Vježbe - Slučajni procesi
VIII. dio

Stacionarna distribucija i invarijantna mjera Markovljevog lanca

Definicija 1.

Neka je $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *Markovljev lanac sa skupom stanja* S *i matricom prijelaznih vjerojatnosti* Π. *Vjerojatnosna distribucija* $\pi = (\pi_i,\ i \in S)$ *na skupu* S *je* ***stacionarna (invarijantna) distribucija*** *Markovljevog lanca (odnosno matrice* Π*) ako vrijedi*

$$\pi = \pi\,\Pi,$$

odnosno po komponentama

$$\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}, \quad \forall j \in S.$$

Napomena 1.

Ako postoji stacionarna distribucija Markovljevog lanca i ako je ona upravo njegova početna distribucija, tada se jednodimenzionalne distribucije tog Markovljevog lanca ne mijenjaju, tj.

$$\pi\Pi^n = \pi\Pi\Pi^{n-1} = \pi\Pi^{n-1} = \cdots = \pi.$$

Teorem 1.

Neka je $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ Markovljev lanac s konačnim ili prebrojivim skupom stanja S, matricom prijelaznih vjerojatnosti Π i stacionarnom distribucijom π. Ako je π početna distribucija tog Markovljevog lanca, tada je $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ stacionaran proces (u užem smislu). Nadalje, za svaki $m \geq 0$ je $\{X_{m+n},\ n \in \mathbb{N}_0\}$ Markovljev lanac s početnom distribucijom π i matricom prijelaznih vjerojatnosti Π.

Propozicija 1.

Neka je S konačan skup stanja Markovljevog lanca $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$. Pretpostavimo da za neki $i \in S$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad \forall j \in S.$$

Tada je $\pi = (\pi_j,\, j \in S)$ stacionarna distribucija.

Definicija 2.

Niz $\lambda = (\lambda_i,\, i \in S)$ *naziva se mjera ako je* $\lambda_i \in [0, \infty)$ *za sve* $i \in S$*.*
Mjera λ *je netrivijalna ako postoji* $i \in S$ *takav da je* $\lambda_i > 0$*.*
Neka je $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ *Markovljev lanac sa skupom stanja* S *i matricom prijelaznih vjerojatnosti* Π*. Netrivijalna mjera* λ *na* S *je* ***invarijantna mjera*** *ovog Markovljevog lanca (odnosno matrice* Π*) ako vrijedi*

$$\lambda = \lambda \Pi,$$

odnosno po komponentama

$$\lambda_j = \sum_{k \in S} \lambda_k p_{kj}, \quad \forall j \in S.$$

- Prisjetimo se - vrijeme prvog povratka u stanje $i \in S$

$$T_i = \min\{n > 0 : X_n = i\}, \quad (T_i^{(1)})$$

i očekivana duljina prvog izleta iz i

$$E_i[T_i] = E[T_i | X_0 = i].$$

- Uočimo da je za prolazno stanje $E_i[T_i] = \infty$, jer $P(T_i = \infty | X_0 = i) > 0$.

Definicija 3.

Stanje $i \in S$ je pozitivno povratno stanje ako je

$$E_i[T_i] < \infty.$$

- Uočimo da iz $E_i[T_i] < \infty$ slijedi $P(T_i < \infty | X_0 = i) = 1$, pa je svako pozitivno povratno stanje ujedno i povratno.

Propozicija 2.

Neka je $i \in S$ *povratno stanje. Za* $j \in S$ *definiramo*

$$\nu_j = E_i\left[\sum_{n=0}^{T_i-1} 1_{\{X_n=j\}}\right].$$

Tada je $\nu = (\nu_j,\, j \in S)$ *netrivijalna invarijantna mjera.*
Ako je stanje $i \in S$ *pozitivno povratno , tada je* $\pi = (\pi_j,\, j \in S)$*, gdje je*

$$\pi_j = \frac{\nu_j}{E_i[T_i]},$$

stacionarna distribucija.

Teorem 2.

Ako je Markovljev lanac ireducibilan i povratan tada ima netrivijalnu invarijantnu mjeru koja je jedinstvena do na multiplikativnu konstantu, tj. ako postoje netrivijalne mjere ν i μ takve da je

$$\nu = \nu \Pi, \quad \mu = \mu \Pi,$$

tada postoji $c > 0$ takav da je $\nu = c\mu$.

