Sadržaj

1 Pojam i osnovna svojstva vjerojatnosti **1**

1.1 Prostor elementarnih događaja 2

1.2 Klasičan pristup 4

1.3 Statistički pristup 8

1.4 Definicija vjerojatnosti 10

1.5 Osnovna svojstva vjerojatnosti 14

1.6 Vjerojatnost na diskretnom Ω 25

1.7 Primjeri vjerojatnosti na $\mathbb{R}$ 30

1.8 Primjeri vjerojatnosti na $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ 34

1.9 Uvjetna vjerojatnost. Nezavisnost 37

1.10 Zadaci 48

2 Slučajna varijabla **63**

2.1 Diskretna slučajna varijabla 64

2.2 Neprekidna slučajna varijabla 68

2.3 Funkcija distribucije slučajne varijable 72

2.3.1 Funkcija distribucije diskretne slučajne varijable 75

2.3.2 Funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable . . . 76

2.4 Primjeri parametarski zadanih diskretnih distribucija 79

2.4.1 Empirijska distribucija 80

2.4.2 Bernoullijeva distribucija 80

2.4.3 Binomna distribucija 82

2.4.4 Poissonova distribucija 84

2.4.5 Geometrijska distribucija 88
2.4.6 Hipergeometrijska distribucija 89
2.5 Primjeri parametarski zadanih neprekidnih distribucija 91
2.5.1 Uniformna distribucija na intervalu (a, b) 91
2.5.2 Eksponencijalna distribucija 92
2.5.3 Dvostrana eksponencijalna distribucija 94
2.5.4 Normalna distribucija 96
2.6 Numeričke karakteristike slučajne varijable 99
2.6.1 Očekivanje diskretne slučajne varijable 99
2.6.2 Varijanca i ostali momenti. Važne nejednakosti 104
2.6.3 Očekivanje i varijanca nekih parametarskih diskretnih distribucija 109
2.6.4 Očekivanje i momenti neprekidne slučajne varijable . . 116
2.6.5 Očekivanje i varijanca nekih parametarskih neprekidnih distribucija 118
2.7 Neke transformacije slučajnih varijabli 122
2.7.1 Postupak standardizacije 122
2.7.2 Bijektivna transformacija slučajne varijable 124
2.7.3 Primjeri transformacija koje nisu bijektivne 127
2.8 Generiranje slučajnih varijabli 128
2.9 Zadaci 130

3 Dodatak 141
3.1 Osnove algebre skupova 141
3.2 Osnovni kombinatorni rezultati 142
3.3 Ponovljeni red 145

Poglavlje 1

Pojam i osnovna svojstva vjerojatnosti

Pojam vjerojatnosti nastao je u pokušaju brojčanog izražavanja stupnja vjerovanja da će se dogoditi neki zamišljeni događaj. Na primjer, često možemo čuti ili pročitati: "vjerojatnost da će sutra padati kiša je 75%", "vjerojatnost da dobijem prolaznu ocjenu na ispitu mi je oko 50%", "100% sam siguran u pobjedu Blanke Vlašić na ovom natjecanju", itd. Pitanje je: kako nastaju brojevi kojima je izražen stupanj vjerovanja da se dogodi neki događaj i kako ih možemo iskoristiti. Teorija vjerojatnosti dio je matematike koji se bavi ovom problematikom.

Nastanak teorije vjerojatnosti tradicionalno se stavlja u 17. stoljeće iako postoje dokazi da su se već indijski matematičari (3. st. pr. Kr.) bavili pitanjima koja pripadaju današnjoj teoriji vjerojatnosti te da je u 14. stoljeću postojala praksa pomorskog osiguranja koja je omogućila srednjovjekovnim trgovcima da ocjenjuju različite faktore rizika koji se pojavljuju prilikom prekomorskog trgovanja. Prvi matematički rezultati koji se mogu jasno prepoznati kao temelj teorije vjerojatnosti vezani su uz igre na sreću i uz izradu tablica smrtnosti. Više detalja o nastanku teorije vjerojatnosti pogledajte npr. na internetskoj adresi http://www.economics.soton.ac.uk/staff/aldrich/Figures.htm.

Povijesno gledano, koncept vjerojatnosti događaja temelji se na ideji odnosa dijela i cjeline. Pri tome se odnos dijela i cjeline koristi na dva načina:

- klasičan pristup i
- statistički pristup.

U sljedećim poglavljima opisat ćemo detaljno oba povijesna koncepta vjerjatnosti kao i aksiomatsku definiciju vjerojatnosti kojom ćemo se koristiti u ovom kolegiju ali prije toga trebamo upoznati temeljni objekt koji se koristi prilikom matematičkog modeliranja vjerojatnosti. Zvat ćemo ga **prostor elementarnih događaja**.

1.1 Prostor elementarnih događaja

Bacanje igraće kocke jedan je od klasičnih i jednostavnih pokusa kojim ćemo se koristiti u ovom kolegiju za ilustraciju mnogih novih pojmova. Prilikom bacanja igraće kocke kao rezultat jednog bacanja pojavljuje se točno jedan broj iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pri tome je opravdano pretpostaviti jednaku mogućnost pojavljivanja bilo kojeg od navedenih šest brojeva. Koristeći se idejom vjerojatnosti događaja kao odnosa dijela i cjeline, možemo zaključiti da je vjerojatnost pojavljivanja parnog broja pri bacanju igraće kocke ista kao i vjerojatnost pojavljivanja neparnog broja obzirom da je parnih brojeva isto koliko i neparnih u cjelini koju čini navedeni skup. Također, vjerojatnost pojavljivanja broja dva mora biti ista kao i vjerojatnost pojavljivanja broja pet jer oni čine po veličini jednake dijelove cjeline.

Na osnovu principa odnosa dijela i cjeline, uočavamo da je prvi korak prema definiranju vjerojatnosti događaja spoznavanje cjeline. Naime, da bismo imali mjeru za vjerojatnost da se dogodi ono što nas konkretno zanima, moramo prvo znati što je to "sve" što se može dogoditi za naš pokus ili promatranje, tj. što čini "cjelinu". Zato ćemo, da bismo počeli graditi matematički model, uz jedan pokus (odnosno promatranje) vezati skup koji kao elemente sadrži sve što se može realizirati kad izvedemo pokus (promatranje) i zvat ćemo ga **skup svih mogućih ishoda** ili **skup elementarnih događaja**. Najčešće takav skup označavamo Ω. Jedina pretpostavka na skup elementarnih događaja je da je neprazan i da zaista sadrži sve što se može realizirati u pokusu (odnosno promatranju) koje nas zanima.

Ako skup svih mogućih ishoda Ω sadrži samo jedan element, onda pokus ima samo jednu moguću realizaciju pa točno znamo što će se dogoditi kad ga izvedemo. Zbog toga takav pokus zovemo **deterministički pokus**.

Primjer 1.1 (DETERMINISTIČKI POKUS)**.**

a) *Rezultat zagrijavanja vode pod normalnim atmosferskim tlakom na temperaturu od* $100°C$ *ima samo jedan ishod: voda isparava, tj. voda iz tekućeg prelazi u plinovito agregatno stanje.*

b) *Miješanje vode i jestivog ulja pri normalnim atmosferskim uvjetima ima jedinstveni ishod - stvara se emulzija ulja i vode pri čemu ulje pliva na vodi.*

c) *Pritiskanje papučice "gasa" pri vožnji tehnički ispravnog automobila ima jedinstveni ishod - brzina automobila se povećava. Analogno, pritiskanje kočnice u istim uvjetima ima za ishod smanjenje brzine kretanja automobila.*

Prostore elementarnih događaja koji imaju više elemenata (barem dva, a može i beskonačno mnogo!) koristimo ako ne možemo sa sigurnošću znati realizaciju pokusa (promatranja). Za takav pokus kažemo da ima slučajne ishode, tj. da je pokus **slučajan**.

Primjer 1.2 (SLUČAJAN POKUS)**.**

a) **Bacanje igraće kocke** - *ako nas zanima ishod jednog bacanja igraće kocke, "sve", tj. prostor elementarnih događaja je skup* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) **Slučajan izbor znamenke** - *ako nas zanima ishod slučajnog izbora jedne znamenke u dekadskom sustavnu, prostor elementarnih događaja je skup* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

c) **Loto 6 od 45** - *ako nas zanima rezultat izvlačenja u igri "Loto 6 od 45", prostor elementarnih događaja je skup* $\{\{i_1, \ldots, i_6)\} : i_1, \ldots, i_6 \in \{1, \ldots, 45\}\}$.

d) Ako prognoziramo sutrašnju temperaturu zraka u Osijeku (u hladovini), prostor elementarnih događaja možemo postaviti na različite načine. Jedna mogućnost je, npr. $\Omega = [-50, 50]$*, ili* $\Omega = [-100, 100]$*. Zapravo, možemo pretpostaviti i da je* $\Omega = \mathbb{R}$*. Važno je da* Ω *bude neprazan skup i da stvarno sadrži sve moguće realizacije prognoziranja. Naravno da je ponekad praktično ugraditi već u* Ω *što više informacija o pokusu koji modeliramo, tj. suziti* Ω*, ali to nije nužno za modeliranje.*

Jednom kad smo odredili skup elementarnih događaja slučajnog pokusa, tj. Ω, treba izraziti stupanj vjerovanja da se neki događaj dogodi. Međutim, kako opisujemo događaj kao matemtički objekt? Do sada znamo da skup elementarnih događaja sadrži sve moguće ishode pokusa. Sadrži li i sve događaje koji su nama interesantni? Na primjer, u pokusu bacanja igraće kocke zanima nas da li će se okrenuti paran broj. Očigledno je da će se dogoditi paran broj ako se realizira bilo koji od ishoda 2, 4 ili 6. Dakle, ovaj događaj je prirodno modelirati kao podskup od Ω i to kao skup $\{2, 4, 6\}$. Očigledno je da ćemo događaje vezane uz neki slučajan pokus modelirati kao podskupove od Ω. Općenito u teoriji vjerojatnosti neki podskupovi skupa Ω nisu prikladni da ih zovemo događajima ali za sada nećemo detaljno opisivati familiju događaja, to ćemo ostaviti za poglavlje 1.4. Bit će nam dovoljno znati da je **događaj** vezan uz dani slučajan pokus uvijek **podskup skupa elementarnih događaja** tog pokusa.

U nastavku navodimo povijesne pristupe za modeliranje vjerojatnosti događaja (klasičan i statistički) kao i definiciju vjerojatnosti koja se danas standardno koristi u matematičkoj teoriji.

1.2 Klasičan pristup

U praksi često srećemo primjere pokusa u kojima je **skup elementarnih događaja konačan** i svaki pojedini ishod je **jednako moguć**. Veliki broj klasičnih igara na sreću odgovara ovim pretpostavkam. Na primjer:

- za bacanje novčića (idealan slučaj, tj. nema varanja!) skup elementarnih događaja je $\Omega = \{pismo, glava\}$ i svaki od tih ishoda je jednako moguć,
- za bacanje igraće kocke (idealan slučaj, tj. nema varanja!) skup elementarnih događaja je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i svaki od tih ishoda je jednako moguć,
- za "Loto 6 od 45" skup elementarnih događaja je $\Omega = \{\{i_1, \ldots, i_6)\} : i_1, \ldots, i_6 \in \{1, \ldots, 45\}\}$ i realizacija svake šestorke iz Ω je jednako moguća,
- za rulet je skup elementarnih događaja $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 36\}$ i svaki od tih ishoda je jednako moguć.

Kod takvih pokusa moguće je prebrojati sve ishode koji su povoljni za događaj i sve ishode koji nisu povoljni za događaj pa se omjer ta dva broja često u praksi koristi za izražavanje stupnja vjerovanja u realizaciju događaja. Evo nekoliko primjera.

Primjer 1.3. *U slučajnom pokusu bacanja igraće kocke, na temelju pretpostavke o istoj mogućnosti da se okrene bilo koji broj, kaže se da je šansa* $3 : 3$ *da se okrene paran broj. Dakle, stupanj vjerovanja u pojavu događaja je izražen stavljanjem u omjer broja ishoda koji su povoljni i broja ishoda koji su nepovoljni. Međutim, isti omjer se može iskazati i na mnogo drugih načina, npr.* $1 : 1$.

Primjer 1.4. *U skupini ljudi iz koje se sasvim slučajno bira jedna osoba nalazi se* 30 *muškaraca i* 60 *žena. U tom pokusu šansa da izaberemo ženu je* $60 : 30$. *Ovaj omjer se takoder može prikazati na mnogo drugih načina, tj. kao* $6 : 3$ *ili* $2 : 1$.

Omjer broja povoljnih i nepovoljnih događaja ilustriran u ovim primjerima ne stavlja u odnos dio i cjelinu nego dva dijela iste cjeline - dio koji znači realizaciju događaja koji nas zanima i dio koji znači da se taj događaj nije realizirao. Klasičan pristup modeliranju vjerojatnosti ne računa vjerojatnost na taj način nego određuje vjerojatnost kao mjeru koja dio suprotstavlja cjelini, tj. dijeli broj ishoda povoljnih za događaj brojem svih mogućih ishoda.

Klasičan način računanja vjerojatnosti

Pretpostavke na pokus	konačan skup elementarnih događaja svi ishodi jednako mogući
Događaj	$A \subseteq \Omega$
Vjerojatnost događaja A	kvocijent broja elemenata skupa A i broja elemenata skupa Ω, tj. $P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)}$

Ovdje je $P(A)$ oznaka za vjerojatnost događaja A, dok je $k(A)$ oznaka za broj elemenata skupa A.

Problem određivanja vjerojatnosti po klasičnom pristupu sada se svodi na problem prebrojavanja elemenata skupova. Dakle, da bismo mogli računati vjerojatnost na ovaj način, morat ćemo nešto znati o rješavanju kombinatornih problema.

Primjer 1.5. *Skup svih mogućih ishoda bacanja igraće kocke je skup* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Budući je* Ω *konačan skup i kocka je za igru (pa je pretpostavka da je pravilno izrađena, tj. mogućnost realizacije bilo kojeg od brojeva jedan do šest je jednaka) ovdje možemo primijeniti klasičan pristup određivanja vjerojatnosti. Na primjer, vjerojatnost događaja "na kocki se realizirao paran broj", koji predstavljamo skupom* $A = \{2, 4, 6\}$ *svih parnih elemenata skupa* Ω, *jednaka je vjerojatnosti događaja "na kocki se realizirao neparan broj", koji predstavljamo skupom* $B = \{1, 3, 5\}$ *svih neparnih elemenata skupa* Ω. *Osim toga, vjerojatnosti događaja* A *i* B *jednake su vjerojatnosti bilo kojeg događaja koji možemo predstaviti nekim tročlanim podskupom skupa* Ω.

Primjer 1.6. *Pretpostavimo da se u šeširu nalazi sedam kuglica jednakih karakteristika (od istog su materijala, jednake mase i promjera). Poznato je da su kuglice numerirane brojevima od jedan do sedam te da su dvije kuglice crvene, a pet kuglica zelene boje. Promotrimo pokus nasumičnog izvlačenja jedne kuglice iz šešira. Na temelju načina provođenja postavljenog pokusa i sadržaja šešira možemo promatrati sljedeće slučajeve:*

a) ***Zanimaju nas ishodi slučajnog pokusa temeljeni na broju kojim je kuglica numerirana*** *- u ovom slučaju skup elementarnih događaja je skup*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Primjenom klasičnog pristupa računanja vjerojatnosti svi događaji koji se mogu predstaviti jednakobrojnim podskupovima skupa Ω *su jednako vjerojatni. No, kako u šeširu ima više kuglica numeriranih neparnim brojevima, vjerojatnost događaja "izvučena je kuglica numerirana neparnim brojem", koji predstavljamo skupom* $A = \{1, 3, 5, 7\}$*, veća je od vjerojatnosti događaja "izvučena kuglica numerirana je parnim brojem", koji predstavljamo skupom* $B = \{2, 4, 6\}$.

b) ***Zanimaju nas ishodi slučajnog pokusa temeljeni na boji kuglice*** *- u ovom slučaju skup elementarnih događaja je skup*

$$\Omega = \{C, Z\},$$

pri čemu C *označava događaj "izvučena kuglica je crvene boje", a* Z *događaj "izvučena kuglica je zelene boje". Budući u šeširu ima dvije crvene i pet zelenih kuglica, vidimo da elementarni događaji* C *i* Z *nisu jednako vjerojatni, tj.*

$$P(C) = \frac{2}{7}, \quad P(Z) = \frac{5}{7}.$$

Klasičan koncept pripisivanja vjerojatnosti pojedinim događajima odigrao je veliku ulogu u razvoju teorije vjerojatnosti ali nije uvijek primjenjiv. Čak i ako je prostor elementarnih događaja konačan, ne moraju biti svi ishodi jednako mogući. Zamislimo samo da igramo 1000 igara s kockom te da se u 90% bacanja okrenuo broj 6. Tko je od nas sklon vjerovati da su u tom pokusu svi ishodi jednako mogući?

Primjer 1.7. *Slučajni pokusi u kojima nije ispunjen uvjet jednake vjerojatnosti svih elementarnih događaja su npr.*

a) *bacanje nepravilno izrađenog (tzv. nestandardnog) novčića (tj. novčića pri čijem je bacanju favorizirana realizacija ili pisma ili glave),*

b) *bacanje nepravilno izrađene (tzv. nestandardne) igraće kocke (tj. kocke pri čijem je bacanju favorizirana realizacija jednog ili više brojeva).*

1.3 Statistički pristup

Ideja određivanja stupnja vjerovanja u pojavu događaja kao dijela od cjeline ili kao omjer dijela povoljnog za događaj i dijela nepovoljnog za događaj može se iskoristiti i u drugom kontekstu. Klasičan primjer za to je prognoziranje pobjednika nekog sportskog susreta na temelju rezultata prethodnih natjecanja istih suparnika. Npr., ako je uzajamnim natjecanjima u tenisu igrač A dobio igrača B u 9 od 11 susreta, njegova šansa za pobjedu u sljedećem susretu najčešće se prognozira kao $9:2$. Princip primijenjen u ovom primjeru temelji se na mogućnosti nezavisnog ponavljanja uvijek istog pokusa, a stupnj vjerovanja u pojavu događaja izražava se na temelju broja pojavljivanja i nepojavljivanja događaja prilikom ponavljanja. Izražavanje stupnja vjerovanja u pojavu događaja moglo bi se numerički izraziti također stavljanjem u omjer dijela i cjeline tj. kao $\frac{9}{11}$.

Za računanje vjerojatnosti koja slijedi ovu logiku iskoristit ćemo pojmove frekvencije i relativne frekvencije događaja.

Definicija 1.1. *Pokus je ponovljen n puta. Ako se pri tome događaj A dogodio n_A puta, broj n_A zovemo* **frekvencija događaja** A. *Broj*

$$f_A(n) = \frac{n_A}{n}$$

zovemo **relativna frekvencija događaja** A.

Iz definicije frekvencije slijedi da je frekvencija n_A cijeli broj za koji vrijedi

$$0 \leq n_A \leq n,$$

a relativna frekvencija $f_A(n)$ racionalan broj takav da je:

$$0 \leq \frac{n_A}{n} \leq 1.$$

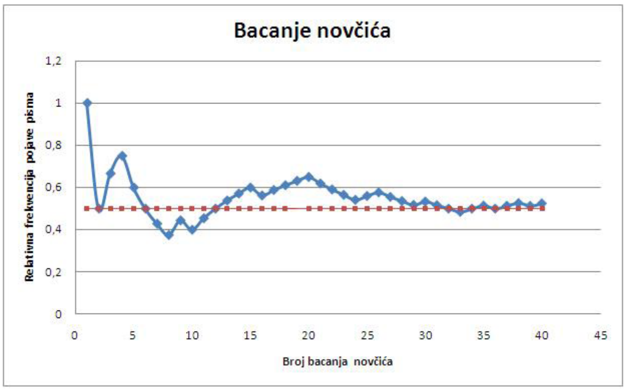
Primjer 1.8. *Promotrimo slučajan pokus bacanja pravilno izrađenog novčića kojemu je pridružen dvočlani skup elementarnih događaja $\Omega = \{p, g\}$, gdje je p oznaka za događaj "palo je pismo", a g oznaka za događaj "pala je glava". U pokušaju definiranja vjerojatnosti* *da će pri jednom bacanju pasti pismo možemo koristiti klasičan pristup. Na taj način određujemo vjerojatnost da padne pismo kao*

$$P(p) = \frac{1}{2}.$$

Međutim, kako znamo da je novčić pravilno izrađen? Iskustveno znamo da to možemo provjeriti na sljedeći način: ako isti pokus ponovimo n puta, gdje je $n \in \mathbb{N}$ velik broj, kod pravilno izrađenog se novčića pismo i glava realiziraju približno jednak broj puta. U tom slučaju će biti $n_p \approx n/2$ i $n_g \approx n/2$. Prema tome, relativna frekvencija realizacije pisma iznosit će

$$\frac{n_p}{n} \approx \frac{1}{2}.$$

U ovakvom slučaju razumno je uzeti $1/2$ kao vjerojatnost pojavljivanja pisma pri jednom bacanju novčića, tj. prihvatiti pretpostavku da je novčić pravilno izrađen.



Slika 1.1: Relativna frekvencija pojave pisma u ovisnosti o broju bacanja "n" za jedan niz bacanja.

Iskustvo nas uči da se kod nezavisnog ponavljanja istog pokusa puno puta relativna frekvencija nekog događaja stabilizira u okolini nekog broja. To svojstvo zovemo **statistička stabilnost relativnih frekvencija**. Na primjer, ako za niz relativnih frekvencija događaja A ($f_A(n), n \in \mathbb{N}$) (n predstavlja broj ponavljanja pokusa) vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} f_A(n) = p_A, \quad p_A \in [0, 1],$$

tada je taj niz statistički stabilan.

Statistički pristup određivanja vjerojatnosti baziran je upravo na tom pricipu. Naime, ako slučajan pokus ima svojstvo statističke stabilnosti relativnih frekvencija, tada za vjerojatnost proizvoljnog događaja A vezanog uz taj pokus uzimamo realan broj $P(A) = p_A$ oko kojeg se grupiraju relativne frekvencije $f_A(n)$ tog događaja.

1.4 Definicija vjerojatnosti

Oba navedena povijesna pristupa u određivanju vjerojatnosti imaju veliku ulogu u primjeni rezultata teorije vjerojatnosti u praksi, ali ni jedan od njih ne daje općenitu definiciju vjerojatnosti. Iz dosadašnjih razmatranja jasno je da vjerojatnost treba definirati za podskupove skupa elementarnih događaja. Zapravo, vjerojatnost ćemo definirati kao jednu mjeru skupova (podskupova od Ω) slično kao što je duljina jedna mjera skupova na pravcu ili površina jedna mjera skupova u ravnini. Iz teorijskih razloga (zainteresirani čitatelj dodatne informacije može pronaći u svakoj knjizi iz teorije mjere, npr. [3], [14]) nećemo vjerojatnost definirati uvijek za svaki podskup od prostora elementarnih događaja nego ćemo definitari dovoljno bogatu familiju podskupova od Ω koja će činiti temelj za definiciju vjerojatnosti. Takvu familiju podskupova od Ω zvat ćemo **familijom događaja**, a zahtjev koji mora ispunjavati je dan definicijom 1.2.

Definicija 1.2. *Neka je dan neprazan skup Ω. Familija $\mathcal{F}$ podskupova skupa Ω je* **σ-algebra skupova na Ω** *ako vrijedi:*

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

ii) *ako je $A \in \mathcal{F}$ onda je i $A^c \in \mathcal{F}$,*

iii) *ako je dana prebrojiva familija skupova $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$, onda $\mathcal{F}$*

sadrži i njihovu uniju, tj.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Ako je Ω skup elementarnih događaja nekog pokusa, bilo koja σ-algebra na njemu može igrati ulogu familije događaja tog pokusa.

Svojstvo ii) naziva se zatvorenost σ-algebre na komplementiranje (tj. ako sadrži neki skup, sadrži i njegov komplement), a svojstvo iii) zatvorenost σ-algebre na prebrojivu uniju (tj. ako imamo prebrojivo mnogo skupova iz dane σ-algebre, onda će i njihova unija biti element te σ-algebre).

Iako je σ-algebra definirana samo s tri zahtjeva, ona može biti vrlo bogata. Zapravo, ona sadrži sve skupove koji će nam biti interesantni u primjenama, tj. skupove koji nastaju primjenom konačno ili prebrojivo mnogo standardnih skupovnih operacija nad skupovima koji su njeni elementi. Prije svega, uočimo da je cijeli Ω sigurno element σ-algebre, obzirom da je on komplement praznog skupa. Nadalje, σ-algebra sigurno sadrži i sve konačne unije svojih elemenata jer se konačna unija uvijek može nadopuniti do prebrojive korištenjem prebrojivo mnogo praznih skupova. Primjerom 1.9 ilustriran je način na koji možemo provjeriti zatvorenost σ-algebre i za neke druge slučajeve.

