Sadržaj

1 Funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable

Funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable

Definicija 1.

Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:

- $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$,
- postoji nenegativna realna funkcija realne varijable, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, takva da vrijedi
$$P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}\right) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Funkciju X zovemo apsolutno neprekidna slučajna varijabla na Ω ili samo neprekidna slučajna varijabla. Funkciju f zovemo funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable X ili samo funkcija gustoće slučajne varijable X.

Primjedba 1.

Funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable ima sljedeća bitna svojstva:

1. Nenegativnost: $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
2. Normiranost: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Definicija 2.

Neka je $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ neprekidna slučajna varijabla sa funkcijom gustoće f. Funkciju distribucije $F\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ slučajne varijable X definiramo na sljedeći način:
$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Primjedba 2.

Sljedeću formulu, koja se temelji na razlici vrijednosti funkcije distribucije neprekidne slučajne varijable u rubnim točkama intervala od interesa, koristimo za izračunavanje vjerojatnosti pripadnosti realizacije slučajne varijable X nekom intervalu $I \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(X \in \langle a, b]) = P(X \in \langle -\infty, b] \setminus \langle -\infty, a]) \\ &= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a) \\ &= \int_a^b f(x)\, dx. \end{aligned}$$

2 Zadaci

Zadatak 1.

Svakog radnog dana osoba autobusom odlazi na posao. Autobusi na stanicu dolaze redovito svakih pet minuta. Trenutak dolaska osobe na stanicu smatramo slučajnim trenutkom između dolaska dvaju uzastopnih autobusa. Vrijeme koje protekne od dolaska osobe na stanicu do dolaska prvog sljedećeg autobusa (vrijeme čekanja) modeliramo slučajnom varijablom X za koju je poznato da je vjerojatnost da osoba autobus čeka najviše x vremena proporcionalna tom vremenu čekanja x.

a) Odredite funkciju distribucije i funkciju gustoće slučajne varijable X.

b) Odredite vjerojatnost da osoba autobus čeka

- manje od dvije minute,
- više od tri minute,
- manje od dvije minute ili barem tri minute,
- barem dvije, ali manje od tri minute.

Zadatak 2.

Na stroju koji proizvodi bakrenu žicu povremeno dolazi do smetnji koje uzrokuju nepravilnost na dijelu žice proizvedenom u trenutku smetnje. Duljinu žice (u metrima) između dviju uzastopnih nepravilnosti možemo modelirati slučajnom varijablom s funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \begin{cases} k(1+x)^{-3} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases} .$$

a) Odredite vrijednost konstante k.

b) Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X.

c) Kolika je vjerojatnost da se nepravilnost na žici pojavi između 0.4 i 0.45 metara?

3 Mješovite distribucije

Mješovite distribucije

Slučajna varijabla X ima mješovitu distribuciju ako je njezina funkcija distribucije sljedećeg oblika:

$$F_X(x) = \alpha F_D(x) + (1-\alpha) F_N(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

gdje su $F_D(x)$ i $F_N(x)$ funkcije distribucija neke diskretne i neke neprekidne slučajne varijable, redom.

Zadatak 3.

Kad vozač motornog vozila dođe do znaka STOP on ili odmah nastavlja vožnju ili se zaustavi i čeka dok ne procijeni da sigurno može nastaviti vožnju. Vjerojatnosni model ove situacije treba dozvoljavati da vrijeme čekanja do nastavka vožnje s pozitivnim vjerojatnostima bude nula ili pozitivno. Funkcija distribucije slučajne varijable X kojom modeliramo vrijeme čekanja do nastavka vožnje dana je izrazom

$$F_X(x) = 0.4F_D(x) + 0.6F_N(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

gdje je D diskretna slučajna varijabla sa zakonom razdiobe (distribucijom) $P(D = 0) = 1$, a N neprekidna slučajna varijabla zadana funkcijom gustoće

$$f_N(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}.$$

a) Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X.

b) Kolika je vjerojatnost da vozač odmah nastavi vožnju, a kolika da je vrijeme čekanja do nastavka vožnje najviše 0.5 minuta?

4 Matematičko očekivanje diskretne slučajne varijable

Matematičko očekivanje diskretne slučajne varijable

Definicija 3.

Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretan vjerojatnosni prostor i X slučajna varijabla na njemu. Ako red

$$\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

apsolutno konvergira, tj. ako konvergira red $\sum\limits_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|P(\{\omega\})$, onda kažemo da slučajna varijabla X ima matematičko očekivanje i broj

$$EX = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

zovemo matematičko očekivanje slučajne varijable X.

Teorem 1.

Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretan vjerojatnosni prostor i

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

slučajna varijabla na njemu. Redovi

$$\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) \quad \text{i} \quad \sum_{\mathrm{i}\in\mathbb{N}} \mathrm{x_i p_i}$$

istovremeno ili apsolutno konvergiraju ili apsolutno divergiraju. U slučajnu apsolutne konvergencije sume su im jednake i vrijedi

$$E[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i p_i.$$

5 Zadaci

Zadatak 4.

Odredite matematička očekivanja slučajnih varijabli X, X^2 i X^3, gdje je slučajna varijabla X zadana je sljedećom tablicom distribucije:

a)

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix}.$$

b)

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 5.

Slučajna varijabla X zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 8 \\ a & 1/8 & a - b^2 & b^2 & 1/4 & b \end{pmatrix},$$

gdje su a i b nepoznati parametri. Ako $E[X] = 25/8$, odredite:

(a) vrijednosti parametara a i b,

(b) matematičko očekivanje slučajne varijable $Y = (X - E[X])^2$.

Zadatak 6.

Za zadatke s prošlih vjebi (vježbe 7) odredite sljedeća matematička očekivanja:

a) Zadatak 4 - $E[X]$, gdje je

$$X(\{i,j,k\}) = \max\{i,j,k\}, \quad i,j,k \in \{1,\ldots,7\}.$$

b) $E[X]$, gdje je X slučajna varijabla čija je realizacija broj semafora pored kojih automobil prođe prije zaustavljanja na prvom crvenom svjetlu,

c) $E[Y]$, gdje je $Y = 3X^2 - 3$,

d) $E[Y]$, gdje je $Y = 3 - 2\cos^2 X$.