Teorem 3.

Neka je $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *ireducibilan Markovljev lanac sa skupom stanja* S *i matricom prijelaznih vjerojatnosti* Π. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) *svako stanje je pozitivno povratno,*
b) *postoji pozitivno povratno stanje* $i \in S$,
c) *Markovljev lanac ima stacionarnu distribuciju* π.

Nadalje, ako vrijedi c), tada je

$$E_j[T_j] = \frac{1}{\pi_j}, \quad \forall j \in S.$$

Zadaci

Zadatak 1.

Osoba na posao može putovati automobilom (oznaka 1), autobusom (oznaka 2) ili vlakom (oznaka 3).

- *Ako jedan dan putuje automobilom, idućeg dana će s jednakim vjerojatnostima putovati vlakom, autobusom ili automobilom.*
- *Ako jedan dan putuje autobusom, idućeg će dana s jednakim vjerojatnostima putovati ili vlakom ili automobilom.*
- *Ako jedan dan putuje vlakom, sutradan neće putovati vlakom te će dva puta vjerojatnije putovati automobilom nego autobusom.*

Način putovanja ove osobe na posao možemo modelirati Markovljevim lancem $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *sa skupom stanja* $S = \{1, 2, 3\}$.

a) *Odredite matricu prijelaznih vjerojatnosti ovog Markovljevog lanca. Je li on ireducibilan?*
b) *Argumentirajte postojanje invarijantne mjere ovog Markovljevog lanca te je izračunajte. Ima li ovaj Markovljev lanac jedinstvenu stacionarnu distribuciju? Ako da, odredite je.*
c) *Za svako stanje* $j \in S$ *odredite očekivano vrijeme trajanja izleta iz* j, *tj.* $E_j[T_j]$. *Je li ovaj lanac pozitivno povratan?*

Zadatak 2 (Simetrična slučajna šetnja na krugu).

Simetrična slučajna šetnja na krugu je Markovljev lanac sa skupom stanja $S = \{0, 1, \ldots, L\}$. Ova slučajna šetnja u jednom se koraku s jednakim vjerojatnostima pomiče za jedno mjesto udesno ili jedno mjesto ulijevo, s tim da kada se iz stanja 0 pomiče u lijevo prelazi u stanje L, a kada se iz stanja L pomiče u desno prelazi u stanje 0.

a) *Odredite matricu prijelaznih vjerojatnosti ovog Markovljevog lanca za slučaj $L = 4$. Proanalizirajte njegovu ireducibilnost i pozitivnu povratnost.*
Argumentirajte egzistenciju jedinstvene stacionarne distribucije i odredite je.

c) *Za svako stanje $i \in S$ odredite očekivano vrijeme trajanja izleta iz i, tj. $E_i[T_i]$.*

Zadatak 3.

Neka je $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *Markovljev lanac sa konačnim skupom stanja* S *te neka je* $|S| = n$. *Pretpostavimo da je matrica prijelaza ovog Markovljevog lanca dvostruka stohastička, tj. da vrijedi*

$$\sum_{i \in S} p_{ij} = 1, \quad \forall j \in S, \quad \sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \quad \forall i \in S.$$

Pokažite da je uniformna distribucija na skupu S *stacionarna distribucija ovog Markovljevog lanca.*

Zadatak 4.

Zadan je Markovljev lanac sa skupom stanja $S = \{0, 1, 2, 3\}$ *i matricom prijelaznih vjerojatnosti*

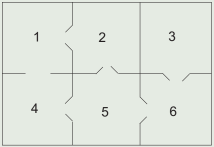
$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

a) *Prikažite shematski skup stanja i prijelazne vjerojatnosti usmjerenim grafom. Je li ovaj Markovljev lanac ireducibilan?*

b) *Odredite sve stacionarne distribucije ovog Markovljevog lanca.*

Zadatak 5.