Primjer 1.9.

a) Ako su $A, B \in \mathcal{F}$, prema svojstvu zatvorenosti σ-algebre na konačnu uniju je skup $A \cup B$ također iz $\mathcal{F}$. Prema De Morganovom zakonu za komplementiranje konačne unije skupova i svojstvu ii) *iz definicije σ-algebre, vrijedi*

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \in \mathcal{F}.$$

Dakle, σ-algebra sadrži i presjek komplemenata svoja dva elementa. Obzirom da za svaki skup vrijedi $(A^c)^c = A$, onda slijedi da σ-algebra sadrži i presjeke svaka svoja dva elementa.

b) Pokažimo da je σ-algebra zatvorena i na prebrojive presjeke svojih elemenata. Naime, ako je $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ prebrojiva familija skupova, prema De Morganovom zakonu za komplementiranje prebrojive unije skupova i svojstvu ii) *iz definicije σ-algebre vrijedi*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c \in \mathcal{F}.$$

Time je dokazana zatvorenost σ-algebre na prebrojivo mnogo presjeka svojih elemenata.

c) Ako su $A, B \in \mathcal{F}$, prema svojstvu zatvorenosti σ-algebre na komplementiranje slijedi da su A^c i B^c elementi σ-algebre $\mathcal{F}$. Zbog zatvorenosti σ-algebre na konačne presjeke slijedi da je

$$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{F}.$$

Dakle, σ-algebra sadrži i razliku svoja dva elementa.

Obzirom na vezu koja postoji između povezivanja rečenica jezika i skupovnih operacija, σ-algebra zadovoljava potrebe koje nastaju u primjeni. Naime, čim sadrži neke skupove, sadrži i one skupove koji nastaju primjenom uobičajenih rečenica za njihovo kombiniranje. U sljedećem primjeru ilustrirana je ova tvrdnja na najčešće korištenim rečenicama.

Primjer 1.10. *Od svih nastavnika zaposlenih u nekoj srednjoj školi biramo jednu osobu te promatramo sljedeće događaje:*

- A = *izabrana osoba predaje matematiku,*
- B = *izabrana osoba je ženskog spola.*

Standardne skupovne operacije ilustrirane na primjeru ovih dvaju događaja opisujemo sljedećim rečenicama:

- $A \cup B$ = *izabrana osoba predaje matematiku ili je ženskog spola,*
- $A \cap B$ = *izbrana osoba predaje matematiku i ženskog je spola*
  (izabrana osoba je nastavnica matematike),
- $A \setminus B$ = *izabrana osoba predaje matematiku i nije ženskog spola*
  (izabrana osoba je nastavnik matematike),
- $B \setminus A$ = *izabrana osoba je ženskog spola i ne predaje matematiku*
  (izabrana žena ne predaje matematiku),

- A^c = *izabrana osoba ne predaje matematiku,*
- B^c = *izabrana osoba nije ženskog spola, tj. izabrana osoba je muškog spola.*

Najmanja σ-algebra na nekom skupu Ω je tzv. **trivijalna σ-algebra** $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, dok je najveća ona koja sadrži sve podskupove od Ω, tj. **partitivni skup skupa** Ω, označavamo ga $\mathcal{P}(\Omega)$.

Kad smo definirali skup elementarnih događaja slučajnog pokusa, odabrat ćemo neku σ-algebru na njemu. Zvat ćemo je **familija događaja** tog pokusa. Pojedine elemente familije događaja zovemo jednostavno **događaji**. Na odabranoj familiji događaja definirat ćemo vjerojatnost aksiomatskom definicijom 1.3.

Definicija 1.3. *Neka je Ω neprazan skup elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ-algebra događaja na njemu. Funkciju*

$$P\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

koja zadovoljava sljedeća tri svojstva zovemo **vjerojatnost** *na Ω. Tražena svojstva su:*

A1. **nenegativnost vjerojatnosti**: $P(A) \geq 0$, *za sve* $A \in \mathcal{F}$,

A2. **normiranost vjerojatnosti**: $P(\Omega) = 1$,

A3. ***σ-aditivnost vjerojatnosti***: *ako je dana prebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ čim je $i \neq j$, tada vrijedi*

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Svojstva A1. - A3. *nazivamo aksiomima vjerojatnosti.*

Na temelju rezultata poglavlja 1.2 vidimo da vjerojatnost koja je definirana na konačnom skupu elementarnih događaja korištenjem klasičnog pristupa udovoljava svim zahtjevima iz definicije (1.3)[1].

Aksiomatski pristup daje puno veće mogućnosti u načinu zadavanja vjerojatnosti. Vidimo da je moguće zadati vjerojatnost ne samo na konačnom skupu, nego na bilo kojem nepraznom skupu s pripadnom σ-algebrom, a na konačnom skupu možemo jasno zadati vjerojatnost i u slučaju da nemamo jednako moguće ishode. Na primjer, ukoliko smo dugo bilježili rezultate bacanja jedne igraće kocke te utvrdili da se niti jednom nije okrenuo broj 3, dok se broj 2 pojavljuje približno dvostruko češće nego brojevi 1, 4, 5 i 6, koristeći statistički pristup logično bi bilo pretpostaviti da ishodi nisu jednako mogući te definirati vjerojatnost kao funkciju P koja zadovoljava zahtjeve iz definicije vjerojatnosti ali ujedno ima sljedeća svojstva: $P(\{3\}) = 0$, $P(\{2\}) = 2P(\{1\})$, $P(\{1\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\})$.

Definicija 1.4. *Neka je Ω neprazan skup, $\mathcal{F}$ σ-algebra događaja na njemu, a P vjerojatnost na Ω. Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zovemo* **vjerojatnosni prostor**.

1.5 Osnovna svojstva vjerojatnosti

Na temelju zahtjeva navedenih u aksiomatskoj definiciji vjerojatnosti mogu se dokazati mnoga druga svojstva koja će automatski biti zadovoljena čim znamo da je zadanom funkcijom definirana vjerojatnost. U ovom poglavlju navedena su i dokazana neka od njih koja se najčešće koriste u praksi.

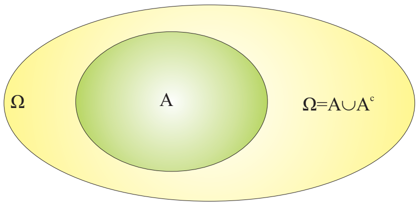
S1. VJEROJATNOST SUPROTNOG DOGAĐAJA

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dani vjerojatnosni prostor i $A \in \mathcal{F}$ događaj. Suprotni događaj događaju A je njegov komplement, tj. događaj A^c. Vrijedi:

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

[1]Prvu aksiomatsku definiciju vjerojatnosti dao je Kolmogorov 1933. godine

Dokaz. Skup Ω možemo prikazati kao uniju disjunktnih skupova A i A^c (slika 1.2).



Slika 1.2: Skup Ω kao unija disjunktnih skupova A i A^c.

Primjenom σ-aditivnosti i normiranosti vjerojatnosti slijedi:

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \ \Rightarrow \ P(A^c) = 1 - P(A).$$

Primjer 1.11. *U šeširu se nalazi dvadeset crvenih i dvije zelene kuglice. Slučajan pokus sastoji se od izvlačenja jedne kuglice iz šešira. Pokus se ponavlja, ali tako da se nakon svakog izvlačenja kuglica vraća u šešir i pomiješa s ostalim kuglicama u šeširu. Odredimo koliko je puta potrebno ponoviti izvlačenje da bi vjerojatnost barem jednog pojavljivanja zelene kuglice u tim ponavljanima bila veća od* 0.5*. U tu svrhu praktično je koristiti svojstvo vjerojatnosti suprotnog događaja. Naime, definirajmo događaj A kao*

A = "u n ponavljanja slučajnog pokusa barem je jednom izvučena zelena kuglica".

Njemu suprotan događaj je: A^c = "u n ponavljanja slučajnog pokusa niti jednom nije izvučena zelena kuglica", tj. A^c = "u n ponavljanja slučajnog pokusa svaki puta je izvučena crvena kuglica".

Vjerojatnost događaja A^c jednostavno je izračunati principom uzastopnog prebrojavanja. Ako smo izvukli n kuglica, broj mogućih ishoda je 22^n, a broj povoljnih, tj. broj ishoda u kojima su sve izvučene kuglice crvene, je 20^n. Odavde slijedi da je

$$P(A^c) = \left(\frac{10}{11}\right)^n.$$

Primjenom svojstva vjerojatnosti suprotnog događaja vidimo da je

$$P(A) = 1 - \left(\frac{10}{11}\right)^n.$$

Sada ćemo rješavanjem nejednadžbe

$$1 - \left(\frac{10}{11}\right)^n > 0.5$$

vidjeti da za $P(A) > 0.5$ *treba ponoviti pokus barem* 8 *puta.*

S2. Vjerojatnost praznog skupa

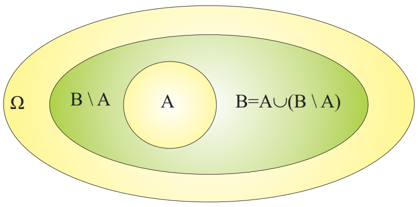
Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dani vjerojatnosni prostor. Tada vrijedi $P(\emptyset) = 0$.

Dokaz. Obzirom da je $\emptyset = \Omega^c$, primjena svojstva normiranosti vjerojatnosti i vjerojatnosti suprotnog događaja dokazuje ovu tvrdnju.

S3. Monotonost vjerojatnosti

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor te $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $A \subseteq B$. Tada je $P(A) \leq P(B)$.

Dokaz. Ako je $A \subseteq B$, tada se B može prikazati kao unija disjunktnih skupova A i $(B \setminus A)$ (slika 1.3).



Slika 1.3: Skup B kao unija disjunktnih skupova A i $(B \setminus A)$.

Obzirom da je vjerojatnost nenegativna funkcija, slijedi da je

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A).$$

Iz ovog dokaza također se može zaključiti da je moguće izračunati vjerojatnost razlike skupova B i A kao razliku njihovih vjerojatosti, tj. ako je $A \subseteq B$ tada je

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

Primjer 1.12. *Odredimo vjerojatnost da iz skupa svih dvoznamenkastih brojeva na slučajan način izvučemo broj djeljiv s tri koji istovremeno nije djeljiv s devet. U tu svrhu promotrimo sljedeće skupove/događaje:*

- *skup svih dvoznamenkastih brojeva, koji u ovom slučaju ima ulogu skupa elementarnih događaja:*

$$\Omega = \{10x + y : x \in \{1, \ldots, 9\},\ y \in \{0, \ldots, 9\}\}, \quad k(\Omega) = 90,$$

- *skup svih dvoznamenkastih brojeva djeljivih brojem tri:*

$$T = \{(10x + y) \in \Omega : 3|(x + y)\}, \quad k(T) = 30,$$

- *skup svih dvoznamenkastih brojeva djeljivih brojem devet:*

$$D = \{(10x + y) \in \Omega : 9|(x + y)\}, \quad k(D) = 10.$$

Budući je svaki broj koji je djeljiv brojem devet ujedno djeljiv i brojem tri, zaključujemo da je $D \subset T$. Primjenom klasične definicije vjerojatnosti sada slijedi da je

$$P(D) = \frac{k(D)}{k(\Omega)} = \frac{1}{9},\ P(T) = \frac{k(T)}{k(\Omega)} = \frac{1}{3}.$$

Odavde možemo izračunati vjerojatnost skupa koji nas zanima. Naime, skup $T \setminus D$ sadrži sve dvoznamenkaste brojeve djeljive brojem tri koji nisu djeljivi brojem devet.

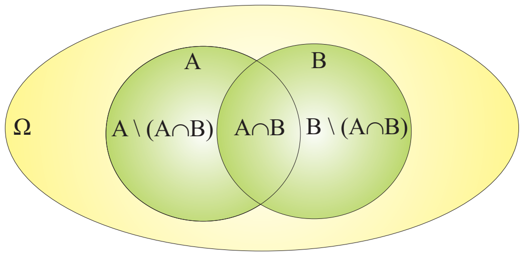
$$P(T \setminus D) = P(T) - P(D) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

S4. Vjerojatnost unije događaja

O vjerojatnosti unije skupova govori treći zahtjev iz definicije vjerojatnosti, tj. σ-aditivnost vjerojatnosti. Međutim, tim zahtjevom su obuhvaćene samo familije disjunktnih skupova. Ovo svojstvo daje formulu za izračun vjerojatnosti unije dva skupa i u slučaju kada skupovi nisu disjunktni.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dani vjerojatnosni prostor te $A, B \in \mathcal{F}$. Tada vrijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$



Slika 1.4: Skup $(A \cup B)$ kao unija disjunktnih skupova.

Dokaz. Unija skupova A i B može se prikazati kao unija disjunktnih skupova na sljedeći način (slika 1.4):

$$A \cup B = (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)\,.$$

Odavde slijedi:

$$P(A \cup B) = P\left(B \setminus (A \cap B)\right) + P\left(A \setminus (A \cap B)\right) + P(A \cap B).$$

Obzirom da je $(A \cap B) \subseteq A$ i $(A \cap B) \subseteq B$, vrijedi:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Primjer 1.13. *Želimo izračunati vjerojatnost slučajnog odabira dvoznamenkastog broja koji je djeljiv brojem tri ili brojem sedam. Sada uz skup elementarnih događaja*

$$\Omega = \{10x + y : x \in \{1, \ldots, 9\},\ y \in \{0, \ldots, 9\}\}\,, \quad k(\Omega) = 90$$

i skup dvoznamenkastih brojeva djeljivih brojem tri:

$$T = \{(10x + y) \in \Omega : 3|(x + y)\}\,, \quad k(T) = 30,$$

promatramo i skup svih dvoznamenkastih brojeva djeljivih brojem sedam, tj. skup

$$S = \{(10x + y) \in \Omega : 7|(2x + 3y)\}\,, \quad k(S) = 13.$$

Događaj koji nas zanima je $(T \cup S)$, a njegovu ćemo vjerojatnost odrediti primjenom formule za vjerojatnost unije. U tu svrhu trebamo odrediti i kardinalni broj skupa svih dvoznamenkastih brojeva djeljivih i brojem tri i brojem sedam, tj. skupa

$$T \cap S = \{(10x + y) \in \Omega : 3|(x + y),\ 7|(2x + 3y)\}\,.$$

Budući je $(T \cap S) = \{21, 42, 63, 84\}$, *tj.* $k(T \cap S) = 4$, *slijedi:*

$$P(T \cup S) = P(T) + P(S) - P(T \cap S) = \frac{1}{3} + \frac{13}{90} - \frac{4}{90} = \frac{39}{90} = \frac{13}{30}.$$

Formula za računanje vjerojatnosti unije više skupova može se dati i općenito, tj. za uniju konačno mnogo skupova. Ta formula poznata je pod imenom **Sylvesterova formula**. Njen dokaz moguće je provesti koristeći formulu za vjerojatnost unije dva skupa i princip matematićke indukcije (vidi [30]).

Vezano uz vjerojatnost unije dva skupa valja uočiti da vrijedi nejednakost

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B),$$

gdje su $A, B \in \mathcal{F}$, a $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dani vjerojatnosni prostor. Ovakva nejednakost također se može generalizirati i to ne samo na uniju konačno mnogo događaja nego i na uniju prebrojivo mnogo događaja. To generalizirano svojstvo zove se σ-subaditivnost vjerojatnosti.

S5. σ-subaditivnost vjerojatnosti

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dani vjerojatnosni prostor i neka je $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, prebrojiva familija događaja tog prostora. Tada je

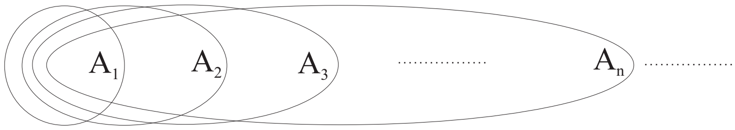
$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Dokaz. Iz zadane familije događaja $(A_i, i \in I)$, $I \subseteq \mathbb{N}$, formirat ćemo novu familiju međusobno disjunktnih događaja na sljedeći način (slika 1.5, slika 1.6):

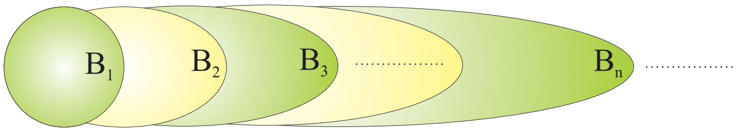
$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \setminus A_1, \quad \ldots, \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i, \ldots.$$

Tako definirani skupovi su međusobno disjunktni, ali također vrijedi:

$$B_i \subseteq A_i, \quad \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} A_i.$$



Slika 1.5: Familija događaja $(A_n, n \in \mathbb{N})$.



Slika 1.6: Familija disjunktnih događaja $(B_n, n \in \mathbb{N})$.

Dakle,

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \sum_{i\in I} P(B_i) \leq \sum_{i\in I} P(A_i).$$

Primjer 1.14. *Automat za igre na sreću programiran je tako da je vjerojatnost pojavljivanja prirodnog broja jednaka* 2^{-n}, *tj.*

$$P(\{n\}) = \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Odredimo vjerojatnost pojavljivanja bilo kojeg prirodnog broja manjeg ili jednakog od $(n+1)$, *tj. vjerojatnost događaja*

$$S = \{1, 2, \dots, n+1\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Skup S *može se na različite načine prikazati kao konačna unija familije disjunktnih ili nedisjunktnih skupova, npr. ako definiramo skupove*

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1,2\}, \\ A_2 &= \{2,3\}, \\ A_3 &= \{3,4\}, \\ &\vdots \\ A_n &= \{n, n+1\}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

vidimo da za konačnu familiju skupova $(A_i, i \leq n)$, $n \in \mathbb{N}$, *vrijedi:*

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad P(A_i) = \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{3}{2^{i+1}}, \quad \forall i \leq n.$$

Međutim, $P(S)$ ne možemo dobiti samo sumiranjem svih $P(A_i)$ jer oni nisu disjunktni. Ako S prikažemo kao konačnu uniju jednočlanih skupova (uočimo da su oni ujedno disjunktni!), onda lako možemo izračunati $P(S)$:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} \{i\}, \;\; P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

Svojstvo σ-aditivnosti vjerojatnosti primijenjeno na uniju skupova A_i u ovom primjeru možemo potvrditi na osnovu očigledne nejednakosti:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(S) = \frac{2^n - 1}{2^n} \leq \frac{3(2^n - 1)}{2^{n+1}}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Naime,

$$\frac{3(2^n - 1)}{2^{n+1}} = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

S6. Neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na rastuću familiju događaja

Ovo svojstvo omogućava računanje vjerojatnosti unije rastuće familije događaja kao limesa niza vjerojatnosti pojedinačnih događaja u familiji. Preciznije, neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dani vjerojatnosni prostor i neka je $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ rastuća familija događaja, tj. $A_n \in \mathcal{F}$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i

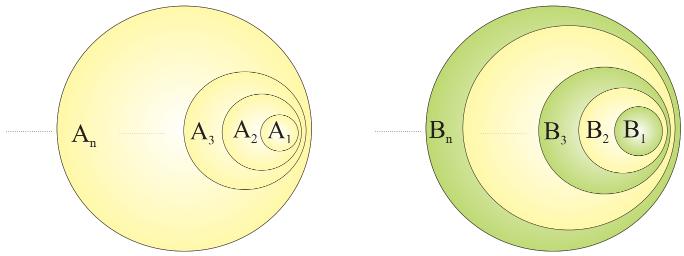
$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \ldots$$

Tada vrijedi da je

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Dokaz. Prvo uočimo da $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$ postoji. Naime, zbog monotonosti vjerojatnosti, niz brojeva $(P(A_n), n \in \mathbb{N})$ je monotono rastući. Obzirom da se radi o nizu vjerojatnosti, taj niz brojeva je sadržan u segmentu $[0, 1]$, tj. ograničen je. Budući je monoton i ograničen niz realnih brojeva konvergentan navedena granična vrijednost zaista postoji. Od zadane rastuće familije događaja $(A_n, n \in \mathbb{N})$ formirat ćemo novu familiju događaja $(B_n, n \in \mathbb{N})$ međusobno disjunktnih događaja na sljedeći način (slika 1.7):

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \setminus A_1, \quad \ldots B_n = A_n \setminus A_{n-1}, \ldots .$$



Slika 1.7: Rastuća familija $(A_n, n \in \mathbb{N})$ i disjunktna familija $(B_n, n \in \mathbb{N})$.

Osim što je $(B_n, n \in \mathbb{N})$ familija disjunktnih događaja, vrijedi i sljedeće:

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Dakle, vrijedi:

$$P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i),$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Primjer 1.15. *Pretpostavimo da se radi o istom automatu za igre na sreću kao u primjeru 1.14, ali zanima nas vjerojatnost pojavljivanja bilo kojeg neparnog broja, tj. vjerojatnost skupa*

$$N = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}.$$

Vjerojatnost skupa N možemo izračunati na nekoliko načina. Ovdje ilustriramo pristup koji koristi neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na rastuću familiju događaja.

Ako N prikažemo kao prebrojivu uniju familije skupova $(A_n, n \in \mathbb{N})$, gdje su skupovi A_n definirani na sljedeći način:

$$\begin{array}{lcl} A_1 & = & \{1\}, \\ A_2 & = & \{1,3\}, \\ A_3 & = & \{1,3,5\}, \\ & \vdots & \\ A_n & = & \{1,3,5,\ldots,2n-1\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ & \vdots & \end{array},$$

očito je $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$, tj. $(A_n, n \in \mathbb{N})$ je rastuća familija skupova i vrijedi:

$$\begin{aligned} N &= \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \\ P(A_n) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{2i-1}} = \frac{2^{2n}-1}{3 \cdot 2^{2n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

što znači da je

$$P(N) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}-1}{3 \cdot 2^{2n-1}} = \frac{2}{3}.$$

S7. Neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na padajuću familiju događaja

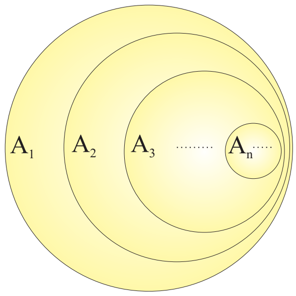
Ovo svojstvo omogućava računanje vjerojatnosti presjeka padajuće familije skupova kao limesa niza vjerojatnosti pojedinačnih skupova u familiji. Preciznije, neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dani vjerojatnosni prostor i neka je $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ padajuća familija događaja, tj. $A_n \in \mathcal{F}$ za sve n i

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots A_n \supseteq A_{n+1} \ldots.$$

Tada vrijedi da je

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

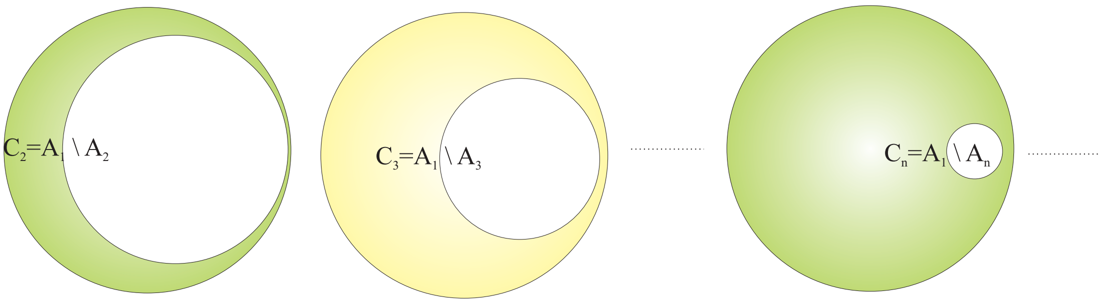
Dokaz. Prikažimo slikom padajuću familiju događaja iz $\mathcal{F}$:



Slika 1.8: Padajuća familija događaja $(A_n, n \in \mathbb{N})$.

Od zadane padajuće familije događaja $(A_n, n \in \mathbb{N})$ formirat ćemo novu familiju $(C_n, n \in \mathbb{N})$ koja će biti monotono rastuća te ćemo u dokazu iskoristiti svojstvo neprekidnosti vjerojatnosti u odnosu na monotono rastuće familije događaja (svojstvo S6). Familiju $(C_n, n \in \mathbb{N})$ definiramo na sljedeći način (slika 1.8 i slika 1.9):

$$C_1 = \emptyset, C_2 = A_1 \setminus A_2, C_3 = A_1 \setminus A_3, \ldots, C_n = A_1 \setminus A_n, \ldots$$



Slika 1.9: Rastuća familija događaja $\{C_1 = \emptyset, (C_n, n \geq 2, n \in \mathbb{N})\}$.

