalificirani radnici,*
- *kategorija* 3 - *nekvalificirani radnici.*

Nakon provedenog istraživanja zaključeno je da je najprikladniji model Markovljev lanac sa skupom stanja $S = \{1, 2, 3\}$ *i matricom prijelaznih vjerojatnosti*

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.48 & 0.07 \\ 0.05 & 0.7 & 0.25 \\ 0.01 & 0.5 & 0.49 \end{pmatrix}.$$

a) *Izračunajte vjerojatnost da se u devetoj generaciji osoba iz neke obitelji prvi put nalazi na rukovodećem položaju ako je poznato da se roditelj iz nulte generacije čije zanimanje uzimamo u obzir bavio poslom iz* j*-te kategorije.*
b) *Izračunajte vjerojatnost da će ovaj Markovljev lanac (bilo kada) posjetiti stanje* 1 *ako je poznato da je krenuo iz stanja* $j \in S$.
c) *Klasificirajte stanja ovog Markovljevog lanca na povratna i prolazna.*

Povratnost, prolaznost i klase komuniciranja

Propozicija 3.

Neka je $i \in S$ povratno stanje te neka $i \longleftrightarrow j$, $j \in S$. Tada je j povratno stanje.

Napomena 3.

- *Ako $i \longleftrightarrow j$ i ako je $i \in S$ prolazno stanje, tada je $j \in S$ također prolazno stanje.*
- *Ako je jedno stanje u nekoj klasi komuniciranja povratno (prolazno), onda su sva stanja koja pripadaju toj klasi povratna (prolazna).*
- *Povratnost (prolaznost) su svojstva cijele klase komuniciranja, pa ih je dovoljno provjeriti samo za jedno stanje iz klase.*

Propozicija 4.

Svaka povratna klasa je zatvorena.

Propozicija 5.

Neka je S konačan skup stanja. Tada postoji barem jedna povratna klasa, tj. S sadrži barem jedno povratno stanje.

Teorem 3.

Pretpostavimo da je Markovljev lanac ireducibilan i povratan. Tada za svako stanje $i \in S$ vrijedi

$$P(T_i < \infty) = 1.$$

Zadaci

Zadatak 5.

Klijent banke na tekućem računu može imati nenegativan iznos novca (stanje 0*), može biti u dozvoljenom minusu (stanje* 1*) ili u nedozvoljenom minusu (stanje* 2*). Promjene stanja u kojemu se nalazi klijent tijekom vremena možemo modelirati Markovljevim lancem* $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *sa skupom stanja* $S = \{0, 1, 2\}$ *i matricom prijelaznih vjerojatnosti*

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Je li ovaj Markovlev lanac ireducibilan? Obrazložite svoj odgovor i s obzirom na njega klasificirajte stanja na povratna ili prolazna.

Zadatak 6.

Šestero djece (1, 2, 3, 4, 5, 6) igraju se dodavanja loptom. Igra ima sljedeći tijek:

- *ako 1 uhvati loptu s jednakim vjerojatnostima je dodaje 2, 4, 5 ili 6,*
- *ako 2 uhvati loptu s jednakim vjerojatnostima je dodaje 1, 3, 5 ili 6,*
- *ako 5 uhvati loptu s jednakim vjerojatnostima je dodaje 1, 2, 4 ili 6,*
- *ako ili 3 ili 6 uhvate loptu, nastavljaju je dodavati jedno drugom,*
- *ako 4 uhvati loptu pobjeći će s njom i sakriti se.*

a) *Obrazložite zašto ovu igru možemo modelirati Markovljevim lancem te odredite pripadni skup stanja i matricu prijelaznih vjerojatnosti. Dekomponirajte skup stanja na klase komuniciranja? Radi li se o ireducibilnom Markovljevom lancu? Obrazložite svoj odgovor.*

b) *Klasificirajte stanja ovog Markovljevog lanca na povratna i prolazna.*

Zadatak 7.

Harryjev posao s restoranom tijekom godina fluktuira izmedju tri stanja:

- *stanje* 0 - *stanje bankrota,*
- *stanje* 1 - *stanje na rubu bankrota,*
- *stanje* 2 - *stanje solventnosti.*

Financijsko stanje Harryjevog posla možemo modelirati Markovljevim lancem sa skupom stanja $S = \{0, 1, 2\}$ *i matricom prijelaznih vjerojatnosti*

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

a) *Klasificirajte stanja ovog Markovljevog lanca na povratna i prolazna.*

b) *Prirodno je pretpostaviti da Harry posao započinje u stanju solventnosti. Odredite očekivani broj godina rada Harryjevog restorana do ulaska u stanje bankrota.*

Zadatak 8 (Jednostavna odrezana slučajna šetnja).

Neka je $\{Y_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli zadanih tablicom distribucije*

$$Y_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad p \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Neka je nadalje

$$S_0 = 0, \quad S_n = (S_{n-1} + Y_n)_+ = \max(S_{n-1} + Y_n, 0).$$

Slučajan proces $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *naziva se jednostavna odrezana slučajna šetnja.*

a) *Obrazložite zašto je ovaj slučajan proces Markovljev lanac te odredite pripadni skup stanja i matricu prijelaznih vjerojatnosti. Radi li se o ireducibilnom Markovljevom lancu? Obrazložite svoj odgovor.*

b) *Je li odrezana slučajna šetnja povratan ili prolazan Markovljev lanac?*

Zadatak 9.

Pokažite da je jednostavna simetrična slučajna šetnja u $\mathbb{Z}^2$ *povratan, a u* $\mathbb{Z}^3$ *prolazan Markovljev lanac.*