Neka su prijelazi laboratorijskog miša iz jedne komore u drugu prikazani na sljedećoj slici:



Poznato je sljedeće:

- *ako postoji izlaz iz komore u kojoj se miš nalazi u promatranom trenutku, on će ga iskoristiti i prijeći u drugu komoru (uočite razliku između jednosmjernih i dvosmjernih vrata),*
- *ako postoji više izlaza iz komore u kojoj se miš nalazi u promatranom trenutku, on s jednakim vjerojatnostima bira bilo koji od tih izlaza.*

a) *Odredite skup stanja i matricu prijelaznih vjerojatnosti Markovljevog lanca kojim možemo modelirati prelaske miša iz jedne komore u drugu.*
b) *Odredite sve stacionarne distribucije ovog Markovljevog lanca.*

Granična distribucija Markovljevog lanca

Definicija 4.

Neka je $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *Markovljev lanac sa skupom stanja* S *i matricom prijelaznih vjerojatnosti* Π. *Vjerojatnosna distribucija* $\pi = (\pi_i,\ i \in S)$ *naziva se* ***granična distribucija*** *Markovljevog lanca ili matrice* Π *ako za sve* $i, j \in S$ *vrijedi*

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j.$$

Napomena 2.

Uočimo da za svaki $i \in S$ *limesi* $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}$ *mogu postojati i biti jednaki, a da ne definiraju vjerojatnosnu distribuciju.*

Teorem 4.

Neka je $\pi = (\pi_i,\ i \in S)$ granična distribucija Markovljevog lanca sa skupom stanja S. Tada je π stacionarna distribucija.

Napomena 3.

Na osnovu gornjeg rezultata, ako granična distribucija postoji tada je možemo dobiti rješavajući

$$\pi\Pi = \pi.$$

Treba još odrediti uvjete pod kojima granična distribucija postoji.

Definicija 5.

*Za stanje $i \in S$ Markovljevog lanca sa matricom prijelaznih vjerojatnosti Π sa $d(i)$ označavamo najveći zajednički djelitelj skupa $\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$. Kažemo da je stanje i **aperiodično** ako je $d(i) = 1$, a suprotnom je stanje i **periodično** s periodom $d(i)$.*

Napomena 4.

Uočimo da čim je $p_{ii} > 0$, $1 \in \{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$ pa je stanje i aperiodično.

Lema 1.

Stanje $i \in S$ je aperiodično onda i samo onda ako postoji $n_0 = n_0(i)$ takav da je $p_{ii}^{(n)} > 0$ za svaki $n \geq n_0$.

Lema 2.

Sva stanja $i, j \in S$ koja međusobno komuniciraju imaju isti period, tj.

$$i \longleftrightarrow j \Rightarrow d(i) = d(j).$$

Napomena 5.

Uočimo da je, kao povratnost i prolaznost, period svojstvo klase.

Lema 3.

Pretpostavimo da je Markovljev lanac ireducibilan i aperiodičan. Tada za sve $i, j \in S$ postoji $n_0 = n_0(i, j)$ takav da je za svaki $n \geq n_0$ $p_{ij}^{(n)} > 0$.

Teorem 5.

Neka je $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ Markovljev lanac sa skupom stanja S i matricom prijelaznih vjerojatnosti Π koji je ireducibilan, aperiodičan i ima stacionarnu distribuciju π. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_j, \quad \forall j \in S.$$

Specijalno,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad \forall i, j \in S,$$

tj. stacionarna distribucija je ujedno i granična distribucija.

Zadaci

Zadatak 6.

Odredite graničnu distribuciju Markovljevog lanca sa skupom stanja $S = \{0, 1\}$ *i matricom prijelaznih vjerojatnosti*

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Zadatak 7.

Neka je $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *Markovljev lanac sa skupom stanja* $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *i matricom prijelaznih vjerojatnosti*

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Odredite klase komuniciranja, klasificirajte stanja na povratna i prolazna te odredite radi li se o periodičnom ili aperiodičnom Markovljevom lancu. Obrazložite svoj odgovor.

Zadatak 8.

Odredite graničnu distribuciju Markovljevog lanca sa skupom stanja $S = \{0, 1, 2\}$ *i matricom prijelaznih vjerojatnosti*

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1-2p & 2p & 0 \\ p & 1-2p & p \\ 0 & 2p & 1-2p \end{bmatrix}.$$

Zadatak 9.

Odredite periode stanja Markovljevog lanca sa skupom stanja $S = \{1, 2, 3\}$ i matricom prijelaznih vjerojatnosti

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$