

1. [20 bod.] Neka je (X_1, \dots, X_n) jednostavan slučajni uzorak. Ispitajte koji uvjet mora biti zadovoljen da bi

a) $\hat{\theta} = n\bar{X}_n$

b) $\hat{U} = c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$

bio nepristran procjenitelj varijance slučajne varijable X_i , $i \in \{1, \dots, n\}$.

2. [20 bod.] Neka je (X_1, \dots, X_n) jednostavan slučajni uzorak iz binomne distribucije $\mathcal{B}(10, p)$, $p \in (0, 1)$. Nađite nepristranog procjenitelja S u funkciji od X_1 za

$$g(p) = p(1-p)^9.$$

Nakon toga, popravite S , koristeći se teoremom *Rao-Blackwell*.

3. [20 bod.] Nivoi vode rijeke Dunav, u Vukovaru, mjereni su nezavisno u toku 44 proljetnja razdoblja, u odnosu na nominalni nivo, te su dobiveni sljedeći rezultati:

Nivo [cm]	(0,24)	(25,49)	(50,74)	(75,99)	(100,124)	(125,149)	(150,174)
Broj slučajeva	0	1	3	6	7	6	5
Nivo [cm]	(175,199)	(200,300)	(300,400)	400			
Broj slučajeva	4	8	4	0			

Smatrajući da je nivo vode slučajna varijabla s pripadnom funkcijom gustoće

$$f(x) = \frac{k^{a+1} x^a e^{-kx}}{a!}, \quad x \geq 0$$

metodom momenata nađite procjenitelje nepoznatih parametara a i k .

4. [20 bod.] Na jednom je fakultetu u Osijeku provedena anketa o prihodima studenata ($\times 100$ kuna). Anketirano je 60 studenata, te su dobiveni sljedeći rezultati:

prihodi	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95	95-105
broj studenata	3	5	11	15	9	7	5	3	2

Pod pretpostavkom da primanja studenata imaju normalnu distribuciju sa standardnim odstupanjem $\sigma = 20$, nađite 98% interval povjerenja za srednju vrijednost prihoda studenata sa tog fakulteta.

5. [20 bod.] Neka je gustoća slučajne varijable X dana s

$$f(x) = \begin{cases} 1.7x^{0.7} & x \in (0, 1) \\ 0 & x \notin (0, 1) \end{cases}.$$

Tijekom jednog mjeseca vođitelj autokuće "Lozić" pratio je prodaju automobila "Renault Twingo". Dane u mjesecu podijelio je u četiri intervala, te je dobivene rezultate zabilježio u sljedeću tablicu:

interval	$(0, \frac{1}{4}]$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$	$(\frac{3}{4}, 1]$
učestalost	6	18	20	30

Pearsonovim χ^2 testom s nivoom značajnosti $\alpha = 0.025$ ispitajte da li su dobiveni rezultati suglasni s gore navedenom distribucijom slučajne varijable X .