Za ovako definiranu rastuću familiju događaja vrijedi sljedeće:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = A_1 \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right),$$

$$P\left(A_1 \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right) \right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right) = \lim_{i \to \infty} P(C_i) = \lim_{i \to \infty} [P(A_1) - P(A_i)].$$

Dakle, vrijedi:

$$P\left(A_1 \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) = P(A_1) - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) - \lim_{i\to\infty} P(A_i),$$

odakle slijedi tvrdnja.

Primjer 1.16. *Pretpostavimo da se radi o istom automatu za igre na sreću kao u primjeru 1.14. Odredimo s kojom se vjerojatnošću pojavljuje bilo koji paran broj veći ili jednak od unaprijed zadanog prirodnog broja n. Skupove A_n definiramo na sljedeći način:*

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{2,4,6,8,10,\ldots\},\\
A_2 &= \{4,6,8,10,\ldots\},\\
A_3 &= \{6,8,10,\ldots\},\\
&\vdots\\
A_n &= \{2n, 2(n+1), 2(n+2), \ldots\}, \quad n \in \mathbb{N},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

To znači da treba odrediti $P(A_n)$. Osim toga, odredimo vjerojatnost presjeka prebrojive familije $(A_n, n \in \mathbb{N})$. Očito je $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, tj. $(A_n, n \in \mathbb{N})$ je padajuća familija skupova sa svojstvom da je

$$P(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}.$$

Korištenjem neprekidnosti vjerojatnosti u odnosu na padajuću familiju događaja vidimo da je

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}} = 0,$$

što je i logično obzirom da je presjek svih skupova A_i zapravo prazan (ne postoji paran broj koji je veći od svakog prirodnog broja.)

1.6 Vjerojatnost na diskretnom Ω

Neka je Ω konačan ili prebrojiv skup elementarnih događaja. Takve skupove označavat ćemo na sljedeći način:

$$\Omega = \{\omega_i : i \in I_\Omega,\ I_\Omega \subseteq \mathbb{N}\}.$$

Ovdje je I_Ω skup indeksa. Iz definicije vjerojatnosti znamo da je vjerojatnost funkcija kojoj je domena σ-algebra događaja. Dakle, da bismo zadali konkretnu vjerojatnost na Ω, potrebno je zadati vrijednosti te funkcije na svakom skupu A sadržanom u pridruženoj σ-algebri. **Kod konačnih i prebrojivih skupova elementarnih događaja pretpostavit ćemo da je pridružena σ-algebra točno jednaka partitivnom skupu od Ω, tj. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.** U nastavku će se pokazati da je to, za naše potrebe, prirodno i moguće ispoštovati. Vjerojatnosni prostor kod kojega je Ω konačan ili prebrojiv skup, a pridružena σ-algebra je $\mathcal{P}(\Omega)$, zvat ćemo **diskretan vjerojatnosni prostor**.

U ovom poglavlju pokazat ćemo kako se funkcija na $\mathcal{P}(\Omega)$, kojom je zadana vjerojatnost, može odrediti zadavanjem vrijednosti samo na jednočlanim podskupovima od Ω, tj. elementima od Ω. Obzirom da $\mathcal{P}(\Omega)$ ima mnogo više elemenata nego Ω (ako Ω ima $k(\Omega)$ elemenata, onda je $2^{k(\Omega)}$ broj elemenata od $\mathcal{P}(\Omega)$) na taj način smo u velikoj mjeri pojednostavili zadavanje vjerojatnosti.

Preciznije, ako imamo zadan diskretan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, tada za svaki pojedini $\omega_i \in \Omega$ znamo izračunati vjerojatnost

$$p_i = P(\{\omega_i\}).$$

Koristeći svojstvo σ-aditivnosti vjerojatnosti, pomoću ovako dobivenog niza brojeva $(p_i, i \in I_\Omega)$, $I_\Omega \subseteq \mathbb{N}$, možemo izračunati vjerojatnost bilo kojeg događaja $A = \{\omega_i, i \in I_A\}$:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i \in I_A} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i \in I_A} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i \in I_A} p_i.$$

Dakle, poznavanje vrijednosti vjerojatnosti na jednočlanim podskupovima od Ω automatski određuje vjerojatnost bilo kojeg događaja tog vjerojatnosnog prostora. Time niz brojeva koji predstavljaju vjerojatnosti jednočlanih podskupova od Ω preuzima ključnu ulogu u opisivanju i zadavanju vjerojatnosti na diskretnom vjerojatnosnom prostoru.

Valja uočiti da navedeni niz brojeva $(p_i, i \in I_\Omega)$ ima sljedeća dva svojstva:

1. $p_i \geq 0$ za sve $i \in I_\Omega$,
2. $\sum\limits_{i \in I_\Omega} p_i = 1$.

Ovaj rezultat možemo iskoristiti prilikom zadavanja vjerojatnosti na diskretnom vjerojatnosnom prostoru, kao što je ilustrirano sljedećim primjerima.

Primjer 1.17 (**Konačno mnogo jednako mogućih ishoda**). *Pretpostavimo da slučajan pokus ima konačno mnogo jednako mogućih ishoda te neka je* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, *tj.* $k(\Omega) = n$. *Definirajmo funkciju* $P\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ *na sljedeći način:*

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}, \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

$$A = \{\omega_j : j \in I_A,\, I_A \subseteq \{1, \ldots, n\}\}, \quad P(A) = \sum_{i \in I_A} P(\{\omega_i\}).$$

Na ovaj način je zadana funkcija na $\mathcal{P}(\Omega)$ *koja zadovoljava sve zahtjeve definicije vjerojatnosti (provjerite!). Osim toga, ovako definirana vjerojatnost podudara se s klasičnim pristupom određivanja vjerojatnosti.*

Primjer 1.18. *Neka je skup elementarnih događaja slučajnog pokusa* $\Omega = \mathbb{N}$. *Definirajmo funkciju na* σ*-algebri* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *na sljedeći način:*

$$P(\{i\}) = 2^{-i}, \quad i \in \mathbb{N},$$

$$A = \{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\}, \quad P(A) = \sum_{i_j \in A} P(\{i_j\}).$$

Dokažimo da je na ovaj način definirana vjerojatnost na $\mathbb{N}$.

1. *Očigledno je* $P(A) \geq 0$ *za sve* $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
2. *Provjerimo je li* $P(\mathbb{N}) = 1$. *Koristimo formulu za sumu geometrijskog reda s kvocijentom* $\frac{1}{2}$ *i prvim članom* $\frac{1}{2}$*:*

$$P(\mathbb{N}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (2^{-i}) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

3. *Da bismo provjerili σ-aditivnost uzmimo familiju $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ disjunktnih podskupova skupa $\mathbb{N}$. Neka je*

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1j}, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}, \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2j}, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}, \\ &\vdots \\ A_n &= \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nj}, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pri tome je

$$P(A_n) = \sum_{j=1}^{\infty} (2^{-a_{nj}}) \leq 1.$$

Uočimo također da, zbog disjunktnosti skupova A_i, među brojevima $a_{nj} \in \mathbb{N}$ nema istih pa se njihova unija može prikazati kao

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1j}, \ldots, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2j}, \ldots, a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nj}, \ldots\}.$$

Vjerojatnost unije dobije se sumiranjem brojeva oblika (2^{-k}) po svim $k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Obzirom da je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \mathbb{N}$, niz $\left(2^{-k}, k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ je podniz geometrijskog niza s kvocijentom $1/2$. Time je i red koji se dobije sumiranjem članova tog niza konvergentan i vrijedi (vidi poglavlje 3.3 u Dodatku):

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-a_{nj}} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Ovakav način zadavanja vjerojatnosti na diskretnom vjerojatnosnom prostoru može se primijeniti uvijek. Ako je s $\Omega = \{\omega_i, i \in I_\Omega \subseteq \mathbb{N}\}$ dan prostor elementarnih događaja, potreban je samo niz brojeva $(p_i, i \in I_\Omega)$ sa svojstvima

1. $p_i \geq 0$ za sve $i \in I_\Omega$,
2. $\sum_{i \in I_\Omega} p_i = 1$

da bismo definirali vjerojatnost na tom diskretnom Ω kao

$$P(A) = \sum_{i \in I_A} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i \in I_A} p_i.$$

Naime, vrijedi sljedeća tvrdnja:

Neka je s $(p_i, i \in I)$, $I \subseteq \mathbb{N}$ zadan niz realnih brojeva sa svojstvima:

1. $p_i \geq 0$ **za sve** $i \in I$,
2. $\sum\limits_{i \in I} p_i = 1$,

te neka je Ω bilo koji skup koji ima $k(I)$ elemenata. Tada je izrazom

$$P(A) = \sum_{i \in I_A} p_i, \quad A \subseteq \Omega, \tag{1.1}$$

gdje je I_A skup indeksa elemenata iz Ω koji pripadaju skupu A, dobro definirana vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Dokaz. Neka je $\Omega = \{\omega_i, i \in I\}$ dan neprazan skup. Dokažimo da je funkcijom (1.3) dobro definirana vjerojatnost.

1. Očigledno je $P(A) \geq 0$ za sve $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.
2. $P(\Omega) = \sum\limits_{i \in I} p_i = 1$.
3. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ disjunktni podskupovi od Ω i $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Tada familija skupova $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ čini jednu particiju skupa A. Koristeći rezultate teorije ponovljenih redova (poglavlje 3.3 u Dodatku) možemo zaključiti da vrijedi:
$$P(A) = \sum_{j \in I_A} p_j = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in I_{A_i}} p_j = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i),$$
pa vrijedi σ-aditivnost.

Primjer 1.19. *Dan je niz od tri broja: $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{3}$. Možemo li ovaj niz nadopuniti četvrtim brojem tako da ta četiri broja dobro definiraju vjerojatnost na diskretnom vjerojatnosnom prostoru u smislu ovog poglavlja? Odgovor je potvrdan. Naime, navedena tri broja su pozitivna i manja od 1, a suma im iznosi $\frac{21}{30}$, što je još uvijek manje od 1. Dakle, ako za* *četvrti broj izaberemo razliku* $1 - \frac{21}{30} = \frac{9}{30}$*, rezultati ovog poglavlja garantiraju da možemo naći vjerojatnosni prostor i pomoću ovih brojeva konstruirati vjerojatnost. Npr. uzmemo* $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ *i* $P(\{1\}) = \frac{1}{6}$, $P(\{2\}) = \frac{1}{5}$, $P(\{3\}) = \frac{1}{3}$, $P(\{4\}) = \frac{9}{30}$.

1.7 Primjeri vjerojatnosti na $\mathbb{R}$

Postoji mnoštvo slučajnih pokusa za koje je prirodno pretpostaviti da prostor elementarnih događaja sadrži neki interval.

Primjer 1.20. *Vrijeme (mjereno u sekundama) koje postiže atletičar u utrci na* 100 *metara može se modelirati kao rezultat slučajnog pokusa s vrijednostima iz intervala* $[0, 13]$. *Obzirom da se vrijeme na utrkama danas mjeri vrlo precizno, nije mudro modelirati rezultate ovakvog pokusa kao diskretan skup. Zbog toga uzimamo npr.* $\Omega = [0, 13]$ *ili neki veći skup koji sadrži interval* $[0, 13]$.

Vjerojatnost u ovakvim vjerojatnosnim prostorima ne može se odrediti koristeći niz vrijednosti koje ona postiže na pojedinačim ishodima već i zbog činjenice da skup elementarnih događaja nije prebrojiv. Jedan od načina kako je moguće zadati vjerojatnost na intervalima, a koji je prikladan za računanje, je korištenje nenegativne realne funkcije definirane na skupu $\mathbb{R}$ koja s osi apscisa zatvara jediničnu površinu. Naime, odaberemo takvu nenegativnu realnu funkciju i zadamo vjerojatnost nekog skupa A kao površinu koju zatvara graf te funkcije s osi apscisa nad skupom A.

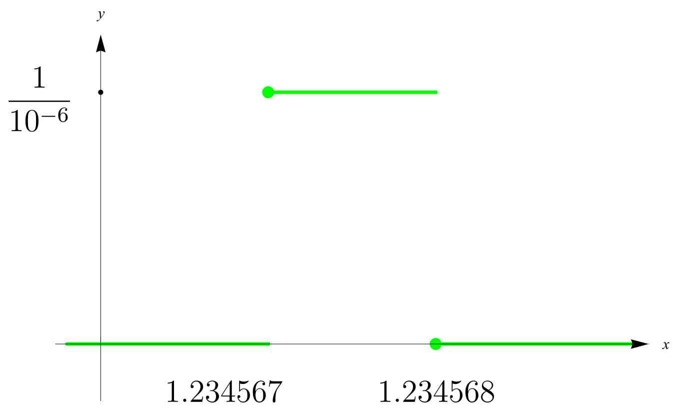
Primjer 1.21. *Ako računalo izvodi neku numeričku proceduru s točnošću na* 6 *decimanih mjesta i daje rezultat* 1.234567*, onda je stvaran rezultat izračuna zapravo neki broj koji je element intervala* $[1.234567, 1.234568)$ *pa je skup elementarnih događaja* $\Omega = [1.234567, 1.234568)$. *Osim toga, s jednakom vjerojatnošću to može biti bilo koji broj iz navedenog intervala. U skladu sa shvaćanjem vjerojatnosti kao dijela od cjeline (ako su svi ishodi jednako mogući), vjerojatnost da je stvaran rezultat iz intervala* $A \subseteq \Omega$ *se u ovom primjeru može zadati kao kvocijent duljine intervala* A *i duljine cijelog* Ω:

$$P(A) = \frac{d(A)}{d(\Omega)}.$$

Ovako definirana funkcija na σ-algebri koja sadrži sve podintervale od Ω zadovoljavat će zahtjeve postavljene u definiciji vjerojatnosti ([30])[2] *te je time dobro definirana vjerojatnost. Zovemo je* **geometrijska vjerojatnost** *na* $\Omega = [1.234567, 1.234568)$.

Geometrijska vjerojatnost iz ovog primjera može se zadati i na drugi način, pomoću nenegativne realne funkcije i površine koju zatvara graf te funkcije s osi apscisa nad intervalom A. Neka je zadana funkcija (slika 2.14)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10^{-6}} & , \quad x \in [1.234567, 1.234568) \\ 0 & , \quad x \notin [1.234567, 1.234568) \end{cases} .$$



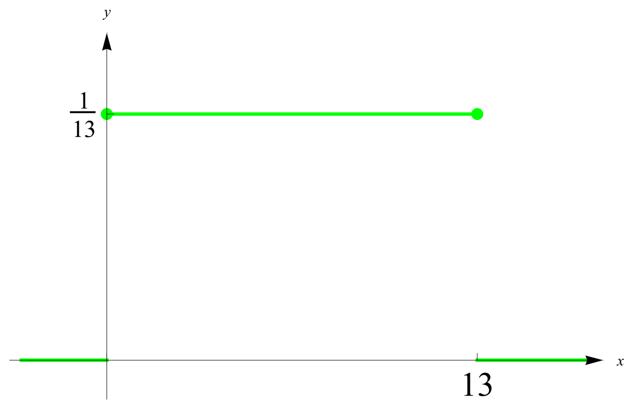
Slika 1.10: Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{10^{-6}} \cdot \mathrm{I}_{[1.234567,1.234568)}(x)$.

Površina koju zatvara graf ove funkcije s osi x nad nekim intervalom A jednaka je duljini intervala A pomnoženoj s visinom pravokutnika tj. $\dfrac{1}{10^{-6}}$ *što upravo odgovara geometrijski zadanoj vjerojatnosti intervala A.*

Prednost zadavanja vjerojatnosti pomoću nenegativne funkcije u odnosu na vjerojatnost kao kvocijent duljina intervala je u tome što se može generalizirati i na probleme u kojima nema razloga pretpostavljati da su svi ishodi jednako mogući.

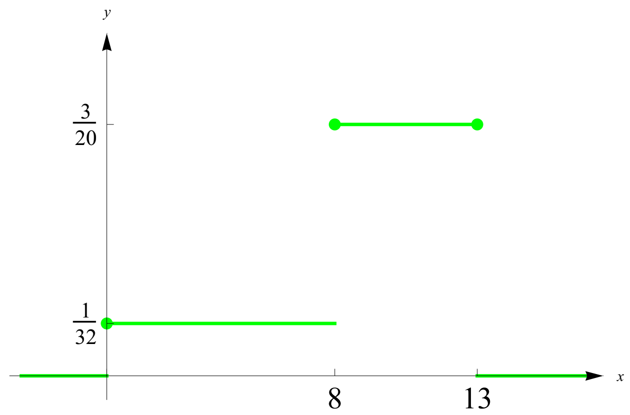
[2] Provjeriti da vrijede prva dva zahtjeva iz definicije vjerojatnosti, te treći zahtjev za konačno mnogo disjunktnih intervala.

Primjer 1.22. *U primjeru 1.20 nije razumno očekivati istu vjerojatnost da atletičar postigne vrijeme u intervalu* $[0, 5]$ *kao u intervalu* $[8, 13]$ *iako su duljine tih intervala jednake. Naime, poznato je da srednjoškolci uobičajeno postižu vrijeme od oko* 12 *sekundi pri trčanju na* 100 *metara, a rezultati atletičara se uglavnom kreću između* 9 *i* 10 *sekundi. Vjerojatnost koja je definirana na intervalu* $[0, 13]$ *korištenjem principa jednako mogućih ishoda imala bi pripadni graf funkcije kao što je prikazano na slici 1.11.*



Slika 1.11: Graf funkcije koja uniformno definira vjerojatnost na [0, 13]

Preferiranje intervala $[8, 13]$ *nad ostatkom možemo npr. predočiti grafom funkcije prikazanim slikom 1.12.*



Slika 1.12: Graf funkcije koja definira vjerojatnost na [0, 13] uz preferiranje intervala [8, 13].

Da bi realnom funkcijom mogli modelirati vjerojatnost na opisani način bitno je da površina što je zatvara njen graf s osi x iznad cijelog Ω bude jednaka 1, a graf funkcije može rasti i padati na Ω tako da odražava stupanj vjerovanja da se pojedini intervali realiziraju u stvarnom pokusu. Ako želimo neki interval preferirati nad ostalim područjem, iznad njega i vrijednosti funkcije kojom opisujemo vjerojatnost trebaju biti veće.

U ovom trenutku nećemo se baviti odgovorom na pitanje je li vjerojatnost određena funkcijom čiji je graf dan na slici 1.12 u skladu s problemom opisanim u primjeru ili treba raditi dodatne modifikacije. O usklađenosti modela sa stvarnim problemima bit će riječi u drugom dijelu knjige koji se bavi statistikom.

Općenito, neka je dana realna funkcija f realne varijable, tj. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je

- $f(x) \geq 0$,
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Neka je $\mathcal{B}$ najmanja σ-algebra podskupova od $\mathbb{R}$ koja sadrži sve intervale. Izrazom

$$P(A) = \int_A f(x)\,dx, \quad A \in \mathcal{B},$$

definirana je vjerojatnost na $\mathcal{B}$. Matematička teorija koja omogućava dokaz ove činjenice može se naći npr. u [30].

Ukoliko je skup elementarnih događaja samo jedan interval Ω koji je pravi podskup od $\mathbb{R}$, potrebno je da $\int_\Omega f(x)\,dx$ bude jednak 1. To možemo lako zadovoljiti tako da na Ω^c stavimo vrijednosti funkcije $f(x)$ na nulu.

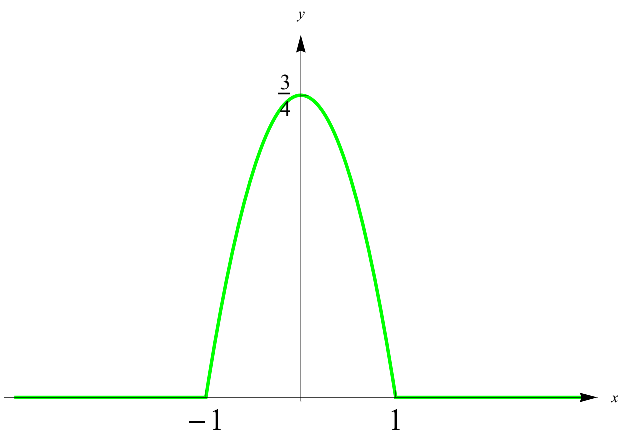
Primjer 1.23. *Pokažimo da pomoću funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (slika 1.13) definirane formulom*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2) & , \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & , \quad x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

možemo definirati vjerojatnost na skupu $\mathbb{R}$, tj. da je funkcija f nenegativna i normirana:

- NENEGATIVNOST - *iz analitičke definicije funkcije f slijedi da je $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,*
- NORMIRANOST - *površina ispod grafa funkcije f (pogledati sliku) nad skupom $\mathbb{R}$ iznosi:*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}\,(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} = 1.$$



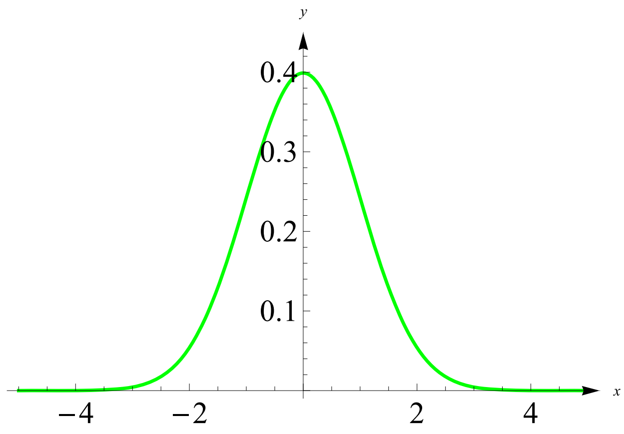
Slika 1.13: Graf funkcije $f(x) = \dfrac{3}{4}\,(1-x^2)\cdot \mathrm{I}_{[-1,1]}(x)$.

Primjer 1.24. *Važan primjer nenegativne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pomoću koje možemo definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}$ je funkcija definirana formulom (slika 1.14)*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

1.8 Primjeri vjerojatnosti na $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

Ukoliko je prostor elemetarnih događaja pravokutnik ili neki drugi geometrijski lik, pri modeliranju vjerojatnosti može se prenijeti logika nastala pri modeliranju vjerojatnosti na intervalima. Slično se može primijeniti i na prostore Ω koji su zadani kao geometrijska tijela.



Slika 1.14: Gaussova krivulja - graf funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Primjer 1.25. *U pokusu slučajnog izbora točke iz kružnog područja radijusa r vjerojatnost možemo zadati pomoću kvocijenta dijela i cjeline. Tako je vjerojatnost da bude izabrana točka iz kružnog odsječka A, površine $s(A)$, dana izrazom:*

$$P(A) = \frac{s(A)}{r^2\pi}.$$

Naime, $s(\Omega) = r^2\pi$ predstavlja površinu cijelog kruga, a površina dijela koji nas zanima označena je sa $s(A)$.

Primjer 1.26. *Pri slučajnom izboru točke iz kugle radijusa r vjerojatnost također možemo zadati pomoću kvocijenta dijela i cjeline. Tako je vjerojatnost da bude izabrana točka iz kuglinog isječka A volumena $v(A)$ dana izrazom:*

$$P(A) = \frac{v(A)}{\frac{4}{3}r^3\pi}$$

obzirom da je $v(\Omega) = \dfrac{4}{3}r^3\pi$ volumen cijele kugle.

