

STATISTIKA

PRVI KOLOKVIJ

ZADATAK 1: [20 bodova]

Neka je (X_1, \dots, X_n) jednostavan slučajni uzorak iz distribucije s gustoćom

$$f(x; \alpha) = \frac{\pi^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}+1}} \mathbf{1}_{(\pi, \infty)}(x), \quad \alpha > 0.$$

Nađite UMVU procjenitelj za α .

ZADATAK 2: [8+5+10+4+3=30 bodova]

Neka je (X_1, \dots, X_n) jednostavan slučajni uzorak iz distribucije s gustoćom

$$f(x; \theta) = e^{\theta-x} \mathbf{1}_{(\theta, \infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Za procjenitelj nepoznatog parametra predložen je procjenitelj $\hat{\theta} = X_{(1)}$ - minimalna statistika poretka.

- Je li taj procjenitelj nepristran? Ako nije, popravite ga do nepristranosti.
- Nađite procjenitelj za θ metodom momenata i popravite ga do nepristranosti ako je potrebno.
- Neka je $\hat{\theta}_1$ nepristran procjenitelj iz (a) i $\hat{\theta}_2$ nepristran procjenitelj iz (b). Provjerite koji je od njih efikasniji.
- Postižu li Cramer-Rao granicu? Objasnite.
- Provjerite konzistentnost.

ZADATAK 3: [10 bodova]

Neka je (X_1, \dots, X_n) jednostavan slučajni uzorak iz populacije s funkcijom gustoće

$$f(x; a) = \frac{2}{a^2} e^{-\frac{2}{a}\sqrt{x}} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x).$$

Nađite procjenitelj nepoznatog parametra a metodom maksimalne vjerodostojnosti.

ZADATAK 4: [20 bodova]

Prilikom mjerenja polumjera kruga r , napravi se greška distribuirana kao $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, pri čemu je σ^2 nepoznato. Napravljeno je n nezavisnih mjerenja. Definirajte statistički model i nađite nepristran procjenitelj površine kruga. Je li taj procjenitelj UMVU?

ZADATAK 5: [20 bodova]

Domar svako jutro odlazi u skladište u kojem se nalazi jedna žarulja. Ako je žarulja pregorjela, domar je zamijeni novom. Pretpostavimo da se žarulja ne troši, tj. da je vjerojatnost da domar žarulju koja danas radi sutra ujutro pronađe neispravnu uvijek jednaka - p . Mijenjajući tako žarulje neko vrijeme, domar je bilježio koliko je dana prošlo od dana kada je postavio žarulju, do dana kada ju je zamijenio. Nađite procjenitelj za p metodom maksimalne vjerodostojnosti.

Izračunajte procjenu za p ako je za pet žarulja domar zabilježio vijek trajanja

12, 8, 11, 18, 6.

Je li za procjenu dovoljno znati samo da je prosječan vijek pet zabilježenih žarulja 11 dana? Zašto?