1. kolokvij iz Statistike
10.05.2010.

1. [**10 bod.**] Definirajte regularan model. Iskažite i dokažite tvrdnju o postojanju donje međe varijance nepristranog procjenitelja u regularnim modelima.

2. [**10 bod.**] Iskažite i dokažite Glivenko-Cantelli teorem. (Dokaz nije nužno provesti u punoj općenitosti, napravite izbor). Objasnite princip supstitucije.

3. [**20 bod.**] Neka je $(X_1, \ldots, X_n)$ jednostavan slučajan uzorak s pripadnom funkcijom distribucije

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ \frac{2\delta x}{\delta^2 + x^2} & , \quad 0 < x < \delta \\ 1 & , \quad x \geq \delta \end{cases} .$$

Metodom momenata nađite procjenitelja nepoznatog parametra δ.

4. Neka je $(X_1, \ldots, X_n)$ nezavisan slučajan uzorak koji dolazi iz populacije s funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}}}{2\lambda^3}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} , \lambda > 0 .$$

Za ocjenu nepoznatog parametra λ uzima se statistika

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Ispitajte da li je $\widehat{\lambda}$

(a) [**10 bod.**] nepristrani procjenitelj,

(b) [**10 bod.**] konzistentan procjenitelj.

5. Neka je $(X_1, \ldots, X_n)$ jednostavan slučajan uzorak s pripadnom funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{b^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2b^2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} .$$

(a) [**10 bod.**] Nađite Fisherovu informaciju danog uzorka, za dani parametar b.

(b) [**10 bod.**] Ispitajte efikasnost statistike $\overline{X}_n$ za nepoznati parametar b.

6. Neka je $(X_1, \ldots, X_n)$ jednostavan slučajan uzorak iz Poissonove distribucije s parametrom λ, $\lambda > 0$.

(a) [**5 bod.**] Nađite procjenitelja S u funkciji od X_1 za

$$g(\lambda) = \lambda^3 \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

(b) [**15 bod.**] Popravite S, koristeći se teoremom *Rao-Blackwell*.