Za modeliranje vjerojatnosti koje preferiraju neke dijelove skupa elementarnih događaja u odnosu na druge dijelove istih dimenzija (površine odnosno volumena) također se može prenijeti logika zadavanja vjerojatnosti pomoću nenegativne realne funkcije. U slučaju kad je $\Omega = \mathbb{R}^2$ ($\Omega = \mathbb{R}^3$) radi se o nenegativnoj realnoj funkciji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ($f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) koja mora zadovoljati sljedeće svojstvo:

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 1.$$

Uočimo da je za dvodimenzionalne Ω ovo dvostruki integral, pa postavljeni zahtjev zapravo znači da volumen tijela koje je omeđeno grafom funkcije f i ravninom (x_1, x_2) na dijelu za koji vrijedi $(x_1, x_2) \in \Omega$ mora iznositi 1. Za trodimenzionalne Ω ovo je trostruki integral. Vjerojatnost skupa[3] $A \subseteq \Omega$ je tada dana izrazom

$$P(A) = \int_A f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Primjer 1.27. *Pokažimo da pomoću funkcije $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirane formulom*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}\,(x^2 + y) & , \quad (x,y) \in [-1,1] \times [0,1] \\ 0 & , \quad \textit{za ostale } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

možemo definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}^2$, tj. da je funkcija f nenegativna i normirana:

- *nenegativnost - iz analitičke definicije funkcije f slijedi da je $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,*
- *normiranost - volumen kojeg graf funkcije f zatvara sa skupom $\mathbb{R}^2$, tj. volumen ispod grafa funkcije f nad pravokutnikom $[-1,1] \times [0,1]$ iznosi*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{3}{5} \int_0^1 \int_{-1}^1 (x^2 + y)\,dx\,dy = 1.$$

Prema tome, vjerojatnost skupa $A = [0,1] \times [0, 0.5] \subset \mathbb{R}^2$ računamo na sljedeći način:

$$P(A) = \int_A f(x,y)\,dx\,dy = \frac{3}{5} \int_0^{0.5} \int_0^1 (x^2 + y)\,dx\,dy = \frac{7}{40}.$$

[3] O obliku σ-algebre na kojoj se može definirati vjerojatnost pogledati [30]. Specijalno, u dvodimenzionalnom slučaju vjerojatnost se na ovaj način može definirati na najmanjoj σ-algebri koja sadrži sve skupove oblika $(a,b) \times (c,d)$, gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$.

Primjer 1.28. *Pokažimo da pomoću funkcije* $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definirane formulom*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{8}\, z^2(x+y) & , \quad (x,y,z) \in [0,2]\times[0,1]\times[-2,0] \\ 0 & , \quad \text{za ostale } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

možemo definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}^3$*, tj. da je funkcija* f *nenegativna i normirana:*

- *nenegativnost - iz analitičke definicije funkcije* f *slijedi da je* $f(x,y,z) \geq 0$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
- *normiranost - volumen kojeg graf funkcije* f *zatvara sa skupom* $\mathbb{R}^3$ *iznosi*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{8}\int\limits_{-2}^{0}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{2} z^2(x+y)\,dx\,dy\,dz = 1.$$

Prema tome, vjerojatnost skupa $B = [0,1]\times[0,1]\times[-1,0] \subset \mathbb{R}^2$ *računamo na sljedeći način:*

$$P(B) = \int\limits_{B} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{8}\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1} z^2(x+y)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{24}.$$

1.9 Uvjetna vjerojatnost. Nezavisnost

Primjer 1.29. *Nakon izleta napravili smo* 5 *kopija istog CD-a s fotografijama izleta ali su pri tome samo tri kopije uspjele, a na CD-ove nismo stavili nikakve oznake!? Moramo izabrati jedan od njih i imamo vremena za provjeru jednog CD-a. Izabrali smo jedan, provjerili i utvrdili da je neispravan. Međutim, u žurbi nam se taj provjereni CD pomiješao s ostalima i sada moramo uzeti jedan bez provjere, pa kako bude. Mislite li da bi vjerojatnost odabira ispravnog CD-a u drugom biranju bila veća da se provjereni CD nije pomiješao s ostalima? Analizirajmo ove slučajeve odvojeno.*

1. *Pomiješani slučaj. Označimo D={Ako znam da je u prvom pokušaju izvučen loš CD, u drugom je izvučen dobar}. Obzirom da je nakon prvog izvlačenja sve ponovo pomiješano, pri drugom uzimanju CD-a ponovo smo na početku, tj. rezultat prvog izvlačenja uopće nema utjecaja na rezultat drugog izvlačenja. Dakle,*

$$P(D) = \frac{3}{5}.$$

2. *Nepomiješani slučaj. Ovaj puta je drugi pokus bitno promijenjen u odnosu na prvi. Sada znamo da u drugom pokušaju biramo od četiri CD-a, od kojih su tri ispravna, pa je*

$$P(D) = \frac{3}{4}.$$

U oba slučaja prethodnog primjera pojavljuju se dva izvlačenja CD-a. U pomiješanom slučaju vjerojatnost u drugom izvlačenju ne ovisi o rezultatima prvog izvlačenja i zapravo je ista kao u prvom izvlačenju. Kažemo da drugo izvlačenje **ne ovisi** o prvom izvlačenju i možemo ih promatrati odvojeno. U nepomiješanom slučaju rezultat prvog izvlačenja utječe na vjerojatnost u drugom izvlačenju i nije mudro ta dva izvlačenja promatrati kao sasvim odvojene cjeline. Da bismo mogli proučavati ovakve probleme definirat ćemo tzv. **uvjetne vjerojatnosti** koje će opisivati rezultate drugog izvlačenja i to: uvjetnu vjerojatnost uz uvjet da je u prvom pokušaju izvučen dobar CD i uvjetnu vjerojatnost uz uvjet da je u prvom pokušaju izvučen loš CD.

Definicija 1.5. *Neka je dan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i događaj* $A \in \mathcal{F}$ *koji ima pozitivnu vjerojatnost, tj.* $P(A) > 0$*. Funkcija* $P(\cdot \mid A)$ *definirana na* $\mathcal{F}$ *izrazom*

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad B \in \mathcal{F}, \tag{1.2}$$

je **uvjetna vjerojatnost uz uvjet da se dogodio događaj** A.

Ovako definirana funkcija zadovoljava sve zahtjeve postavljene u definiciji vjerojatnosti, tj. na taj način je definirana jedna vjerojatnost na Ω (provjerite svojstva iz aksiomatske definicije vjerojatnosti!). Ova činjenica ima za posljedicu da se na $P(B \mid A)$ mogu primijeniti sva svojstva vjerojatnosti koja su dana u potpoglavlju 1.5. Tako npr. vrijedi:

- $P(\emptyset \mid A) = 0$,
- $P(B^c \mid A) = 1 - P(B \mid A)$,
- za $B_1 \subseteq B_2$ je $P(B_1 \mid A) \leq P(B_2 \mid A)$, itd.

U pojedinim slučajnim pokusima uvjetne vjerojatnosti se modeliraju po istom principu kao i sve vjerojatnosti.

Primjer 1.30. *Vratimo se primjeru 1.29 i označimo* $D_i(L_i)$, $i = 1, 2$, *događaj koji znači da je u i-tom izvlačenju izvučen dobar (loš) CD. Odredimo uvjetne vjerojatnosti ishoda drugog pokušaja nepomiješanog slučaja uvjetovane na moguće ishode prvog pokušaja.*

Prvo uočimo da vjerojatnost $P(D)$ iz primjera 1.29 predstavlja zapravo $P(D_2|L_1)$. Dakle, imamo:

$$P(D_2 \mid L_1) = \frac{3}{4}, \quad P(L_2 \mid L_1) = \frac{1}{4},$$
$$P(D_2 \mid D_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(L_2 \mid D_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Vjerojatnost presjeka.

Izraz iz definicije uvjetne vjerojatnosti često se koristi za izračun vjerojatnosti presjeka. To omogućuje jednakost (1.2) napisana na drugi način (pri čemu je $P(A) > 0$):

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A).$$

Primjer 1.31. *Ako u primjeru 1.29, u nepomiješanom slučaju, želimo odrediti vjerojatnost da su u oba izvlačenja izvučeni loši CD-ovi možemo primijeniti ovaj izraz, pa dobijemo:*

$$P(L_2 \cap L_1) = P(L_2 \mid L_1)P(L_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}.$$

Pojam nezavisnosti događaja.

Intuitivno je jasno da bi pojam nezavisnosti dvaju događaja A i B, $P(A) > 0$, morao odražavati činjenicu da realizacija jednog od njih ne utječe na realizaciju drugog. To bi se na uvjetnu vjerojatnost trebalo odraziti tako da je

$$P(B \mid A) = P(B),$$

tj. da za vjerojatnost presjeka vrijedi

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = P(B)P(A).$$

Primjer 1.32. *Za slučaj u kojemu smo pomiješali provjereni CD s ostalima također možemo odrediti uvjetnu vjerojatnost uz uvjet da je u prvom izvlačenju izvučen loš CD kao i uvjetnu vjerojatnost uz uvjet da je u prvom izvlačenju izvučen dobar CD. Međutim,* *te dvije uvjetne vjerojatnosti će biti jednake. Uvjetna vjerojatnost uz uvjet da je u prvom izvlačenju izvučen loš CD iznosi*

$$P(D_2 \mid L_1) = P(D_2) = \frac{3}{5}, \quad P(L_2 \mid L_1) = P(L_2) = \frac{2}{5},$$

a uvjetna vjerojatnost uz uvjet da se je u prvom izvlačenju izvučen dobar CD iznosi

$$P(D_2 \mid D_1) = P(D_2) = \frac{3}{5}, \quad P(L_2 \mid D_1) = P(L_2) = \frac{2}{5}.$$

Sada vjerojatnost da su u oba izvlačenja izvučeni loši CD-ovi iznosi

$$P(L_1 \cap L_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}.$$

Definicija 1.6. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Kažemo da su događaji $A, B \in \mathcal{F}$* **nezavisni** *ako vrijedi:*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Sljedeća definicija pojam nezavisnosti događaja generalizira na proizvoljnu familiju događaja.

Definicija 1.7. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Kažemo da je proizvoljna familija događaja $(A_x, x \in I) \subseteq \mathcal{F}$ nezavisna ako za svaki konačan skup indeksa $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$ vrijedi*

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} P(A_{i_j}).$$

Važno je napomenuti da komplementiranje događaja neće promijeniti njegovo stanje nezavisnosti od nekog drugog događaja. Naime, vrijedi sljedeća tvrdnja:

Ako su A i B nezavisni događaji, onda su

a) A^c **i** B, **b)** A **i** B^c, **c)** A^c **i** B^c,

također nezavisni događaji.

Dokaz. Dokažimo samo prvu tvrdnju, ostale se dokazuju analogno. Zbog nezavisnosti događaja A i B je $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Upotrebom tog svojstva slijedi:

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = \\ &= P(A^c)P(B), \end{aligned}$$

tj. događaji A^c i B su nezavisni.

Primjer 1.33. *Pojam nezavisnosti događaja olakšava računanje vjerojatnosti kod nezavisnog ponavljanja istog pokusa. Promotrimo pokus izvlačenja kuglice iz šešira koji sadrži 20 crvenih i 2 zelene kuglice. Odredimo vjerojatnost izvlačenja točno dvije zelene kuglice u 30 ponavljanja tog pokusa. Prilikom ponavljanja prethodno izvučena kuglica se vraća u šešir i sve se dobro promiješa.*

Da bi riješili ovaj problem prvo ćemo uočiti da je vjerojatnost izvlačenja zelene kuglice u svakom pojedinom izvlačenju uvijek ista i iznosi $\frac{2}{22} = \frac{1}{11}$*, dok je vjerojatnost izvlačenja crvene kuglice* $\frac{20}{22} = \frac{10}{11}$*. Prostor elementarnih događaja ovih 30 ponavljanja pokusa sastoji se od uređenih 30-torki slova "c" i "z" koja označavaju boju kuglice izvučene u pojedinom izvlačenju.*

Vjerojatnost da su u prva dva pokušaja izvučene zelene kuglice, a u svim ostalima crvene, možemo izračunati kao vjerojatnost presjeka nezavisnih događaja, pa ona iznosi $(\frac{1}{11})^2 \cdot (\frac{10}{11})^{28}$*. Međutim, isto toliko iznosi vjerojatnost pojave svake uređene 30-torke ovog pokusa u kojoj su točno dva slova "z". Obzirom da u* Ω *ima* $\binom{30}{2}$ *elemenata koji imaju "z" na točno dvije pozicije, a svaki od njih ima vjerojatnost* $(\frac{1}{11})^2 \cdot (\frac{10}{11})^{28}$*, onda vjerojatnost izvlačenja točno dvije zelene kuglice u ovih 30 ponavljanja pokusa iznosi*

$$\binom{30}{2} \cdot (\frac{1}{11})^2 \cdot (\frac{10}{11})^{28}.$$

Formula potpune vjerojatnosti

Korištenje uvjetnih vjerojatnosti može olakšati računanje vjerojatnosti u složenijim slučajevima.

Primjer 1.34. *Student je pristupio pismenom ispitu no ne može doći pogledati rezultate pa ne zna je li prošao ili pao. Zamolio je svog prijatelja da to učini umjesto njega i da mu pošalje poruku po bratu. Međutim, svjestan je da obojica govore istinu samo s vjerojatnošću 2/3. Kolika je vjerojatnost da će student dobiti točnu informaciju?*

Označimo A događaj koji znači da je student dobio točnu informaciju, L_p činjenicu da je slagao prijatelj, a L_b činjenicu da je slagao brat. Događaje da su brat i prijatelj govorili istinu označit ćemo I_p i I_b.

Ovaj primjer možemo riješiti tako da prebrojimo sve mogućnosti i izračunamo vjerojatnosti presjeka iz skupa

$$\{L_p \cap L_b, I_p \cap L_b, L_p \cap I_b, I_p \cap I_b\}.$$

Student može čuti točnu informaciju u dva od navedenih slučajeva: $L_p \cap L_b$ i $I_p \cap I_b$. Ako mu brat i prijatelj lažu neovisno jedan od drugoga, onda je

$$P(L_p \cap L_b) = P(L_p)P(L_b) = \frac{1}{9},$$

$$P(I_p \cap I_b) = P(I_p)P(I_b) = \frac{4}{9},$$

pa je vjerojatnost da čuje točnu informaciju

$$P(A) = P(L_p \cap L_b) + P(I_p \cap I_b) = \frac{5}{9}.$$

Problem je jednostavan. Međutim, sljedeći način rješavanja istog primjera sugerira princip koji se može generalno primijeniti te olakšati računanje u mnogo složenijim situacijama.

Uočimo da prijatelj može samo lagati ili reći istinu. Dakle, događaji L_p i I_p međusobno se isljučuju (disjunktni su) i opisuju sve što se može dogoditi u odnosu na informaciju koju prenosi prijatelj. Također je

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap I_p) + P(A \cap L_p) = \\ &= P(A \mid I_p)P(I_p) + P(A \mid L_p)P(L_p) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

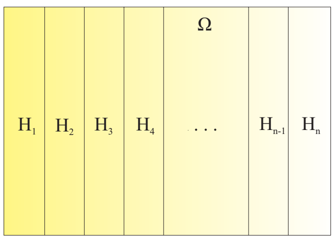
Definicija 1.8. *Konačna ili prebrojiva familija događaja $(H_i, i \in I)$, $I \subseteq \mathbb{N}$, u vjerojatnostnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je* **potpun sustav događaja** *ako vrijedi:*

1. $H_i \subseteq \Omega$ *za sve* $i \in I$,

2. $H_i \cap H_j = \emptyset$ *za sve* $i \neq j$, $i, j \in I$,

3. $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i = \Omega$.

Napomena 1.1. *Potpun sustav događaja čini jednu particiju skupa elementarnih događaja* Ω. *U slučaju particije skupa* Ω *na* n *skupova, potpun sustav događaja predstavljen familijom* $(H_i, i \in I)$, $I = \{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$, *možemo prikazati slikom 1.15.*



Slika 1.15: Potpun sustav događaja s konačno mnogo članova.

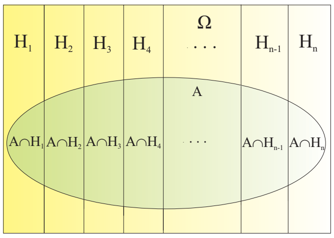
Prema tome, bilo koji događaj $A \subset \Omega$ *moguće je prikazati kao uniju presjeka događaja* A *s elementima* H_i, $I = \{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$, *potpunog sustava događaja, tj.*

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i),$$

što prikazujemo slikom 1.16

Teorem 1.1 (**Formula potpune vjerojatnosti**). *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i* $(H_i, i \in I)$, $I \subseteq \mathbb{N}$, *potpun sustav događaja na njemu. Tada za proizvoljan događaj* $A \in \mathcal{F}$ *vrijedi*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \mid H_i) P(H_i). \tag{1.3}$$



Slika 1.16: Prikaz događaja $A \subset \Omega$ kao unije događaja $A \cap H_i$.

Dokaz. *Uočimo da događaj $A \in \mathcal{F}$ možemo predstaviti na sljedeći način:*

$$A = \bigcup_{i \in I} A \cap H_i.$$

Prema tome slijedi da je

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap H_i) = \sum_{i \in I} P(A \mid H_i)P(H_i).$$

Primjer 1.35. *Ulični kockar ima dva novčića od jedne kune: jedan je pravilno izrađen (tzv. standardan novčić), a drugi s obje strane ima slavuja (tj. nepravilno je izrađen, tzv. nestandardan novčić). Vama je ponudio da na slučajan način odaberete jedan novčić koji će on baciti dva puta. Kolika je vjerojatnost da je u oba bacanja odabrani novčić pao na slavuja?*

Očito tražena vjerojatnost ovisi o tome koji smo od dva ponuđena novčića odabrali. Dakle, kao potpun sustav događaja promatramo familiju $\{H_1, H_2\}$ gdje su događaji H_1 i H_2 definirani na sljedeći način:

$$\begin{aligned} H_1 &= \text{odabran je standardan novčić,} \\ H_2 &= \text{odabran je nestandardan novčić.} \end{aligned}$$

Budući da novčić izvlačimo sasvim sluǔajno, vjerojatnosti događaja H_1 i H_2 iznose

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}.$$

Događaj čiju vjerojatnost želimo izračunati je

$$A = \text{u dva bacanja odabrani novčić je oba puta pao na slavuja.}$$

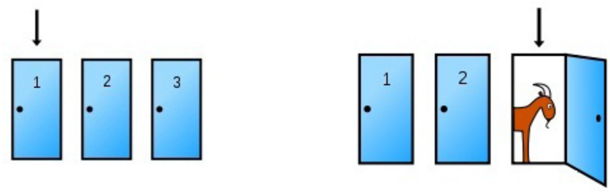
Iz definicije promatranog problema slijedi:

$$P(A \mid H_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad P(A \mid H_2) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Prema formuli potpune vjerojatnosti slijedi tražena vjerojatnost:

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{5}{8}.$$

Primjer 1.36 (**Monty Hall problem** [4]**).** *Pretpostavite da igrač sudjeluje u igri u kojoj bira jedna od trojih vrata. Iza jednih vrata je automobil, a iza preostalih dvojih vrata nalaze se koze. Npr. ako igrač izabere prva vrata, voditelj igre (koji zna iza kojih vrata se nalazi automobil, a iza kojih koze) otvorit će ona od preostalih dvojih vrata za koja zna da kriju kozu (slika 1.17).*



(a) Početni izbor (b) Potez voditelja

Slika 1.17: Monty Hall problem

Nakon toga voditelj pita igrača: "Želite li promjeniti vaš izbor vrata?". Mi se pitamo je li mudro da igrač promijeni izbor?

Promotrimo situaciju u kojoj se automobil nalazi iza drugih vrata, a igrač je odabrao prva vrata - to znači da će voditelj otvoriti treća vrata jer zna da se iza njih nalazi koza. Uvedimo sljedeće oznake za promatrane događaje:

- A_i - *automobil se nalazi iza* i*-tih vrata,*
- I_i - *igrač je izabrao* i*-ta vrata,*
- V_i - *voditelj je otvorio* i*-ta vrata,*
- $V_i \mid I_j$ - *ako je igrač odabrao* j*-ta vrata, voditelj je otvorio* i*-ta vrata,* $i \neq j$*,*

[4]Monty Hall problem prvi put je postavljen 1975. u pismu Stevea Selvina uredniku časopisa *American Statistician*, a nazvan je prema voditelju američkog kviza *Let's make a deal.*

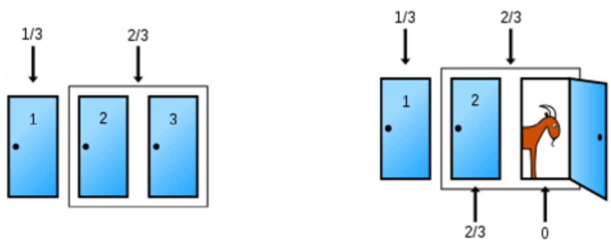
gdje su $i, j \in \{1, 2, 3\}$. *Budući igrač ne zna iza kojih se vrata nalazi automobil, događaji* A_i *i* I_j *su nezavisni za svaki izbor* i *i* j. *Odgovor na pitanje je li mudro da igrač promijeni izbor vrata možemo dobiti tako da izračunamo vjerojatnost da se automobil nalazi iza drugih vrata AKO je igrač odabrao prva vrata I voditelj potom otvorio treća vrata. Tu vjerojatnost računamo primjenom definicije uvjetne vjerojatnosti:*

$$P(A_2|I_1 \cap V_3) = \frac{P\left(V_3 \cap (I_1 \cap A_2)\right)}{P(I_1 \cap V_3)} = \frac{P(V_3 \mid I_1 \cap A_2)P(A_2)}{P(V_3 \mid I_1)}.$$

Kako će u promatranoj situaciji voditelj otvoriti treća vrata jer zna da se iza njih nalazi koza, slijedi da je $P(V_3 \mid I_1 \cap A_2) = 1$. *Događaji* A_1, A_2 *i* A_3 *čine potpun sustav događaja i* $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$. *Preostaje izračunati* $P(V_3 \mid I_1)$. *Prema formuli potpune vjerojatnosti slijedi da je*

$$P(V_3 \mid I_1) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) P\left((V_3 \mid I_1) \mid A_i\right),$$

pa budući je $P\left((V_3 \mid I_1) \mid A_1\right) = 1/2$, $P\left((V_3 \mid I_1) \mid A_2\right) = 1$ *i* $P\left((V_3 \mid I_1) \mid A_3\right) = 0$, *slijedi da je* $P(V_3 \mid I_1) = 1/2$. *Sada lako slijedi da je* $P(A_2|I_1 \cap V_3) = 2/3$ *te zaključujemo da je u opisanoj situaciji promjena izbora vrata mudar potez za igrača (slika 1.18).*



(a) Vjerojatnosti bez sudjelovanja voditelja

(b) Vjerojatnosti sa sudjelovanjem voditelja

Slika 1.18: Vjerojatnosti ishoda u Monty Hall problemu

Analizirajte probleme vezane uz druge odabire vrata i smještaje automobila.

U primjenama često elemente potpunog sustava događaja $(H_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, tj. skupove H_i zovemo **hipotezama**. U tom slučaju kažemo da analiza nekog događaja A uvjetno na H_i zapravo predstavlja analizu događaja

A pod hipotezom H_i. Ponekad je korisno razmošljati o računanja vjerojatnosti da je postavljena hipoteza istinita ako utvrdimo da se realizirao neki događaj. Npr. ako u prethodnom primjeru utvrdimo da se u oba pokušaja okrenuo slavuj, možemo se pitati kolika je vjerojatnost da je izvučeni novčić standardan, a kolika da nije standardan. Za izračunavanje vjerojatnosi ovog oblika može se koristiti rezultat poznat pod nazivom **Bayesova formula**.

Teorem 1.2. *Neka je* $(H_i, i \in I)$, $I \subseteq \mathbb{N}$, *potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i neka je* $A \in \mathcal{F}$ *događaj s pozitivnom vjerojatnosti, tj.* $P(A) > 0$. *Tada za svaki* $i \in I$ *vrijedi:*

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(A)}. \tag{1.4}$$

Dokaz. Primjenom definicije uvjetne vjerojatnosti slijedi:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(A)}.$$

Primjer 1.37. *Za problem opisan u primjeru 1.35 pomoću Bayesove formule izračunajmo vjerojatnosti* $P(H_1 \mid A)$ *i* $P(H_2 \mid A)$, *pri čemu događaje* $(H_1 \mid A)$ *i* $(H_2 \mid A)$ *interpretiramo na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} (H_1 \mid A) &= \text{ako je u oba bacanja novčić pao na slavuja,} \\ & \text{odabran je standardan novčić.} \\ (H_2 \mid A) &= \text{ako je u oba bacanja novčić pao na slavuja,} \\ & \text{odabran je nestandardan novčić.} \end{aligned}$$

Primjenom Bayesove formule slijedi:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{5}, \quad P(H_2 \mid A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{5}.$$

Uočimo da je

$$P(H_1 \mid A) + P(H_2 \mid A) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1.$$

1.10 Zadaci

Zadatak 1.1. Konstruirajte prostor elementarnih događaja za sljedeće slučajne pokuse:

a) uzastopno bacanje pravilno izrađenog novčića dva puta,

b) bacanje jedne pravilno izrađene igraće kockice,

c) istovremeno bacanje dviju pravilno izrađenih igraćih kockica,

d) uzastopno bacanje pravilnom izrađene igraće kockice n puta, $n \in \mathbb{N}$,

e) slučajan izbor delegacije od dva člana is skupa osoba $\{A, B, C, D, E, F\}$.

