

STATISTIKA

PRVI KOLOKVIJ

grupa B

PITANJE 1: [10 bodova]

Navedite Glivenko-Cantelli teorem i komentirajte taj rezultat u kontekstu problema procjene.

PITANJE 2: [10 bodova]

Opišite pristupe koji se klasično koriste u potrazi za nepristranim procjeniteljima minimalne varijance u parametarskom statističkom modelu ako postoji dovoljna potpuna statistika.

ZADATAK 1: [7+8=15 bodova]

Neka je (X_1, \dots, X_n) jednostavan slučajni uzorak iz razdiobe

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1-3p & 2p & p \end{pmatrix}, \quad p \in (0, \frac{1}{3}).$$

Za procjenu nepoznatog parametra p predložena su dva procjenitelja:

$$\hat{p}_1 = a \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$\hat{p}_2 = b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

- (a) Odredite konstante a i b tako da procjenitelji \hat{p}_1 i \hat{p}_2 budu nepristrani.
 (b) Koji je od tako dobivenih procjenitelja efikasniji?

ZADATAK 2: [7+8=15 bodova]

Neka je (X_1, \dots, X_n) jednostavan slučajni uzorak iz populacije s funkcijom gustoće

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} 1_{(0,1)}(x).$$

- (a) Provjerite pripada li familija distribucija ovog slučajnog uzorka eksponencijalnoj familiji distribucija.
 (b) Dokažite da je $T = X_1 X_2 \cdots X_n$ dovoljna statistika za θ .

ZADATAK 3: [8+15+7=30 bodova]

Neka je (X_1, \dots, X_n) jednostavan slučajni uzorak iz populacije s funkcijom gustoće

$$f(x; \alpha) = \frac{1}{2\alpha^3} x^2 e^{-\frac{x}{\alpha}} 1_{(0,\infty)}(x), \quad \alpha \in \mathbb{N}.$$

- (a) Nađite procjenitelja nepoznatog parametra α metodom momenata. Je li dobiveni procjenitelj nepristran?
 (b) Povjerite je li dobiveni procjenitelj efikasan za α , tj. postiže li Rao-Cramerovu donju granicu.
 (c) Je li dobiveni procjenitelj konzistentan?

ZADATAK 4: [20 bodova]

Košarkaš izvodi slobodna bacanja u serijama i pogađa koš s vjerojatnošću p . Kad promaši, započinje novu seriju. Promatrano je 90 serija bacanja. U 5 serija košarkaš je promašio odmah u prvom bacanju, u 17 serija prvo bacanje je pogodio a drugo promašio itd. Svi rezultati bacanja zapisani su u sljedećoj tablici.

duljina serije (broj bacanja)	1	2	3	4	5	6
broj serija	5	17	25	26	13	4

Nađite procjenitelja maksimalne vjerodostojnosti za p i izračunajte njegovu vrijednost za dani uzorak.