Drugi kolokvij iz Statistike - početak svibnja 2008

U svim zadacima je $\Xi = \big(\xi_1, \cdots, \xi_n\big)$ prost slučajan uzorak opsega n izabran iz populacije s obilježjem, slučajnom varijablom ξ koja ima razdiobu ovisnu o parametru $\theta \in \Theta$.

1. Regularan slučaj eksponencijalne familije gustoća s višedimenzionalnim parametrom. (15%)

2. Intervali povjerenja za višedimenzionalne parametre. Simultani intervali povjerenja. (15%)

3. Obilježje populacije $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Dobiven je uzorak

I_i	$(1,3)$	$(3,5)$	$(5,7)$	$(7,9)$	$(9,11)$
m_i	14	20	30	24	12

.

Odrediti 95% interval povjerenja za m, kao i za σ^2 (Uputa: uzimati sredine intervala za vrijednost varijable!). (10%+10%)

4. Neka $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$. Pokazati, da za svako $\epsilon > 0$ vrijedi

$$\mathsf{P}\left\{p \in \left[\frac{S_n}{n} - \epsilon, \frac{S_n}{n} + \epsilon\right]\right\} \geq 1 - \frac{1}{4n\epsilon^2},$$

zatim u slučaju $n = 1000$ odrediti dužinu intervala povjerenja kojem s vjerojatnosti 0.99 pripada p. (15%+10%)

5. Obilježje $\xi \sim \mathcal{N}(m, 0.1^2)$. Odrediti minimalni opseg uzorka tako, da duljina 99% intervala povjerenja za m ne bude veća od 0.05. (15%)

6. Prilikom sedam kvarova jednoga aparata izmjereni su sljedeći brojevi sati neprekidnog rada aparata: 53, 48, 50, 54, 51, 50, 51. Pod pretpostavkom da je broj sati neprekidnog rada aparata do prekida normalno distribuirana slučajna varijabla, naći 99% interval povjerenja za srednji broj neprekidnog rada aparata! (10%)

7. (Nagradni zadatak). Neka su $\xi_1, \cdots, \xi_{100}$ nezavisne slučajne varijable s eksponencijalnom razdiobom $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Koristeći se CGTom, odrediti 90% interval povjerenja za λ, ako je $\overline{X}_{100} = 120$. (20%)

SRETNO!

Tibor Poganj

RJEŠENJA

1. Bilježnica.

2. Bilježnica, može i Pauše, str. 163.

3. Sukladno uputi, bit će $\overline{x}_{100} = 6$, $\overline{s}^2_{100} = 5.92$. Kako nam je disperzija nepoznata, koristimo Studentovu $t_{99} = \frac{\overline{X}_{100}-m}{\overline{S}_{100}}\sqrt{99}$. Interval povjerenja je $I_m = [5.521, 6.479]$.

Kod disperzije koristimo $\chi^2_{99} = 100\overline{S}^2_{100}\,\sigma^{-2}$ statistiku. Dvostrani interval (nije rečeno kakav, dakle, možete birati!) povjerenja je $[4.57, 7.98]$.

4. Nije teško transformirati slučajan događaj u zagradi:

$$\mathsf{P}\left\{p \in \left[\frac{S_n}{n} - \epsilon, \frac{S_n}{n} + \epsilon\right]\right\} = \mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \le \epsilon\right\} \ge 1 - \frac{npq}{(n\epsilon)^2} = 1 - \frac{pq}{n\epsilon^2}$$

na osnovu nejednakosti Чебышева. Na prošlom satu sam vam pokazao na tri načina da je $pq \le 0.25$, odakle slijedi prva tvrdnja.

Iz uvjeta $1 - 1/(4n\epsilon^2) = 0.99$ za $n = 1000$ dobivamo $\epsilon \approx 0.316$. Dakle, duv zina intervala povjerenja $I_p = 2\epsilon \approx 0.632$.

5. Glišić - Peruničić 420. Neizmijenjeni zadatak.

6. Glišić - Peruničić 417. Neizmijenjeni zadatak.

7. Nađimo momente eksponencijalne razdiobe:

$$\mathsf{E}\xi = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathsf{D}\xi = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Centralni granični teorem kaže, da

$$\zeta^* = \frac{\overline{X}_{100} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{10\lambda}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

jer

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j \sim \mathcal{N}\Big(\mathsf{E}\overline{X}_n, \frac{\mathsf{D}\overline{X}_n}{n}\Big) = \mathcal{N}\Big(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{n\lambda^2}\Big).$$

Sada je lako $\mathsf{P}\big\{|\zeta^\star| \le z_{0.90}\big\} = 2\Phi(z_{0.90}) = 0.90$, tj. $z_{0.90} = 1.645$, i rješavanjem nejednakosti

$$\left|\frac{\overline{X}_{100} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{10\lambda}}\right| \le 1.545$$

odnosno $|1.2\lambda - 1| \le 0.1645$ dolazimo do $I_\lambda = [0.70, 0.97]$.