Rješenje:
a) $\Omega = \{(P, P), (P, G), (G, P), (G, G)\}$,
b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
c) $\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, \dots, 6\}\}$,
d) $\Omega = \{(i_1, \dots, i_n) : i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, 6\}\}$,
e) $\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{A, B, C, D, E, F\}\}$.

Zadatak 1.2. Slučajan pokus sastoji se od bacanja pravilno izrađenog novčića i pravilno izrađene igraće kockice, tim redom, pri čemu se kao ishod registriraju pojava pisma ili glave na novčiću i broj na gornjoj strani kockice, redom. Modelirajte prostor elementarnih događaja.

Rješenje: $\Omega = \{(i, j) : i \in \{P, G\}, j \in \{1, \dots, 6\}\}$.

Zadatak 1.3. U kutiji se nalaze četiri papirića numerirana brojevima 1, 2, 3 i 4. Iz kutije se na slučajan način izvlači jedan po jedan papirić i to:

a) bez vraćanja,

b) sa vraćanjem,

sve dok se ne izvuče papirić na kojem je neparan broj. Ako se kao ishod ovog slučajnog pokusa registriraju izvučeni brojevi, modelirajte pripadni prostor elementarnih događaja.

Rješenje:
a) $\Omega = \{1, 3, (2, 1), (4, 1), (2, 3), (4, 3), (2, 4, 1), (2, 4, 3), (4, 2, 1), (4, 2, 3)\}$,
b) $\Omega = \{1, 3, (2, 1), (2, 2, 1), (2, 2, 2, 1), \ldots\}$.

Zadatak 1.4. Strijelac gađa metu 4 puta, pri čemu se registriraju pogoci (označeni nulom) i promašaji (označeni jedinicom). Modelirajte prostor elementarnih događaja i sljedeće događaje:

a) $A =$ gađanje je započelo promašajem,

b) $B =$ rezultat svih gađanja je isti,

c) $C =$ cilj je pogođen dva puta,

d) $D =$ cilj je pogođen barem dva puta.

Rješenje:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,1,0,0),\\ &(0,1,1,0), (0,0,1,1), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (0,1,0,1), (1,1,1,0),\\ &(0,1,1,1), (1,0,1,1), (1,1,0,1), (1,1,1,1)\}.\end{aligned}$$

Zadatak 1.5. Strijelac gađa cilj oblika kružne mete polumjera R, pri čemu se mjeri udaljenost od mjesta pogotka do središta mete. Modelirajte pripadni prostor elementarnih događaja.

Rješenje: $\Omega = [0, T] \cup \{\text{promašaj}\}$.

Zadatak 1.6. Neka je Ω prostor elementarnih događaja pridružen nekom slučajnom pokusu, te neka su A, B i C događaji ($A, B, C \subseteq \Omega$). Pomoću događaja A, B i C izrazite sljedeće događaje:

a) realizirao se samo događaj A,

b) realizirali su se događaji A i B,

c) realizirala su se sva tri događaja,

d) realizirao se barem jedan od događaja A, B i C,

e) realizirao se točno jedan od događaja A, B i C,

f) realizirali su se barem dva od događaja A, B i C,

g) realizirali su se točno dva od događaja A, B i C,

h) realizirali su se najviše dva od događaja A, B i C,

i) nije se realizirao niti jedan od događaja A, B i C.

Rješenje:
a) $A \cap B^c \cap C^c$,
b) $A \cap B$,
c) $A \cap B \cap C$,
d) $A \cup B \cup C$,
e) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$,
f) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
g) $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$,
h) $A^c \cup B^c \cup C^c$,
i) $(A \cup B \cup C)^c$.

Zadatak 1.7. Među studentima okupljenima na predavanju slučajno se bira jedan student. Promatramo sljedeće događaje:

- A = student je muškog spola,
- B = student je vegetarijanac,
- C = student živi u studentskom domu.

a) Opišite događaj $A \cap B \cap C$.

b) Kada će vrijediti $A \cap B \cap C = A$?

c) Kada će vrijediti $C^C \subseteq B$?

d) Kada će vrijediti $A^C = B$? Vrijedi li nužno ova jednakost ako su svi studenti muškog spola vegetarijanci?

Rješenje:

a) Student je muškog spola, vegetarijanac je i živi u studentskom domu.

b) Vrijedi kad su svi studenti muškog spola vegetarijanci i žive u studentskom domu.

c) Vrijedi kad su svi studenti koji ne žive u studentskom domu vegetarijanci.

d) Vrijedi ako su svi studenti vegetarijanci ženskog spola. Jednakost ne mora vrijediti jer ako su svi studenti muškog spola vegetarijanci ne znači da među vegetarijancima nema studentica.

Zadatak 1.8. Dokažite sljedeće jednakosti:

a) $B \subseteq A \;\Rightarrow\; P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$,

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Zadatak 1.9. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Ako su $A, B \in \mathcal{F}$ t.d. je $P(A \triangle B) = 0$, dokažite da je $P(A) = P(B)$.

Uputa: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Zadatak 1.10. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor, te neka za $A, B \in \mathcal{F}$ vrijedi da je $P(A \triangle B) = 0$ i $P(A) = p$. Izračunajte:

a) $P(A \cap B)$ i $P(A \cup B)$,

b) $P(A \setminus B)$ i $P(B \setminus A)$.

Zadatak 1.11. Dokažite da nezavisnost dokađaja A i B, $A, B \in \mathcal{F}$, povlači nezavisnost

a) događaja A i B^c,

b) događaja A^c i B^c.

Zadatak 1.12. Na raspolaganju nam je kutija u kojoj se nalazi 100 papirića numeriranih brojevima $1, 2, \ldots, 100$. Slučajan pokus sastoji se od izvlačenja jednog papirića iz kutije. Upotrebom klasične definicije vjerojatnosti odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) A = izvučeni broj je jednoznamenkast,

b) B = izvučeni broj je dvoznamenkast,

c) C = izvučeni broj je manji ili jednak broju k, $k \in \{1, 2, \ldots, 100\}$,

d) D = izvučeni broj je strogo veći od k, $k \in \{1, 2, \ldots, 100\}$,

e) E = suma znamenaka izvučenog broja je 3,

f) F = umnožak znamenaka izvučenog broja je 6.

Rješenje:
a) $P(A) = 0.09$, b) $P(B) = 0.01$, c) $P(C) = k/100$,
d) $P(D) = (100 - k)/100$, e) $P(E) = 0.04$, f) $P(F) = 0.04$.

Zadatak 1.13. Pravilno izrađena igraća kockica baca se dva puta. Upotrebom **klasične definicije vjerojatnosti** odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) A = pali su jednaki brojevi,

b) B = suma brojeva koji su pali je 8,

c) C = produkt brojeva koji su pali je 8,

d) D = suma brojeva koji su pali veća je od produkta brojeva koji su pali,

e) E = produkt brojeva koji su pali veći je od sume brojeva koji su pali.

Rješenje:
a) $P(A) = 1/6$, b) $P(B) = 5/36$, c) $P(C) = 1/18$,
d) $P(D) = 11/36$, e) $P(E) = 2/3$.

Zadatak 1.14. Pretpostavimo da u pošiljci od ukupno 500 jabuka ima 2% prezrelih jabuka. Kolika je vjerojatnost da slučajan uzorak od 20 jabuka uzet iz te pošiljke sadrži točno dvije prezrele jabuke?

Rješenje: $P(A) = \dfrac{\binom{10}{2}\binom{490}{18}}{\binom{500}{20}}$.

Zadatak 1.15 (Problem rođendana). Kolika je vjerojatnost da između n, $n \leq 365$, osoba barem dvije osobe imaju rođendan istog dana?

Rješenje: $P(A) = 1 - \dfrac{364 \cdots (366 - n)}{365^{n-1}}$. Pretpostavljamo da svaka od n osoba može biti rođena s jednakom vjerojatnošću bilo kojeg dana u godini i zanemarujemo postojanje prijestupnih godina.

Zadatak 1.16. U kutiji se nalazi a crvenih i b zelenih kuglica ($a \geq 2$, $b \geq 2$). Iz kutije na slučajan način istovremeno izvadimo dvije kuglice. Definirajmo sljedeće događaje:

$$\begin{aligned} A &= \text{izvučene kuglice su iste boje,} \\ B &= \text{izvučene kuglice su različitih boja.} \end{aligned}$$

Koji je od događaja A i B vjerojatniji?

Rješenje: $P(A) = \dfrac{\binom{a}{2} + \binom{b}{2}}{\binom{a+b}{2}}, \quad P(B) = \dfrac{ab}{\binom{a+b}{2}}.$

Zadatak 1.17. Pravilno izrađen novčić bacamo 10 puta za redom. Kolika je vjerojatnost da se pismo realizira točno tri puta?

Rješenje: $P(A) = \dfrac{120}{2^{10}}.$

Zadatak 1.18. Pravilno izrađenu igraću kockicu bacamo 10 puta. Kolika je vjerojatnost da se kao rezultat bacanja brojevi $1, 2, 3, 4, 5, 6$ pojave redom $2, 3, 1, 1, 1, 2$ puta?

Rješenje: $P(A) = \dfrac{10!}{4 \cdot 6^{11}}.$

Zadatak 1.19. U autobusu se nalazi 15 ljudi. Do kraja putovanja ostale su 4 stanice. Kolika je vjerojatnost da svi putnici izađu na istoj stanici?

Rješenje: $P(A) = 4^{-14}$.

Zadatak 1.20. Pretpostavimo da n ljudi na slučajan način sjeda za okrugli stol. Izračunajte vjerojatnost da će dva unaprijed odabrana čovjeka sjediti zajedno.

Rješenje: $P(A) = \dfrac{2}{n-1}$.

Zadatak 1.21. m muškaraca i n žena raspoređuju se na slucajan način u kazalištu na $(m+n)$ sjedala složenih u redu. Kolika je vjerojatnost da sve žene sjede zajedno (tj. jedna do druge)?

Rješenje: $P(A) = \dfrac{n!(m+1)!}{(m+n)!} = \dfrac{m+1}{\binom{m+n}{n}}$.

Zadatak 1.22. Špil od 52 karte podijeli se na dva jednakobrojna dijela. Odredite vjerojatnost sljedećih događaja:

a) A = u svakom dijelu nalaze se po dva kralja,

b) B = u jednom dijelu ne nalazi se ni jedan kralj,

c) C = u jednom dijelu nalazi se jedan, a u drugom dijelu tri kralja.

Rješenje: $P(A) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{48}{24}}{\binom{52}{26}}, \quad P(B) = \dfrac{2\binom{48}{26}}{\binom{52}{26}}, \quad P(C) = \dfrac{8\binom{48}{25}}{\binom{52}{26}}.$

Zadatak 1.23. Iz špila od 52 karte na slučajan način biramo 8 karata. Izračunajte vjerojatnost da su izvučena

a) tri asa,

b) tri kralja,

c) tri asa ili tri kralja.

Rješenje: $P(A) = P(B) = \dfrac{\binom{4}{3}\binom{48}{5}}{\binom{52}{8}}, \quad P(A \cup B) = \dfrac{2\binom{4}{3}\binom{48}{5} - \binom{4}{3}^2\binom{44}{2}}{\binom{52}{8}}.$

Zadatak 1.24. Student je došao na ispit znajući odgovore na 90 od 100 pitanja. Izvlači se pet pitanja.

a) Kolika je vjerojatnost da će student znati odgovore na svih pet pitanja?

b) Kolika je vjerojatnost da će student znati odgovore na barem tri od pet izvučenih pitanja?

Rješenje:

$$P(A) = \frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} \approx 0.584., \quad P(B) = \frac{\binom{90}{5} + 10\binom{90}{4} + \binom{10}{2}\binom{90}{3}}{\binom{100}{5}} \approx 0.99.$$

Zadatak 1.25. Iz šešira u kojem se nalazi n kuglica na slučajan način izaberemo nekoliko kuglica. Kolika je vjerojatnost da smo izvukli paran broj kuglica?

Rješenje: $P(A) = \dfrac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}.$

Zadatak 1.26 (De Mereov paradoks). Bacamo tri pravilno izrađene igraće kockice. Zanima nas vjerojatnost sljedećih događaja:

(a) A = zbroj brojeva na svim trima kockicama jednak je 11,

(b) B = zbroj brojeva na svim trima kockicama jednak je 12.

Rješenje: $P(A) = \frac{27}{6^3}, \quad P(B) = \frac{25}{6^3}.$

Zadatak 1.27. Odredite vjerojatnost da je slučajno odabrana točka iz segmenta $[0, 1]$ racionalna?
Rješenje: vjerojatnost odabira racionalne točke iz segmenta $[0, 1]$ je nula, tj. slučajno odabrana točka iz segmenta $[0, 1]$ će gotovo sigurno biti iracionalna.

Zadatak 1.28. Za fiksiranu točku $c \in [a, b]$ i slučajno odabranu točku $x \in [a, b]$ odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) $x \leq c$,

b) $x < c$,

c) $x = c$,

d) x je bliže točki a nego točki b.

Rješenje:
a) $P(A) = \frac{c-a}{b-a}$, b) $P(B) = \frac{c-a}{b-a}$, c) $P(C) = 0$, d) $P(D) = 0.5$.

Zadatak 1.29. Neka su x i y dva slučajno odabrana broja iz segmenta $[0, 1]$. Odredite vjerojatnost da za njih vrijedi:

a) $x > y$,

b) $x + y < 3/2$,

c) $x = y$,

d) $xy \leq 2/9$ i $x + y < 1$.

Rješenje:
$P(A) = 1/2, \quad P(B) = 7/8, \quad P(C) = 0, \quad P(D) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2.$

Zadatak 1.30. Trenutak u kojem će neki signal stići do prijemnika je slučajno odabrani trenutak iz intervala $[0, T]$. Prijemnik neće registrirati drugi signal ako je razlika između dva uzastopna signala manja od τ, $\tau < T$. Odredite vjerojatnost da prijemnik neće registrirati drugi signal.

Rješenje: $P(A) = \dfrac{\tau(2T - \tau)}{T^2}$.

Zadatak 1.31 (Buffonov problem). Ravnina je podijeljena paralelnim pravcima koji su jedan od drugog udaljeni za $2a$. Na tu se ravninu na slučajan način baca igla duljine $2l$, $l < a$. Odredite vjerojatnost da igla siječe neki od pravaca.

Rješenje: $P(A) = \dfrac{2l}{a\pi}$.

Zadatak 1.32. Pokažite da sljedećim realnim funkcijama realne varijable možemo definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2) & , \ x \in [-1, 1] \\ 0 & , \ x \neq [-1, 1] \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \ x \in (0, \infty) \\ 0 & , \ x \in (-\infty, 0] \end{cases}$

c) Koristeći funkcije iz zadataka a) i b) odredite vjerojatnost događaja

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -1/2 < x \leq 1/2\} = (-1/2, 1/2].$$

Rješenje: Obje funkcije su nenegativne i normirane pa pomoću njih možemo definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}$. Vjerojatnost događaja A je: a) $P(A) = 11/16$, b) $P(A) = 1 - e^{-\lambda/2}$.

Zadatak 1.33. Pokažite da funkcijom $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiranom formulom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(x^2+y) & , \quad (x,y) \in [-1,1] \times [0,1] \\ 0 & , \quad (x,y) \neq [-1,1] \times [0,1] \end{cases}$$

možemo definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}^2$. Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrana točka iz $\mathbb{R}^2$ pripada pravokutniku

$$A = [0,1] \times [0,1/2].$$

Rješenje: funkcija f je nenegativna i normirana pa pomoću nje možemo definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}^2$. Vjerojatnost događaja A je $P(A) = 7/40$.

Zadatak 1.34. Slučajan pokus sastoji se od bacanja pravilno izrađenog novčića tri puta za redom. Želimo naći vjerojatnost događaja A uz dani događaj B kada su A i B sljedeći događaji:

- $A = \{$glava je pala više puta nego pismo$\}$,
- $B = \{$prvo je palo pismo$\}$.

Rješenje: $P(A|B) = 0.25$.

Zadatak 1.35. Iz kutije u kojoj se nalazi m crvenih i n zelenih kuglica na slučajan način izvučeno je k kuglica. Uz pretpostavku da su sve izvučene kuglice iste boje, kolika je vjerojatnost da su sve zelene?

Rješenje: $P(A|B) = \dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{m}{k} + \binom{n}{k}}$.

Zadatak 1.36. Slučajan pokus sastoji se od slučajnog odabira obitelji koja ima dvoje djece (uz pretpostavku da su vjerojatnosti rođenja kćerke i sina jednake (što približno odgovara stvarnoj situaciji), te da znamo redoslijed rađanja djece u obitelji). Treba provjeriti jesu li sljedeći događaji nezavisni:

- $A = \{$u obitelji je barem jedna kćerka$\}$,
- $B = \{$u obitelji su jedna kćerka i jedan sin$\}$.

Rješenje: A i B nisu nezavisni događaji.

Zadatak 1.37. Cilj se gađa iz tri topa. Topovi pogađaju cilj nezavisno jedan od drugoga s vjerojatnošću 0.4. Ako jedan top pogodi cilj uništava ga s vjerojatnošću 0.3, ako ga pogode dva topa uništavaju ga s vjerojatnošću 0.7, a ako ga pogode tri topa uništavaju ga s vjerojatnošću 0.9. Nađite vjerojatnost uništenja cilja.

Rješenje: $P(A) = 0.3888$.

Zadatak 1.38. Imamo dvije kutije. U prvoj se nalazi a bijelih i b crnih kuglica, a u drugoj c bijelih i d crnih kuglica. Iz prve kutije na slučajan način biramo k kuglica, a iz druge m kuglica. Ovih $(k + m)$ kuglica izmiješamo i stavimo u treću kutiju.

a) Iz treće kutije na slučajan način izvučemo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da ona bude bijele boje?

b) Iz treće kutije na slučajan način izvučemo tri kuglice. Kolika je vjerojatnost da je barem jedna kuglica bijele boje?

Rješenje:
a) $P(A) = \dfrac{1}{k+m}\left(\dfrac{ak}{a+b} + \dfrac{cm}{c+d}\right)$

b) Pomoću FPV odrediti vjerojatnost suprotnog događaja.

Zadatak 1.39. Na usmenom ispitu iz Uvoda u vjerojatnost i statistiku ponuđeno je 10 pitanja od kojih je student naučio njih n, $0 \leq n \leq 10$. Student će položiti ispit ako bude točno odgovorio na dva slučajno odabrana pitanja ili ako točno odgovri na jedno od njih i na treće, dodatno postavljeno pitanje. Na koliko pitanja student treba znati točno odgovoriti da bi s vjerojatnošću većom od 0.8 položio ispit?

Rješenje: Student treba znati točno odgovoriti na bar sedam pitanja.

Zadatak 1.40. Ptica slijeće u slučajno izabrano gnijezdo od ukupno tri gnijezda koja su joj na raspolaganju. Svako gnijezdo sadrži dva jaja i to: u prvom gnijezdu su oba jaja zdrava, u drugom je jedno zdravo i jedan mućak, a u trećem su oba jaja mućka. Nađite vjerojatnost da ptica sjedi na mućku. Ako je sjela na mućak, kolika je vjerojatnost da sjedi u drugom gnijezdu?

Rješenje: $P(H_2|A) = 1/3$.

Zadatak 1.41. Neki izvor emitira poruke koje se sastoje od znakova 0 i 1. Vjerojatnost emitiranja znaka 1 je 0.6, vjerojatnost emitiranja znaka 0 je 0.4. Na izlazu iz kanala 10% znakova se pogrešno interpretira. Ako je primljena poruka 101, kolika je vjerojatnost da je ona i poslana?

Rješenje: $P(D) = 0.743$.

Zadatak 1.42. Iz šešita u kojem se nalazi n kuglica izvlačimo na sreću jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da će ta kuglica biti bijela, ako su sve pretpostavke o prethodnom broju kuglica jednako vjerojatne? Nakon što je izvučena bijela kuglica, kolika je vjerojatnost da su sve kuglice u šeširu bijele?

Rješenje: $P(H_n|A) = \dfrac{2}{n+1}$.

Poglavlje 2

Slučajna varijabla

Proučavanje cijelog skupa elementarnih događaja nekog slučajnog pokusa i vjerojatnosti zadane na njemu može biti vrlo složen zadatak. Skupovi elementarnih događaja mogu sadržavati razne objekte, npr. brojeve, uređene parove, uređene n-torke, nizove brojeva, slova, nizove slova, boje, itd. Međutim, vrlo često se naš interes za slučajan pokus svodi samo na proučavanje jedne ili nekoliko karakteristika koje možemo opisati (ili kodirati) numerički.

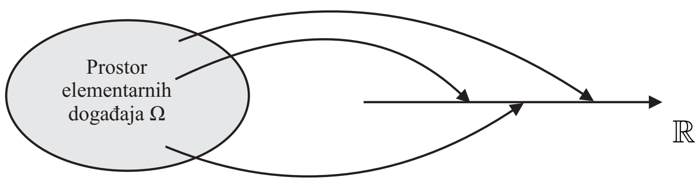
Primjer 2.1. *Ispit se sastoji od* 10 *pitanja višestrukog izbora. Pristupanje ispitu za kandidata je slučajan pokus. Skup elementarnih događaja ovakvog pokusa je skup uređenih desetorki s oznakama koje se koriste za "točan odgovor" odnosno "netočan odgovor". Međutim, prilikom polaganja ispita kandidata prvenstveno zanima koliko će ukupno imati točnih odgovora, a ne i koji će po redu odgovor biti točan. Dakle, njega zanima modeliranje na skupu mogućih ishoda* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$*. Osim toga, zanima ga i koliku ocjenu će postići, što znači da ga zanima i skup mogućih ishoda* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$*.*

Da bismo za dani slučajan pokus analizirali i modelirali pojedinačne slučajne karakteristike ili više njih, u ovom poglavlju ćemo definirati pojam slučajne varijable, a u sljedećem pojam slučajnog vektora.

2.1 Diskretna slučajna varijabla

Kao što je već rečeno, diskretan vjerojatnosni prostor karakteriziran je činjenicom da Ω ima konačno ili prebrojivo mnogo elemenata. U poglavlju 1.6 označili smo ga $\Omega = \{\omega_i : i \in I_\Omega,\ I_\Omega \subseteq \mathbb{N}\}$. Pridružena σ-algebra tada je točno jednaka partitivnom skupu od Ω, tj. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, a vjerojatnost se može odrediti zadavanjem vrijednosti samo na jednočlanim podskupovima od Ω. Ako Ω nije diskretan (npr. $\Omega = \mathbb{R}$), nije moguće definirati vjerojatnost samo zadavanjem vrijednosti na elementima od Ω. Zbog toga ćemo i izučavanje slučajne varijable razdvojiti na takozvane diskretne i apsolutno neprekidne slučajne varijable. Pri tome ćemo diskretne slučajne varijable prirodno vezati uz diskretan vjerojatnosni prostor (iako to nije općenito nužno).

Definicija 2.1. *Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. *Svaku funkciju* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *zvat ćemo* **diskretna slučajna varijabla**.



Slika 2.1: Prikaz djelovanja slučajne varijable.

Primjer 2.2. *Neka se na skladištu nalaze četiri istovrsna proizvoda. Vjerojatnost prodaje jednog od ponuđenih proizvoda u jednom danu iznosi* $1/2$. *Broj prodanih proizvoda u jednom danu je jedna slučajna varijabla. Označimo je* X.

Uočimo da se u ovom primjeru Ω *sastoji od uređenih četvorki nula i jedinica koje označavaju da li je taj dan pojedini proizvod prodan ili ne, tj.* $\Omega = \{(i,j,k,l) : i,j,k,l \in \{0,1\}\}$. *Vjerojatnost svakog elementa iz* Ω *iznosi* $1/2^4$. *Međutim, nama je interesantno samo koliko je proizvoda prodano, a ne koji su to. Zato koristimo slučajnu varijablu*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X(i,j,k,l) = i + j + k + l.$$

Skup $\{(i,j,k,l) \in \Omega : X(i,j,k,l) = 2\}$ *predstavlja moguće ishode iz* Ω *kod kojih su prodana točno 2 proizvoda. Obzirom da nas zapravo zanima vjerojatnost realizacije takvih skupova, a njihovo označavanje je komplicirano, ovdje ćemo koristiti oznaku za skup:*

$$\{(i,j,k,l) \in \Omega : X(i,j,k,l) = 2\} = \{X = 2\},$$

a za vjerojatnost

$$P\left(\{(i,j,k,l) \in \Omega : X(i,j,k,l) = 2\}\right) = P\{X = 2\}.$$

Oznake analogne onima iz primjera 2.2 koristimo općenito kad računamo sa slučajnim varijablama. Tako ćemo, za $A \subseteq \mathbb{R}$ uvesti sljedeću oznaku:

$$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\},$$

a za vjerojatnost tog skupa

$$P\{X \in A\} = P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}\right).$$

Tako, npr. za dani $x \in \mathbb{R}$ koristimo oznaku

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} = \{X = x\}.$$

Primjer 2.3. *Vratimo se primjeru 2.2*

Skup svih mogućih realizacija slučajne varijable X *koja broji prodane proizvode (njezina slika) je skup*

$$\mathcal{R}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Vjerojatnosti događaja vezanih uz ovu slučajnu varijablu možemo računati i bez proučavanja osnovnog vjerojatnosnog prostora na kojem je definirana. Tako npr. možemo računati vjerojatnost da će biti prodano više od dva proizvoda i slično.

Naime, vjerojatnosna svojstva ove slučajne varijable određena su ako ulogu prostora elementarnih događaja preuzme $\mathcal{R}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. *Na njemu vjerojatnost zadajemo nizom brojeva:*

$$p_0 = P\{X = 0\}, \qquad p_1 = P\{X = 1\}, \qquad p_2 = P\{X = 2\},$$
$$p_3 = P\{X = 3\}, \qquad p_4 = P\{X = 4\}.$$

Tada vrijedi:

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad p_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \quad p_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16},$$
$$p_0 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \frac{1}{16}.$$

Radi preglednosti, ovu diskretnu slučajnu varijablu zapisat ćemo pomoću sljedeće tablice:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Pregledan zapis slučajne varijable prezentiran u prethodnom primjeru koristit ćemo i općenito. Dakle, ako je X dana diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ označimo skup svih vrijednosti koje ona može primiti kao $\mathcal{R}(X) = \{x_i, i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, a pripadne vjerojatnosti nizom brojeva $(p_i, i \in I)$ za koji vrijedi:

$$p_i = P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}\right) = P\{X = x_i\}, \quad i \in I.$$

Bez smanjenja općenitosti, u nastavku razmatranja ćemo pretpostaviti da je $I = \mathbb{N}$.

Slučajnu varijablu X prikazujemo u obliku tablice:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

i ovaj prikaz zovemo **zakon razdiobe**, **tablica distribucije** ili kraće **distribucija** slučajne varijable X.

Dakle, za svaku diskretnu slučajnu varijablu možemo istaknuti dva bitna skupa brojeva. Jadan čine sve vrijednosti koje slučajna varijabla X može primiti tj. $\mathcal{R}(X) = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$, a drugi je niz pripadnih vjerojatnosti, tj. $(p_i, i \in \mathbb{N})$ takav da vrijedi $p_i = P\{X = x_i\}$, $i \in \mathbb{N}$.

Uočimo da za elemente od $\mathcal{R}(X)$ vrijedi $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$ obzirom da je to skup, dok u nizu $(p_i, i \in \mathbb{N})$ može biti istih elemenata, ali on ima druga dva bitna svojstva:

1. $0 \leq p_i \leq 1$ za svaki $i \in \mathbb{N}$,
2. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Zaista, budući da je X slučajna varijabla koja prima vrijednosti iz skupa $\mathcal{R}(X)$ to je $P\{X \in \mathcal{R}(X)\} = P(\Omega) = 1$, pa iz svojstava vjerojatnosti slijedi:

$$0 \leq p_i = P\{X = x_i\} \leq 1.$$

Osim toga je:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i\} = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{X = x_i\}\right) = P\{X \in \mathcal{R}(X)\} = 1.$$

Koristeći rezultate poglavlja 1.6 znamo da je pomoću niza realnih brojeva $(p_i, i \in \mathbb{N})$ koji zadovoljava svojstva

1. $0 \leq p_i \leq 1$ za svaki $i \in \mathbb{N}$,
2. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$,

dobro definirana vjerojatnost na diskretnom vjerojatnosnom prostoru koji za skup elementarnih događaja ima skup $\mathcal{R}(X) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$.

Ako brojevi p_i ujedno zadovoljavaju svojstvo

$$P\{X = x_i\} = p_i, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

vjerojatnost definiranu na $\mathcal{R}(X) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ označavat ćemo P_X, a novonastali vjerojatnosni prostor $(\mathcal{R}(X), \mathcal{P}(\mathcal{R}(X)), P_X)$ zovemo **vjerojatnosni prostor induciran slučajnom varijablom** X.

Primjer 2.4. *Zbroj brojeva koji su se okrenuli prilikom dva bacanja kockice je diskretna slučajna varijabla sa sljedećom tablicom distribucije:*

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Ako nas zanima vjerojatnost događaja

$$A = \textit{zbroj brojeva na kockicama je manji od } 6,$$

za izračun ćemo iskoristiti prethodnu tablicu distribucije:

$$P(A) = P\{X < 6\} = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < 6\} = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{18}.$$

Općenito, za računanje vjerojatnosti skupova (događaja) oblika $\{X \in A\}$, gdje je $A \subseteq \mathbb{R}$, možemo iskoristiti tablicu distribucije slučajne varijable X (tablica 2.1) na sljedeći način:

$$P\{X \in A\} = \sum_{x_i \in A} p_i.$$

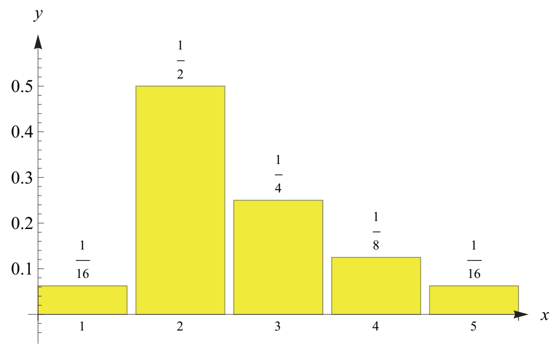
Grafički prikaz distribucije

Za grafički prikaz distribucije diskretne slučajne varijable koja ima konačan skup mogućih vrijednosti $\mathcal{R}(X)$ koristimo **histogram**. Histogram se sastoji od niza stupića, svaki za jednu vrijednost iz $\mathcal{R}(X)$, s visinom $p_i = P\{X = x_i\}$.

Primjer 2.5. *Na temelju tablice distribucije diskretne slučajne varijable definirane u primjeru 2.2, možemo napraviti histogram prikazan na slici 2.2.*

2.2 Neprekidna slučajna varijabla

Ukoliko prostor elementarnih događaja nije diskretan skup, funkcije definirane na njemu ne moraju nužno imati prebrojiv skup svih mogućih vrijednosti, iako to nije isključeno. Ako je za neku funkciju X, definiranu na Ω koji



Slika 2.2: Grafički prikaz distribucije diskretne slučajne varijable iz primjera 2.2.

nije diskretan, skup $\mathcal{R}(X)$ diskretan skup[1], moći ćemo napraviti konstrukciju diskretnog vjerojatnosnog prostora induciranog tom slučajnom varijablom tj. proučavanje takve slučajne varijable svest ćemo na diskretan slučaj. Međutim, ako prostor elementarnih događaja sadrži neki interval, često nas zanimaju i slučajne karakteristike s neprebrojivim skupom vrijednosti.

Primjer 2.6. *Pretpostavimo da promenadom uz rijeku Dravu želimo prošetati od Tvrđe do hotela Osijek. Taj put dug je oko* $2\,km$. *Zbog različite brzine hoda i ostalih subjektivnih utjecaja na trajanje šetnje jasno je da put koji osoba pri tome prijeđe u prvih 5 minuta možemo modelirati kao slučajnu karakteristiku s neprebrojivim skupom mogućih ishoda* $[0, 2]$.

Primjer 2.7. *Praćenje vremena koje protekne od dana stavljanja stroja u upotrebu do prvog kvara je jedno promatranje sa slučajnim ishodima. Pretpostavimo da dobit ostvarena na tom stroju isključivo ovisi o vremenu rada stroja. Time je dobit ostvarena do njegovog prvog stavljanja izvan pogona zbog kvara (koji će uz to uzrokovati dodatne troškove!) slučajna karakteristika za koju je prirodno pretpostaviti da njen skup mogućih realizacija sadrži neki interval.*

U ovom poglavlju definirat ćemo jedan tip slučajne varijable čija je slika $\mathcal{R}(X)$ podskup od $\mathbb{R}$ i sadrži interval.

Definicija 2.2. *Neka je dan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i funkcija* $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *za koju vrijedi:*

[1] Za definiciju diskretne slučajne varijable u općenitom slučaju pogledati [30]

- $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$,
- *postoji nenegativna realna funkcija realne varijable,* $f(t)$, *takva da vrijedi:*
$$P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Funkciju X *zovemo* **apsolutno neprekidna slučajna varijabla** *na* Ω *ili, kraće,* **neprekidna slučajna varijabla**. *Funkciju* $f(t)$ *tada zovemo* **funkcija gustoće vjerojatnosti** *slučajne varijable* X *ili kraće* **funkcija gustoće** *slučajne varijable* X.

Valja napomenuti da nisu sve slučajne varijable, koje nisu diskretne, apsolutno neprekidne u ovom smislu. Za opću teoriju pogledati npr. [30], [4], [6].

Bitna svojstva funkcije gustoće neprekidne slučajne varijable

1. Nenegativnost: $f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$.
2. Normiranost:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$

Dokaz. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ možemo prikazati kao

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{n} f(x)\, dx.$$

Koristeći neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na monotono rastuću familiju skupova imamo:

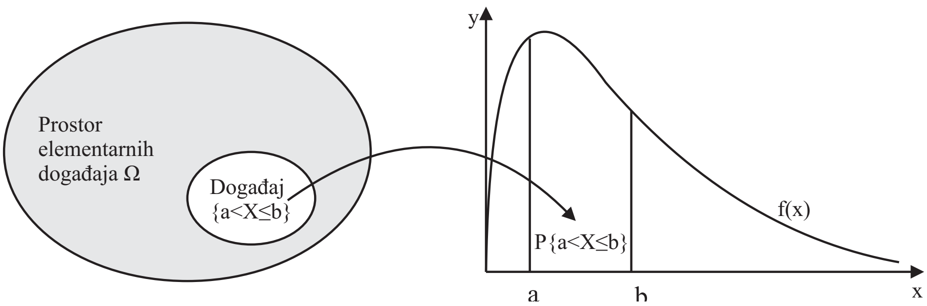
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{n} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} P\{X \in (0, n]\} = P(\Omega) = 1.$$

3. Vjerojatnost da slučajna varijabla X, čija je funkcija gustoće $f(x)$, primi vrijednost iz intervala $(a, b]$ može se izračunati korištenjem funkcije gustoće na sljedeći način (vidi sliku 2.3):

$$P\{a < X \leq b\} = P\{X \in (a, b]\} = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dokaz. Koristeći svojstva vjerojatnosti i svojstva integrala slijedi:

$$\begin{aligned} P\{a < X \leq b\} &= P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} = \\ &= \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx. \end{aligned}$$



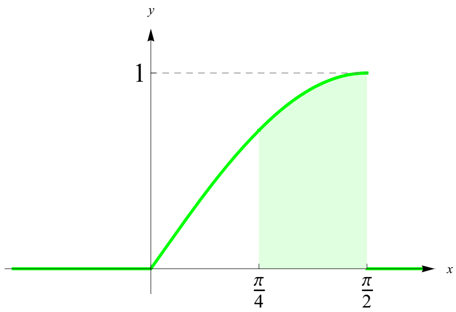
Slika 2.3: Vjerojatnost kao površina od osi x do grafa funkcije gustoće nad izabranim skupom.

Primjer 2.8. *Analizirajmo da li funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana izrazom (vidi sliku 2.8)*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & , \quad x \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

može poslužiti kao funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable X. Ako može, odredimo $P\left\{\frac{\pi}{4} < X \leq \frac{\pi}{2}\right\}$.

- *Iz definicije funkcije f očito je da se radi o nenegativnoj funkciji:*



Slika 2.4: Funkcija gustoće slučajne varijable iz primjera 2.8.

- *na intervalu* $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *je* $f(x) = \sin x$, *a funkcija sinus je na tom intervalu strogo pozitivna,*
- *na* $(-\infty, 0] \cup (\pi/2, \infty)$ *je* $f(x) = 0$.

- *Pokažimo da je funkcija* f *normirana:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1.$$

- *Budući je funkcija* f *nenegativna i normirana zaključujemo da ona može biti korištena kao funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable.*
- *Traženu vjerojatnost računamo na sljedeći način:*

$$P\left\{\frac{\pi}{4} < X \leq \frac{\pi}{2}\right\} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2.3 Funkcija distribucije slučajne varijable

Diskretna i neprekidna slučajna varijabla samo su dva tipa slučajnih varijabli koje se najčešće koriste u praksi. Općenito, **ako je dan bilo kakav vjerojatnosni prostor** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$**, svaku funkciju** X **definiranu na** Ω **sa skupom vrijednosti iz** $\mathbb{R}$ **koja zadovoljava svojstvo**

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

zovemo slučajna varijabla na Ω. Vjerojatnosna svojstva za sve slučajne varijable opisana su tzv. **funkcijom distribucije** o kojoj će biti riječi u ovom poglavlju.

Definicija 2.3. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka je X slučajna varijabla. Funkciju $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ koja realnom broju x pridružuje vjerojatnost da dana slučajna varijabla bude manja ili jednaka tom broju:*

$$F(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\},$$

zovemo **funkcija distribucije slučajne varijable X**.

Svojstva funkcije distribucije:

1. Funkcija distribucije slučajne varijable je monotono rastuća funkcija, tj.
$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ F(x_1) \leq F(x_2).$$
Dokaz. *Ako je $x_1 < x_2$ tada je $\{X \leq x_1\} \subseteq \{X \leq x_2\}$. Primjenom svojstva monotonosti vjerojatnosti na prethodnu činjenicu slijedi tvrdnja.*

2. Neka je $F(x)$ funkcija distribucije neke slučajne varijable. Tada vrijedi:
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0.$$
Dokaz. *Neka je $(a_n, n \in \mathbb{N})$ monotono padajući niz koji divergira u $-\infty$. Tada vrijedi:*
$$\lim_{n \to \infty} F(a_n) = \lim_{n \to \infty} P\{X \leq a_n\} = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X \leq a_n\}\right) = P(\emptyset) = 0.$$
Odavde lako slijedi tvrdnja.

3. Neka je $F(x)$ funkcija distribucije neke slučajne varijable. Tada vrijedi:
$$\lim_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1.$$

Dokaz. *Slično dokazu prethodne tvrdnje.*

4. Funkcija distribucije je neprekidna s desna, tj.

$$\lim_{x \downarrow x_0} F(x) = F(x_0).$$

Dokaz. *Neka je* $x \in \mathbb{R}$ *i* $(h_n, n \in \mathbb{N})$ *monotono padajući niz brojeva takvih da je* $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. *Tada vrijedi:*

$$F(x + h_n) - F(x) = P\{x < X \leq x + h_n\},$$

$$\lim_{n\to\infty} (F(x + h_n) - F(x)) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x < X \leq x + h_n\}\right) = P(\emptyset) = 0.$$

Napomenimo da se može dogoditi da je

$$\lim_{x \uparrow x_0} F(x) \neq F(x_0),$$

tj. funkcija distribucije ne mora nužno biti neprekidna i s lijeva.

Primjer 2.9. *Neka je dana diskretna slučajna varijabla* X *kojom možemo modelirati bacanje pravilnog novčića ako označimo "uspjeh" (npr. palo je "pismo") brojem* 1, *a "neuspjeh" brojem* 0. *Tablica distribucije ove slučajne varijable je*

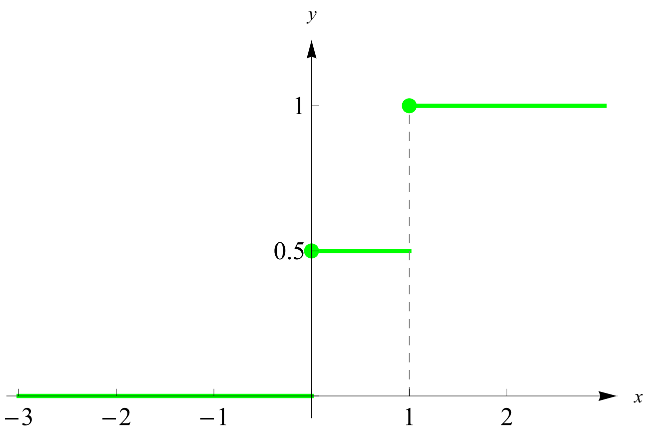
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Funkcija distribucije je 0 *za sve* x *koji su manji od* 0. *U broju* 0 *prima vrijednost* $\frac{1}{2}$ *i ostaje na toj vrijednosti sve do broja* 1 *kada prima vrijednost* 1 *(slika 2.9), tj.*

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad x \in [0, 1) \\ 1 & , \quad x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Uočimo da ova funkcija distribucije nije neprekidna s lijeva.

Koristeći funkciju distribucije i svojstva vjerojatnosti možemo lako računati vjerojatnost da slučajna varijabla primi vrijednost iz nekog skupa A, gdje je



Slika 2.5: Funkcija distribucije za slučajnu varijablu bacanja pravilnog novčića.

skup A neki interval, prebrojiva unija ili presjek intervala, njihova razlika i slično. Tako, npr. za $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, vrijedi:

$$P\{a < X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} = F(b) - F(a),$$

$$P\{X = a\} = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{a - \tfrac{1}{n} < X \leq a\}\right) = \lim_{n\to\infty}(F(a) - F(a - \tfrac{1}{n})),$$

$$P\{a \leq X \leq b\} = P\{X = a\} + P\{a < X \leq b\} = F(b) - \lim_{n\to\infty} F(a - \tfrac{1}{n}), \text{ itd.}$$

Specijalno, ako je slučajna varijabla diskretna, funkcija distribucije se može izraziti koristeći tablicu distribucije slučajne varijable, a ako je neprekidna, koristeći pripadnu funkciju gustoće.

2.3.1 Funkcija distribucije diskretne slučajne varijable

Neka je dana diskretna slučajna varijabla

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix},$$

tj. $\mathcal{R}(X) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ je dani skup vrijednosti slučajne varijable, a $(p_i, i \in \mathbb{N})$ niz pripadnih vjerojatnsti, $p_i = P\{X = x_i\}$, $p_i \geq 0$, $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} p_i = 1$.

Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i.$$

Uočimo da je ovakva funkcija distribucije stepenasta funkcija, tj. funkcija sa skokovima u točkama x_i, dok na intervalu (x_i, x_{i+1}) prima stalno istu vrijednost koja je jednaka $F(x_i)$ (vidi npr. sliku 2.5).

Primjer 2.10. *Neka je diskretna slučajna varijabla zadana sljedećom tablicom distribucije:*

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Prema definiciji funkcije distribucije slijedi da je funkcija distribucije slučajne varijable X definirana formulom

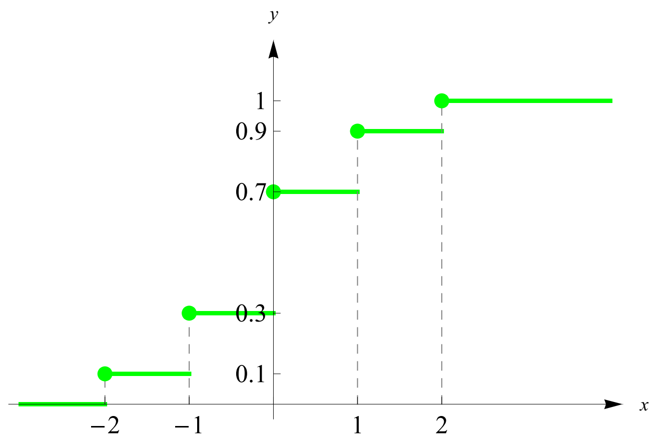
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in (-\infty, -2) \\ 0.1 & , \quad x \in [-2, -1) \\ 0.3 & , \quad x \in [-1, 0) \\ 0.7 & , \quad x \in [0, 1) \\ 0.9 & , \quad x \in [1, 2) \\ 1 & , \quad x \in [2, \infty) \end{cases}.$$

Njen graf prikazan je slikom 2.10.

2.3.2 Funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable

Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće $f(x)$. Dakle, $f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ i

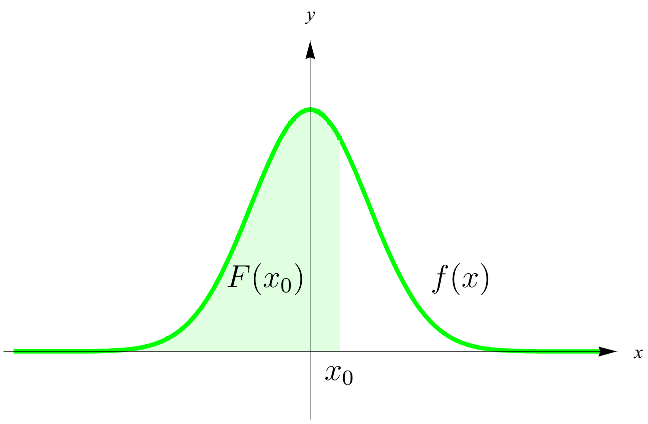
$$P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Slika 2.6: Graf funkcije distribucije diskretne slučajne varijable X iz primjera 2.10.

Odavde direktno slijedi da za funkciju distribucije slučajne varijable X vrijedi (slika 2.7):

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Slika 2.7: Funkcija gustoće (linijski graf) i vrijednost funkcije distribucije u x_0 (osjenčana površina) neprekidne slučajne varijable.

Iz dobro poznatih svojstava integrala očigledno je da je, za razliku od diskretnog slučaja, funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable neprekidna funkcija u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$. Također, funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X može se dobiti kao derivacija pripadne funkcije distribucije, tj.

$$f(x) = F'(x).$$

Odavde slijedi i sljedeće važno svojstvo za neprekidne slučajne varijable.

Neka je X neprekidna slučajna varijabla. Tada za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$P\{X = x_0\} = 0.$$

Dokaz. *Zbog neprekidnosti funkcije distribucije vrijedi:*

$$\begin{aligned} P\{X = x_0\} &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x_0 - \frac{1}{n} < X \leq x_0\}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(F(x_0) - F\left(x_0 - \frac{1}{n}\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

Primjer 2.11. *Odredimo funkciju distribucije neprekidne slučajne varijable s funkcijom gustoće definiranom sljedećim izrazom:*

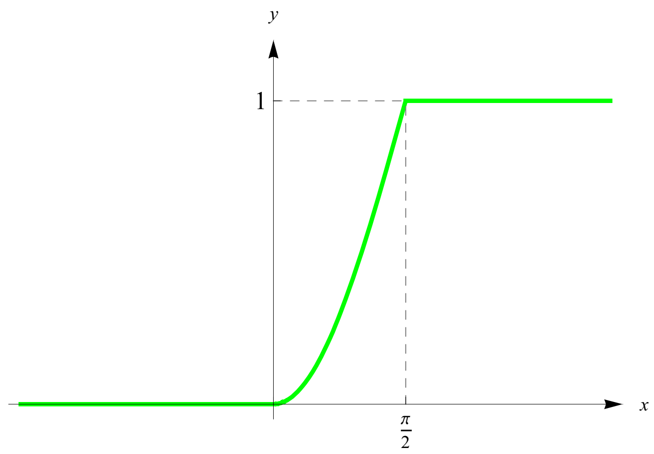
$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & , \quad x \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} . \tag{2.2}$$

- *Ako je $x \in (-\infty, 0]$, tada je*
  $F(x) = P\{X \leq x\} = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0.$
- *Za $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ je*
  $F(x) = P\{X \leq x\} = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{x} f(x)dx = \int\limits_{0}^{x} \sin x dx = 1 - \cos x.$
- *Za $x > \frac{\pi}{2}$ je očigledno $F(x) = F(\frac{\pi}{2}) = 1$.*

Dakle, funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable X je

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in (-\infty, 0] \\ 1 - \cos x & , \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 1 & , \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \infty\right) \end{cases}$$

Iz grafa funkcije distribucije (slika 2.11) vidimo daje F neprekidna funkcija.



Slika 2.8: Graf funkcije distribucije neprekidne slučajne varijable X s gustoćom (2.2).

Intuitivno značanje naziva "gustoća slučajne varijable", za neprekidne slučajne varijable, može se prepoznati iz činjenice da je funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable zapravo derivacija funkcije distribucije. Naime, iz definicije derivacije slijedi:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta x\}}{\Delta x}.$$

Dakle, $f(x)$ je granična vrijednost, po duljini intervala, kvocijenta vjerojatnosti da se X nađe u intervalu $(x, x + \Delta x]$ i duljine intervala, što intuitivno odgovara pojmu gustoće vjerojatnosti.

2.4 Primjeri parametarski zadanih diskretnih distribucija

Neki tipovi tablica distribucije diskretnih slučajnih varijabli koji se često koriste u praksi daju se jednostavno opisati koristeći jedan ili nekoliko realnih brojeva (parametara). Za takve distribucije kažemo da se mogu zadati parametarski i svrstavamo ih u parametarske familije distribucija s prepoznatljivim imenima i svojstvima. U ovom poglavlju definirat ćemo nekoliko takvih familija.

2.4.1 Empirijska distribucija

Za slučajnu varijablu X kažemo da ima empirijsku distribuciju ako je njen skup svih mogućih vrijednosti konačan podskup skupa realnih brojava, tj. $\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, a pripadni niz vjerojatnosti je definiran kao

$$p_i = P\{X = x_i\} = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ovakve distribucije koriste se ako slučajna varijabla X može primiti samo vrijednosti iz skupa $\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i to tako je vjerojatnost realizacije svakog pojedinog ishoda ista, tj. $P\{X = x_i\}$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Uočimo da je na ovaj način dobro definirana tablica distribucije obzirom da je $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Također, pripadni niz vjerojatnosti ovisi samo o broju elemenata skupa $\mathcal{R}(X)$, tj. o broju n.

Primjer 2.12 (Bacanje igraće kockice.)**.** *Neka slučajna varijabla X daje broj koji se okrenuo pri bacanju igraće kockice. Tada ona ima empirijsku distribuciju*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Histogram distribucije bacanja igraće kockice prikazan je slikom 2.9.

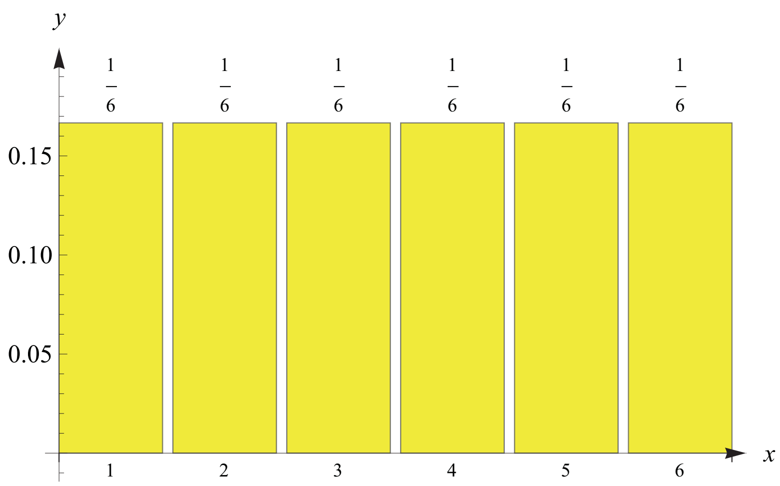
Primjer 2.13. *Pretpostavimo da na ispitu na sreću biramo jedno od m ponuđenih pitanja. Rezultate tog slučajnog pokusa možemo opisati slučajnom varijablom X kojoj pripada sljedeća tablica distribucije (tj. empirijska distribucija):*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & m-1 & m \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \ldots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{pmatrix}.$$

2.4.2 Bernoullijeva distribucija

Neka je X slučajna varijabla koja može primiti točno dvije vrijednosti, i to $\mathcal{R}(X) = \{0, 1\}$. Njena tablica distribucije tada ima oblik:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \; p \in (0, 1), \; q = 1 - p.$$



Slika 2.9: Histogram distribucije bacanja igraće kockice.

Za takvu slučajnu varijablu reći ćemo da ima Bernoullijevu distribuciju s parametrom p. Ovdje parametar p ima značenje vjerojatnosti da X primi vrijednost 1.

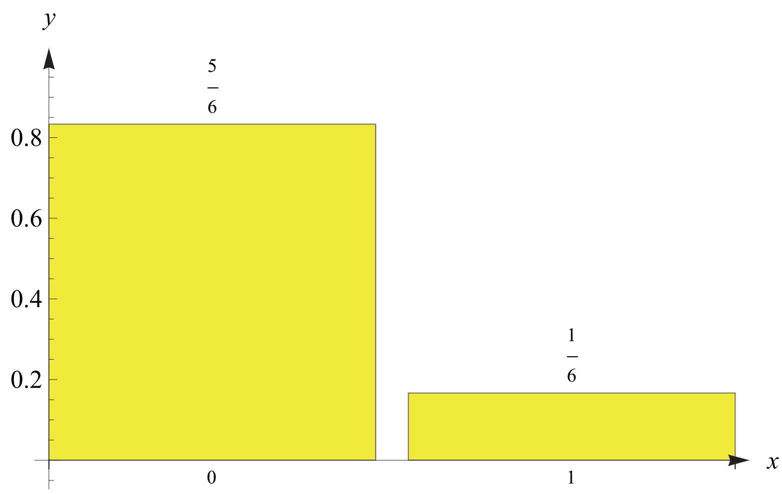
Bernoullijev tip distribucije koristi se pri modeliranju slučajnih karakteristika koje mogu imati točno dvije vrijednosti. Te moguće vrijednosti uglavnom zovemo "uspjeh" i "neuspjeh" te koristimo oznake 1 za "uspjeh", a 0 za "neuspjeh". Dakle, parametar p Bernoulijeve distribucije ima značenje vjerojatnosti pojavljivanja "uspjeha".

Primjer 2.14. *Igramo kockarsku igru u kojoj ostvarujemo dobitak ako se na igraćoj kocki okrene šestica (što interpretiramo kao uspjeh i označavamo s 1). Ishod ove igre modeliramo Bernoullijevom slučajnom varijablom s tablicom distribucije*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Histogram distribucije prikazan je slikom 2.10.

Primjer 2.15. *Izvlačimo jedan proizvod iz velike pošiljke u kojoj je 2% loših. Rezultat izvlačenja možemo modelirati koristeći Bernoullijevu distribuciju ako nas zanima je li*



Slika 2.10: Histogram Bernullijeve distribucije iz primjera 2.14.

izvučen ispravan ili loš proizvod. Neka je 1 *oznaka dobrog proizvoda, tada je:*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.02 & 0.98 \end{pmatrix}$$

2.4.3 Binomna distribucija

Binomna distribucija vezana je uz nezavisno ponavljanje uvijek istog pokusa. Ako nas pri svakom izvođenju pokusa zanima samo je li se dogodio neki događaj (uspjeh!) ili ne (neuspjeh!), onda svako izvođenje pokusa možemo modelirati istom Bernoullijevom distribucijom:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \ p \in (0,1), \ q = 1 - p,$$

gdje p predstavlja vjerojatnost uspjeha.

Pretpostavimo da pokus ponavljamo nezavisno n puta i pri tome nas zanima broj uspjeha. Za slučajnu varijablu X koja opisuje broj uspjeha u n nezavisnih ponavljanja slučajnog pokusa modeliranog Bernoullijevog slučajnom varijablom Y kažemo da ima binomnu distribuciju s paramtrima n i p.

Primjer 2.16. *Stroj proizvodi CD-ove. Vjerojatnost da bude proizveden defektan CD je p. Zanima nas broj defektnih CD-ova ako s beskonačne trake uzimamo njih 100. Slučajna varijabla koja daje broj defektnih CD-ova je:*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 100 \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_{100} \end{pmatrix},$$

gdje je:

$$p_i = P\{X = x_i\} = \binom{100}{i} p^i (1-p)^{100-i},\ i \in \{0, 1, \ldots, 100\}.$$

Definirajmo slučajnu varijablu s binomnom distribucijom.

Definicija 2.4. *Neka je $n \in \mathbf{N}$ i $p \in (0, 1)$. Za slučajnu varijablu koja prima vrijednosti u skupu $\{0, 1, 2, ..., n\}$ s vjerojatnostima*

$$p_i = P\{X = i\} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

kažemo da ima **binomnu distribuciju s parametrima** n **i** p *i pišemo: $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.*

Značenje parametara u $X \sim \mathcal{B}(n, p)$:

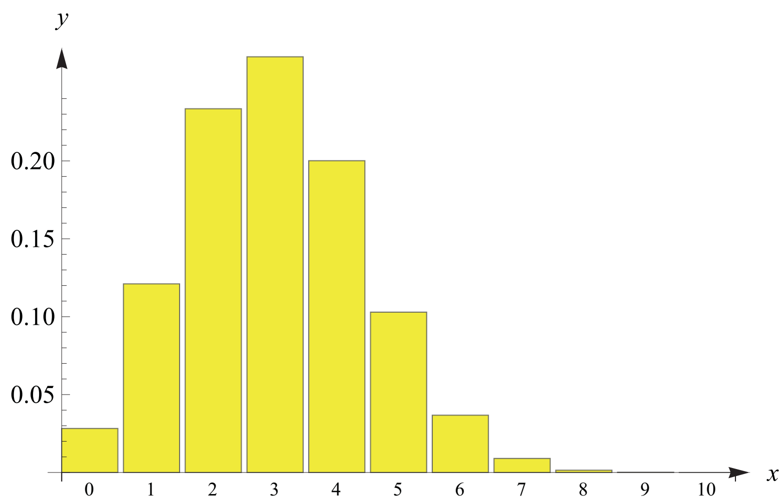
- p je vjerojatnost uspjeha u jednom izvođenju pokusa,
- n je broj nezavisnih ponavljanja pokusa.

Provjerimo je li na ovaj način dobro definirana distribucija, tj. je li $\sum\limits_{i=0}^{n} p_i = 1$. Vrijedi:

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = (p+q)^n = 1.$$

Primjer 2.17. *Pretpostavimo da iz velikog skladišta slatkiša (u kojem se nalaze čokolade, bomboni, keksi, ...) 10 puta nezavisno izvlačimo po jedan slatkiš. Ako je vjerojatnost izvlačenja čokolade u jednoj iteraciji $p = 0.3$, tada slučajna varijabla koja opisuje broj izvučenih čokolada u 10 nezavisnih izvlačenja ima binomnu distribuciju s parametrima $n = 10$ i $p = 0.3$, tj. $X \sim \mathcal{B}(10, 0.3)$. Tablica distribucije slučajne varijable X je:*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & 10 \\ 0.7^{10} & \binom{10}{1} \cdot 0.3 \cdot 0.7^9 & \binom{10}{2} \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^8 & \ldots & 0.3^{10} \end{pmatrix}.$$



Slika 2.11: Histogram binomne distribucija iz primjera 2.17.

Histogram ove distribucije prikazan je slikom 2.11.
Sada lako možemo odrediti npr. sljedeće vjerojatnosti:

a) *vjerojatnost da smo čokoladu izvukli točno* 5 *puta:*

$$P\{X = 5\} = \binom{10}{5} 0.3^5 (1 - 0.3)^5 = 0.102919;$$

b) *vjerojatnost da smo čokoladu izvukli manje od 3 puta:*

$$P\{X < 3\} = P\{X \leq 2\} = \sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} 0.3^k (1 - 0.3)^{10-k} = 0.382783;$$

c) *vjerojatnost da smo čokoladu izvukli barem* 2 *puta:*

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X < 2\} = 1 - \sum_{k=0}^{1} \binom{10}{k} 0.3^k (1 - 0.3)^{10-k} = 0.850692.$$

2.4.4 Poissonova distribucija

Ova distribucija, slično kao i binomna, može se primijeniti kod slučajne varijable koja broji uspjehe. Međutim, ne pri nezavisnom ponavljanju pokusa nego u jediničnom vremenskom intervalu ili intervalu volumena, mase, itd. ako pokus zadovoljava sljedeće uvjete:

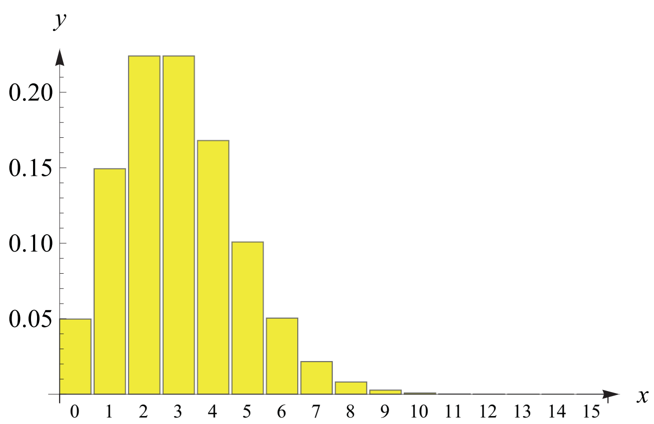
- vjerojatnost da se pojavi uspjeh ne ovisi o tome u kojem će se jediničnom intervalu dogoditi,
- broj uspjeha u jednom intervalu neovisan je o broju uspjeha u nekom drugom intervalu,
- očekivani broja uspjeha je isti za sve jedinične intervale i dan je pozitivnim realnim brojem λ.

Definicija 2.5. *Slučajna varijable X ima* **Poissonovu distribuciju s parametrom** $\lambda > 0$*, ako prima vrijednosti iz skupa* $\{0, 1, 2, \ldots\}$ *s vjerojatnostima*

$$p_i = P\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}.$$

Tada pišemo $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Histogram distribucija Poissonove slučajne varijable s parametrom 3 za skup realizacija $\{0, 1, 2, \ldots, 15\}$ prikazan je slikom 2.12.



Slika 2.12: Histogram Poissonove distribucija s parametrom 3 za skup realizacija $\{0, 1, 2, \ldots, 15\}$.

Provjerimo je li na ovaj način dobro definirana distribucija, tj. je li $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$. Vrijedi:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

Primjer 2.18. *Pretpostavimo da neki kafić u toku jednog sata posjeti prosječno* 15 *ljudi. Slučajna varijabla koja broji posjetitelje kafića tijekom jednog sata je Poissonova slučajna varijabla s parametrom* $\lambda = 15$, *tj.* $X \sim \mathcal{P}(15)$. *Ona prima vrijednosti iz skupa* $\mathcal{R}(X) = \{0, 1, \ldots\}$ *s pripadnim vjerojatnostima*

$$p_i = \frac{15^i}{i!}\, e^{-15}, \quad i \in \mathcal{R}(X).$$

Na temelju navedenih informacija možemo npr. odrediti sljedeće vjerojatnosti:

a) vjerojatnost da je kafić u toku jednog sata posjetilo točno 20 *ljudi:*

$$P\{X = 20\} = \frac{15^{20}}{20!}\, e^{-15} = 0.0418103;$$

b) vjerojatnost da je kafić u toku jednog sata posjetilo manje od 15 *ljudi:*

$$P\{X < 15\} = P\{X \leq 14\} = \sum_{i=0}^{14} \frac{15^i}{i!}\, e^{-15} = 0.465654;$$

c) vjerojatnost da je kafić u toku jednog sata posjetilo više od 10 *ljudi:*

$$P\{X > 10\} = 1 - P\{X \leq 10\} = 1 - \sum_{i=0}^{10} \frac{15^i}{i!}\, e^{-15} = 0.881536.$$

Poissonova distribucija se može dobiti i kao aproksimacija binomne ako je parametar n binomne jako velik. Ilustracija ove tvrdnje dana je primjerom 2.19.

Primjer 2.19. *Na neku telefonsku centralu u pola sata stiže* 600 *poziva uglavnom ravnomjerno raspoređenih u tom vremenu (tj. prosječno* $\frac{600}{30} = 20$ *po minuti). Broj poziva u prvoj minuti možemo modelirati binomnom distribucijom. Naime, vjerojatnost da se poziv dogodi u prvoj od tih* 30 *minuta je* $p = \frac{1}{30}$ *(jer su pozivi uglavnom jedoliko raspoređeni u vremenu). Međutim, broj poziva u minuti je slučajna varijabla pa, iako je prosječan broj poziva po minuti* 20, *u modelu moramo pretpostaviti da se u prvoj minuti može dogoditi od* 0 *do* 600 *poziva, dakle,* $n = 600$ *za ovu binomnu slučajnu varijablu. Uočimo da prosječan broj poziva po minuti iznosi* np.

Problem s binomnom distribucijom u ovom primjeru je prvenstveno taj da moramo pretpostaviti maksimalan broj poziva u minuti, što u modelu telefonske centrale nije razumno. Međutim, ovdje je $n = 600$ *velik, a* $p = \frac{1}{30}$ *malen pa vjerojatnosti zadane po binomnoj* *distribuciji možemo dobro aproksimirati izrazima kojima su zadane vjerojatnosti po Poissonovoj distribuciji s parametrom koji odgovara prosječnom broju poziva po minuti, tj.* $\lambda = np = 20$.

Označimo $np = \lambda$ *i pokažimo da se, pod pretpostavkom velikog* n*, vjerojatnosti po binomnoj distribuciji mogu dobro aproksimirati vjerojatnostima po Poissonovoj. Zaista, za binomnu slučajnu varijablu* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$*, te za* $i \in \{0,\ldots,n\}$ *je*

$$p_i(n) = P\{X = i\} = \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{i!} p^i(1-p)^{n-i}.$$

Stavimo: $\lambda = np$*, tj.* $p = \lambda/n$ *i dobijemo:*

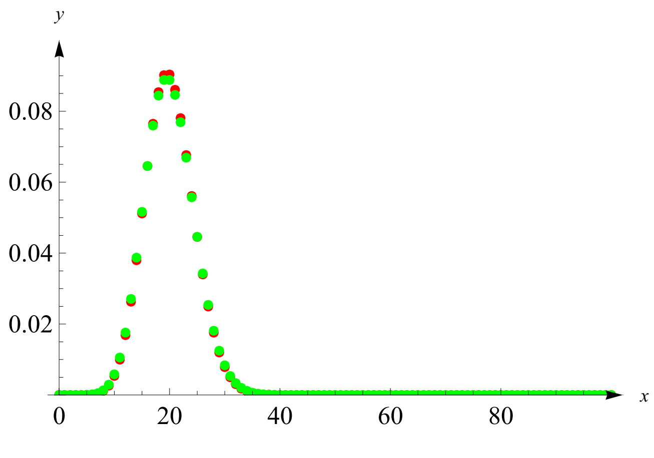
$$p_i(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{i!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^i\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} =$$

$$= \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\lambda^i\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-i}$$

Pustimo li da broj n *neograničeno raste vidimo da je:*

$$\lim_{n\to\infty} p_i(n) = \frac{1}{i!}\lambda^i e^{-\lambda}.$$

Slikom 2.13 prikazan je graf binomne distribucije s parametrima $p = 30$ *i* $n = 600$ *i Poissonove s parametrom* $\lambda = 20$ *koji ilustrira kvalitetu aproksimacije.*



Slika 2.13: Graf binomne ($\mathcal{B}(600, \frac{1}{30})$, crvene točkice) i Poissonove ($\mathcal{P}(20)$, zelene točkice) distribucije za $i = 0,\ldots,100$.

2.4.5 Geometrijska distribucija

Ova distribucija također je vezana uz nezavisno ponavljanje istog pokusa s ishodima "uspjeh" i "neuspjeh", kao i binomna. Međutim, ona se ne koristi za opisivanje broja uspjeha već za opisivanje broja ponavljanja pokusa do prvog uspjeha. Preciznije govoreći, neka je vjerojatnost pojavljivanja događaja A u svakom od nezavisnih ponavljanja istog pokusa $p \in (0,1)$. Geometrijskom distribucijom opisana je slučajna varijabla koja daje broj potrebnih pokusa da bi se realizirao taj događaj. Budući da je, pod ovim pretpostavkama, vjerojatnost pojavljivanja događaja A u k-tom pokusu

$$P\{X=k\} = P\left(\underbrace{A^c \bigcap A^c \bigcap \cdots \bigcap A^c}_{(k-1)\ puta} \bigcap A\right) = (1-p)^{k-1}p,$$

geometrijsku distribuciju možemo definirati na slijedeći način:

Definicija 2.6. *Slučajna varijabla X ima* **geometrijsku distribuciju s parametrom** *p, $p \in (0,1)$, ako prima vrijednosti iz skupa $\{1,2,3,\ldots\}$ s vjerojatnostima*

$$p_k = P\{X=k\} = p(1-p)^{k-1}.$$

Pokažimo da je na ovaj način dobro definirana distribucija, tj. da je $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Koristeći formulu za sumu geometrijskog reda imamo:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

Primjer 2.20. *Tipkovnica na prijenosnom računalu nekog proizvođača sastoji se od 86 tipki. Pretpostavimo da zatvorenih očiju trebamo stisnuti tipku za slovo A. Budući je vjerojatnost pogotka bilo koje tipke jednaka $1/86$ (pretpostavimo da pri svakom pokušaju pogodimo neku tipku, tj. da nikada ne promašimo tipkovnicu), zaključujemo da slučajna varijabla koja opisuje broj stisnutih tipki do uspješnog stiskanja tipke za slovo A ima geometrijsku distribuciju s parametrom $p = 1/86$. Tako definirana slučajna varijabla prima vrijednosti iz skupa $\mathcal{R}(X) = \{1,2,\ldots\}$ s pripadnim vjerojatnostima*

$$p_k = P\{X=k\} = \frac{1}{86}\left(1-\frac{1}{86}\right)^{k-1}.$$

Sada možemo izračunati sljedeće vjerojatnosti:

a) vjerojatnost da je tipka za slovo A stisnuta u petnaestom pokušaju:

$$P\{X = 15\} = \frac{1}{86}\left(1 - \frac{1}{86}\right)^{14} = 0.00987161.$$

b) vjerojatnost da je tipka za slovo A stisnuta u manje od 5 pokušaja:

$$P\{X < 5\} = P\{X \leq 4\} = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{86}\left(1 - \frac{1}{86}\right)^{k-1} = 0.0457066.$$

c) vjerojatnost da niti nakon 20 pokušaja još nismo uspjeli stisnuti tipku za slovo A:

$$P\{X > 20\} = 1 - P\{X \leq 20\} = 1 - \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{86}\left(1 - \frac{1}{86}\right)^{k-1} = 0.791424.$$

2.4.6 Hipergeometrijska distribucija

Neka je skup iz kojeg vršimo odabir elemenata konačan i neka se sastoji od točno N elemenata od kojih je M tipa 1, a $(N - M)$ tipa 2. Pretpostavimo da smo na slučajan način iz tog skupa odabrali $n < N$ elemenata, i to bez vraćanja prethodno izvučenih elemenata. Tada broj izvučenih elemenata tipa 1 modeliramo **hipergeometrijskom distribucijom** s parametrima N, M i n.

Definicija 2.7. *Diskretna slučajna varijabla X ima* **hipergeometrijsku distribuciju** *s parametrima N, M i n, $N, M, n \in \mathbb{N}$, ako prima vrijednosti iz skupa $\mathcal{R}(X) = \{k \in \mathbb{N} : \max(0, n - N + M) \leq k \leq \min(n, M)\}$ s vjerojatnostima*

$$p_k = P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Pokažimo da je na ovaj način dobro definirana distribucija, tj. da je $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k =$

1. Primjenom gornje Van der Mondeove konvolucije slijedi:

$$\sum_{k=0}^{n} p_i = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} = \frac{\binom{N}{n}}{\binom{N}{n}} = 1.$$

Primjer 2.21. *Na polici se nalazi* 10 *knjiga od kojih su* 4 *kriminalistički romani. Na slučajan način biramo* 5 *knjiga. Slučajna varijabla X koja modelira broj kriminalističkih romana od* 5 *odabranih knjiga ima hipergeometrijsku distribuciju s parametrima $N = 10$, $M = 4$ i $n = 4$. Slika slučajne varijable X je skup $\mathcal{R}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Na temelju poznatih informacija odredite:*

a) vjerojatnost da su odabrana točno 3 *kriminalištička romana:*

$$P\{X = 3\} = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{10-4}{5-3}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{21}.$$

b) vjerojatnost da su odabrana najviše 3 *kriminalištička romana:*

$$P\{X \leq 3\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = \frac{41}{42}.$$

c) vjerojatnost da su odabrana najmanje 3 *kriminalištička romana:*

$$P\{X \geq 3\} = 1 - P\{X < 3\} = 1 - (P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\}) = \frac{11}{42}.$$

Neka je X hipergeometrijska slučajna varijabla s parametrima N, M i n. Ako $N \to \infty$ i $M \to \infty$ tako da $M/N \to p$, gdje je p pozitivna konstanta, tada

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Ova tvrdnja daje aproksimaciju hipergeometrijske distribucije binomnom distribucijom u slučaju kad je n malen u odnosu na N i M, a intuitivno se može opravdati time da se odabir n elemenata iz N-članog skupa bez vraćanja prethodno izvučenih elemenata (hipergeometrijska distribucija) može za velik N "aproksimirati" odabirom n elemenata s vraćanjem izvučenih elemenata u skup (binomna distribucija).

2.5 Primjeri parametarski zadanih neprekidnih distribucija

Slično kao u diskretnom slučaju, i među neprekidnim slučajnim varijablama postoje parametarski zadane familije slučajnih varijabli koje se često koriste. Ovdje ćemo uvesti samo četiri takve familije. Još neke od njih, koje ćemo koristiti u statistici, definirat ćemo naknadno.

2.5.1 Uniformna distribucija na intervalu (a, b)

Ova distribucija veže se uz pokuse za koje je poznato da mogu primiti vrijednost iz ograničenog intervala (a, b) ali pri tome nema razloga preferirati neko područje, tj. vjerojatnost realizacije intervala (x_1, x_2) će ovisiti samo o njegovoj duljini sve dok je on sadržan u (a, b).

Definicija 2.8. *Za neprekidnu slučajnu varijablu X kažemo da ima* **uniformnu distribuciju na intervalu** (a, b), $a < b$, *ako joj je funkcija gustoće vjerojatnosti dana izrazom*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \quad x \in (a, b) \\ 0 & , \quad x \notin (a, b) \end{cases} .$$

Obzirom da za svaku neprekidnu slučajnu varijablu X vrijedi $P\{X = x_0\} = 0$, vidimo da u vjerojatnosnom smislu ne treba praviti bitnom razliku između uniformne distribucije na (a, b) i uniformne distribucije na $[a, b]$ odnosno na nekom od intervala $(a, b]$, $[a, b)$.

Funkcija distribucije neprekidne uniformne slučajne varijable definirana je na sljedeći način:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in (-\infty, a) \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , \quad x \in [a, b) \\ 1 & , \quad x \in [b, \infty) \end{cases} .$$

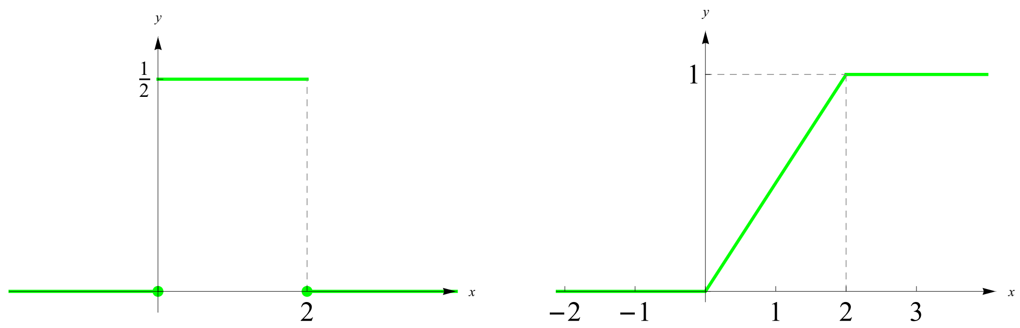
Primjer 2.22. *Pretpostavimo da imamo posudu u koju stane najviše 2 litre vode te da smo iz slavine u nju slučajno natočili nepoznatu količinu vode. Slučajna varijabla kojom opisujemo količinu vode natočenu u posudu može se modelirati kao neprekidna uniformna slučajna varijabla na intervalu $(0, 2)$. Prema tome, njezina funkcija gustoće dana je izrazom*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad x \in (0,2) \\ 0 & , \quad x \notin (0,2) \end{cases},$$

a funkcija distribucije izrazom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in (-\infty, 0] \\ \frac{x}{2} & , \quad x \in (0,2) \\ 1 & , \quad x \in [2, \infty) \end{cases}.$$

Grafički prikazi funkcije gustoće i funkcije distribucije dani su slikom 2.14.



Slika 2.14: Graf funkcije gustoće i funkcije distribucije uniformne distribucije na intervalu $(0, 2)$.

Npr. vjerojatnost da smo na slučajan način iz slavine u posudu natočili više od pola litre, ali najviše jednu litru, računamo na sljedeći način:

$$P\{0.5 < X \leq 1\} = P\{X \leq 1\} - P\{X \leq 0.5\} = \frac{1}{2}\int_{0.5}^{1} dx = \frac{1}{4}.$$

2.5.2 Eksponencijalna distribucija

Ovaj tip distribucije često se javlja kod slučajnih varijabli koje imaju značenje vremena čekanja do pojave nekog događaja ako se karakteristike ne mijenjaju tijekom vremena, npr. vrijeme do kvara (tj. vrijeme trajanje) jedne žarulje, vrijeme do pojave neke nesreće, itd.

Naime, analizirajmo slučajnu varijablu X koja modelira vrijeme potrebno do pojave danog događaja pod sljedećim pretpostavkama:

- vjerojatnost pojave događaja u trenutku t ne ovisi o t,
- uvjetna vjerojatnost pojavljivanja događaja u nekom kratkom intervalu $(t, t+\Delta t)$, uz uvijet da se nije dogodio prije t, proporcionalna je duljini tog intervala, tj.

$$P(\{X \leq t + \Delta t\} | \{X > t\}) = \lambda \Delta t, \quad \lambda > 0.$$

Vjerojatnost da je vrijeme do pojave događaja veća od $t + \Delta t$ je

$$P\{X > t + \Delta t\} = P\left(\{X > t + \Delta t\} | \{X > t\}\right) P\{X > t\}.$$

Međutim, pod ovim pretpostavkama je

$$P\left(\{X > t + \Delta t\} | \{X > t\}\right) = 1 - P\left(\{X \leq t + \Delta t\} | \{X > t\}\right) = 1 - \lambda \Delta t,$$

pa vrijedi

$$P\{X > t + \Delta t\} = (1 - \lambda \Delta t) P\{X > t\}.$$

Označimo funkciju $S(t) = P\{X > t\}$. Ova funkcija, za male Δt, treba zadovoljavati svojstvo

$$S(t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) S(t),$$

tj.

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = -\lambda S(t),$$

što u limesu, za $\Delta t \to 0$, znači da mora zadovoljavati diferencijalnu jednadžbu

$$S'(t) = -\lambda S(t).$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe je $S(t) = Ce^{-\lambda t}$, a konstantu možemo odrediti iz prirodnog uvjeta $S(0) = P\{X > 0\} = 1$. Dakle,

$$S(t) = P\{X > t\} = e^{-\lambda t},$$

što znači da funkcija distribucije slučajne varijable X ima oblik

$$F(t) = 1 - P\{X > t\} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Ovo je upravo funkcija distribucije slučajne varijable koju zovemo eksponencijalna s parametrom $\lambda > 0$.

Definicija 2.9. *Neprekidna slučajna varijabla X ima* **eksponencijalnu distribuciju** *s parametrom $\lambda > 0$ ako je funkcija gustoće dana izrazom*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & , \ x \geq 0 \end{cases}.$$

Funkcija distribucije ove slučajne varijable dana je izrazom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , \ x \geq 0 \end{cases}.$$

Primjer 2.23. *Vrijeme u sekundama koje protekne od servisa do prvog udara teniske loptice u tlo modelirano je eksponencijalnom slučajnom varijablom s parametrom $\lambda = 1/3$. Grafovi funkcije gustoće i funkcije distribucije ove slučajne varijable dani su na slici 2.15*

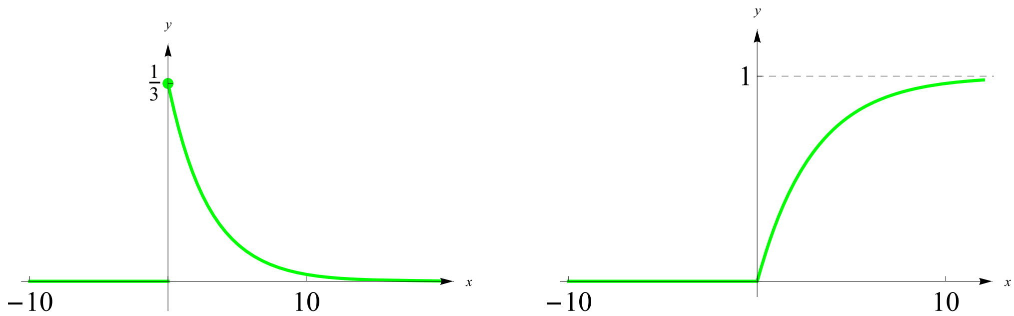
Npr. vjerojatnost da će od servisa do prvog udara teniske loptice u tlo proći više od dvije, ali najviše četiri sekunde, računamo na sljedeći način:

$$P\{2 < X \leq 4\} = P\{X \leq 4\} - P\{X \leq 2\} = \frac{1}{3}\int_2^4 e^{x/3}\,dx = e^{2/3}(e^{2/3} - 1) \approx 1.84593.$$

2.5.3 Dvostrana eksponencijalna distribucija

Definicija 2.10. *Neprekidna slučajna varijabla X ima* **dvostranu eksponencijalnu distribuciju** *s parametrom $\lambda > 0$ ako je funkcija gustoće dana izrazom*

$$f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

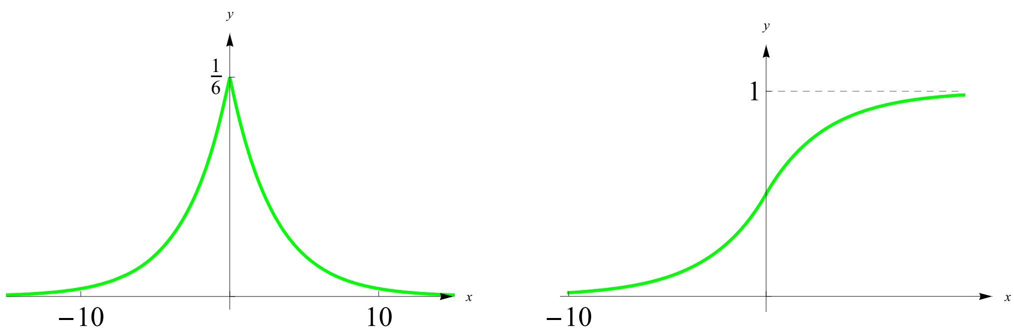


Slika 2.15: Graf funkcije gustoće i funkcije distribucije eksponencijalne s parametrom $\lambda = 1/3$.

Funkcija distribucije ove slučajne varijable definirana je sljedećim izrazom:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda x} & , \quad x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \end{cases} .$$

Primjer 2.24. *Grafovi funkcije gustoće i funkcije distribucije slučajne varijable X s dvostranom eksponencijalnom distribucijom s parametrom $\lambda = \frac{1}{3}$ prikazani su slikom 2.16.*

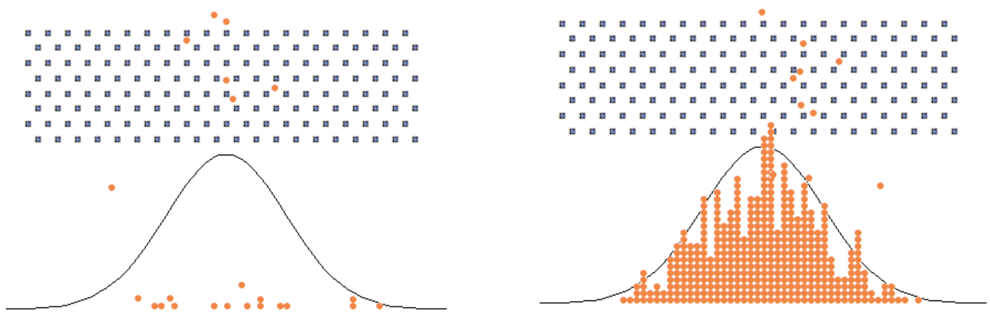


Slika 2.16: Graf funkcije gustoće i distribucije dvostrane eksponencijalne s parametrom $\lambda = 1/3$.

2.5.4 Normalna distribucija

Ova slučajna varijabla se najviše koristi u statističkoj teoriji i primjeni. Teorija je pokazala da ona vrlo dobro opisuje pokuse čiji su ishodi posljedica sume mnogo međusobno nezavisnih i jednako distribuiranih utjecaja. Objasnimo ovu činjenicu primjerom.

Primjer 2.25 (Galtonova daska[2])**.** *U dasku ubodemo pribadače kao što je prikazano na slici 2.17 i iz izvora pri vrhu konstrukcije pustimo da pada mnoštvo malih kuglica. U podnožju ih zaustavljamo podlogom i određujemo funkciju koja opisuje gustoću kuglica na toj podlozi. Jasno je da su kuglice mnogo puta udarile u pribadače prije nego su pale i svaki puta su promjenile smjer kretanja. Njihov pomak u stranu od mjesta s kojeg su bačene nastao je kao suma mnogo malih jednako distribuiranih i nezavisnih pomaka uzrokovanih sudarima. Dobivena gustuća kuglica na dasci ima upravo zvonoliki oblik Gaussove krivulje koja je funkcija gustoće normalne slučajne varijable.*



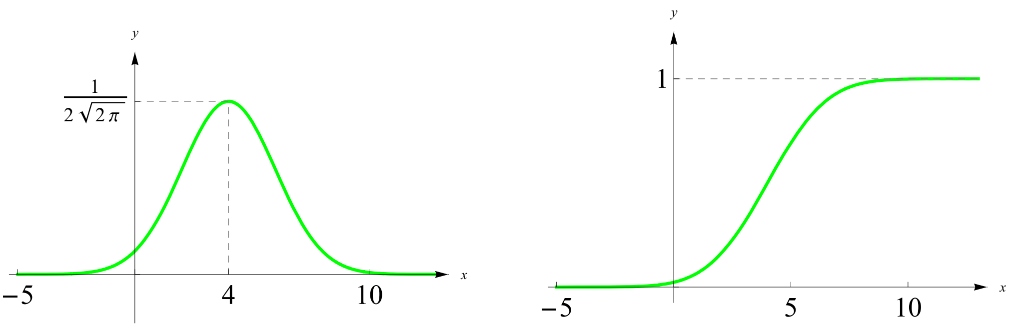
Slika 2.17: Galtonova daska.

Definicija 2.11. *Za neprekidnu slučajnu varijablu kažemo da ima* **Gaussovu** *ili* **normalnu** *distribuciju s parametrima μ i σ^2 ako je njena funkcija gustoće dana izrazom*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

[2]Ovim eksperimentom engleski znanstvenik Sir Francis Galton (1822-1911) demonstrirao je centralni granični teorem. Eksperiment je poznat i pod nazivima "bean machine", "quincunx" i " Galtonova kutija". Pretražite Internet na tu temu!

gdje su μ i σ realni brojevi i $\sigma > 0$ (slika 2.18). Ako slučajna varijabla X ima normalnu distribuciju s parametrima μ i σ koristimo oznaku $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.



Slika 2.18: Graf funkcije gustoće i funkcije distribucije slučajne varijable $X \sim \mathcal{N}(4, 2)$.

Funkcija distribucije normalne slučajne varijable (slika 2.18) definirana je izrazom

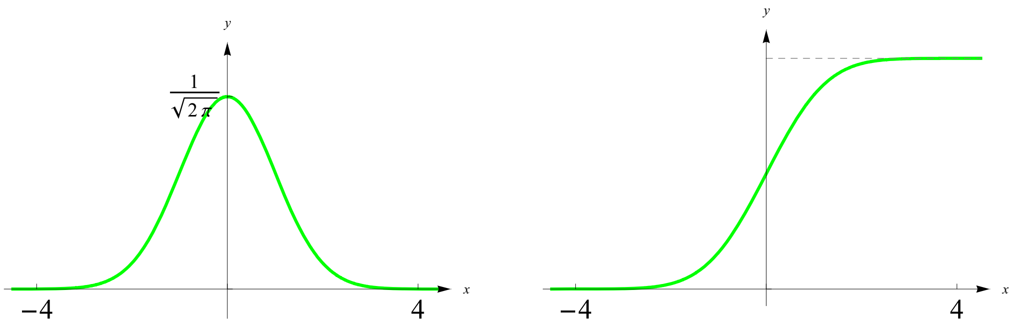
$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Specijalno, normalna distribucija s parametrima $\mu = 0$ i $\sigma = 1$ zove se **jedinična** ili **standarna normalna distribucija**. Gustoća jedinične normalne distribucije dana je izrazom

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}.$$

Vrijednosti funkcije distribucije za ovakve slučajne varijable moraju se računati korištenjem metoda numeričkog integriranja obzirom da se integrali uglavnom ne daju riješiti eksplicitno. U većini knjiga koje primjenjuju statistiku dane su tablice vrijednosti funkcije distribucije standardne normalne slučajne varijable koja je definirana sljedećim izrazom:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$



Slika 2.19: Graf funkcije gustoće i funkcije distribucije standardne normalne slučajne varijable.

U današnje vrijeme se za računanje vjerojatnosti po normalnoj distribuciji najčešće koriste naprednija džepna računala ili korisnički programi za računala.

Primjer 2.26. *Vrijeme (u satima) koje student treće godine studija matematike provede učeći u jednom danu može se opisati slučajnom varijablom X koja ima normalnu distribuciju s parametrima $\mu = 5.43$ i $\sigma = 0.7$. Korištenjem programskog paketa Mathematica i ugrađene funkcije $CDF[\ ]$ [3] odredite:*

a) vjerojatnost da student učeći provede manje od 5 sati:

$$P\{X < 5\} = CDF[ndist, 5] = 0.269513,$$

gdje je $ndist = NormalDistribution[5.43, 0.7]$.

b) vjerojatnost da student učeći provede barem 3 sata:

$$P\{X \geq 3\} = 1 - P\{X < 3\} = 1 - CDF[ndist, 3] = 0.999741.$$

c) vjerojatnost da student učeći provede između 3 i 7 sati:

$$P\{3 < X < 7\} = CDF[ndist, 7] - CDF[ndist, 3] = 0.987288.$$

[3] CDF = cumulative distribution function.

2.6 Numeričke karakteristike slučajne varijable

Iz prethodnih razmatranja jasno je da za opisivanje neke jednodimenzionalne veličine, koja ima slučajan karakter, kao model može poslužiti slučajna varijabla. Za njeno zadavnje potrebno je zadati distribuciju pa su tada u potpunosti određena vjerojatnosna svojstva. Distribucije mogu biti jednostavne ali i vrlo složenog karaktera i nije uvijek jednostavno predočiti zakonitosti ponašanja slučajne karakteristike ispisivanjem njene distribucije. Razvojem teorije vjerojatnosti postalo je jasno da je često za slučajnu varijablu moguće definirati nekoliko karakterističnih brojeva koji mogu, zbog svojih generalnih svojstava, dodatno pomoći u opisivanju slučajne varijable. Takve karakteristične brojeve zvat ćemo **numeričke karakteristike** slučajne varijable.

2.6.1 Očekivanje diskretne slučajne varijable

Osnovna numerička karakteristika slučajne varijable je matematičko očekivanje.

Definicija 2.12. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *diskretan vjerojatnosni prostor i* X *slučajna varijabla na njemu. Ako red* $\sum\limits_{\omega\in\Omega} X(\omega)P\{\omega\}$ *apsolutno konvergira (tj. ako konvergira red* $\sum\limits_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|P\{\omega\}$*), onda kažemo da slučajna varijabla* X *ima matematičko očekivanje i broj*

$$EX = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P\{\omega\}$$

zovemo **matematičko očekivanje (očekivanje)** *slučajne varijable* X*.*

Ova definicija matematičkog očekivanja ne može se jednostavno primijeniti za njegovo računanje obzirom da je dana zadavanjem slučajne varijable na temeljnom vjerojatnosnom prostoru. Za računanje matematičkog očekivanja puno je prikladnija formula koja se može dati na osnovu tablice distribucije diskretne slučajne varijable, o čemu upravo govori sljedeći teorem.

Teorem 2.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *diskretan vjerojatnosni prostor i*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

slučajna varijabla na njemu. Redovi $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P\{\omega\}$ *i* $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i p_i$ *istovremeno ili apsolutno konvergiraju ili apsolutno divergiraju. U slučajnu apsolutne konvergencije sume su im jednake, tj. vrijedi*

$$EX = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P\{\omega\} = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i p_i.$$

Dokaz. Koristeći činjenicu da familija skupova $\{\{X = x_i\}, i \in \mathbb{N}\}$ čini particiju skupa Ω (jer je s X zadana funkcija!) vidimo da se jedan red može dobiti iz drugog "preslagivanjem članova" u smislu teorije ponovljenih redova, tj.

$$\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P\{\omega\} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{\{X(\omega)=x_i\}} X(\omega)P\{\omega\} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{\{X(\omega)=x_i\}} x_i P\{\omega\} =$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \sum_{\{X(\omega)=x_i\}} P\{\omega\} = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i p_i.$$

Korištenjem rezultata poglavlja 3.3 (Dodatak) zaključujemo da ovi redovi istovremeno ili apsolutno konvergiraju ili apsolutno divergiraju, a u slučaju apsolutne konvergencije sume su im jednake.

Primjer 2.27. *Neka slučajna varijabla X opisuje rezultate bacanja igraće kockice. Očekivanje ove slučajne varijable je broj*

$$EX = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} i = \frac{21}{6}.$$

Ako je zadana slučajna varijabla X na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ i funkcija $g : \mathcal{R}(X) \to \mathbb{R}$, onda je kompozicijom $g(X)$ također dana slučajna varijabla na istom vjerojatnosnom prostoru. Npr. X^2, $2X + 3$, e^X,... su tako nastale slučajne varijable. Za računanje njihovih očekivanja (ako postoje) neće biti potrebno specificirati njihove distribucije već se može iskoristiti distribucija slučajne varijable X. Naime, ako red $\sum\limits_{\omega\in\Omega} g(X(\omega))P\{\omega\}$ apsolutno konvergira onda postoji očekivanje $Eg(X)$. Međutim, uobičajenim "preslagivanjem" koristeći particiju $\{\{X = x_i\}, i \in \mathbb{N}\}$ od Ω i teoriju ponovljenih redova, vidimo da vrijedi:

$$\sum_{\omega\in\Omega} g(X(\omega))P\{\omega\} = \sum_{i\in\mathbb{N}} g(x_i)p_i.$$

Time smo dokazali sljedeći koristan rezultat:

Teorem 2.2. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *diskretan vjerojatnosni prostor,*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

slučajna varijabla na njemu i $g : \mathcal{R}(X) \to \mathbb{R}$ *funkcija takva da postoji* $Eg(X)$. *Tada vrijedi:*

$$Eg(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} g(x_i)p_i.$$

Koristeći ovaj rezultat i definiciju očekivanja možemo dokazati da vrijede sljedeća korisna svojstva očekivanja:

1. Neka su a i b realni brojevi, a X slučajna varijabla koja ima očekivanje. Tada i slučajna varijabla $aX + b$ ima očekivanje i vrijedi:

   $$E(aX + b) = aEX + b.$$

2. Ako su X i Y dvije slučajne varijable koje imaju očekivanja i ako vrijedi $X(\omega) \leq Y(\omega)$ za sve $\omega \in \Omega$ onda je i $EX \leq EY$ (**monotonost očekivanja**).

3. Ako je X slučajna varijabla koja ima svojstvo $X(\omega) \geq 0$ i ako je red $\sum\limits_{\omega\in\Omega} X(\omega)P\{\omega\}$ konvergentan, tada je $EX \geq 0$ (**pozitivnost očekivanja**).

Osim navedenih svojstava, očekivanje ima i svojstvo linearnosti. Naime vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 2.3. *Neka su X i Y dvije slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ koje imaju očekivanja EX, odnosno EY. Tada za proizvoljne $a, b \in \mathbb{R}$, slučajna varijabla $aX + bY$ također ima očekivanje i vrijedi*

$$E(aX + bY) = aEX + bEY.$$

Dokaz. Iz apsolutne konvergencije redova $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P\{\omega\}$ i $\sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P\{\omega\}$ slijedi apsolutna konvergencija reda $\sum_{\omega\in\Omega} (aX(\omega) + bY(\omega))P\{\omega\}$. Tvrdnja teorema slijedi iz poznatih rezultata o sumi konvergentnih redova (vidi npr. [13]).

Koristeći princip matematičke indukcije može se dokazati i generalizacija teorema 2.3 na linearnu kombinaciju konačno mnogo diskretnih slučajnih varijabli koje imaju očekivanje. Formulirajte tvrdnju i dokažite je!

Primjer 2.28. *Pretpostavimo da izvodimo slučajan pokus bacanja nepravilno iskovanog novčića kod kojega je relizacija pisma favorizirana i odgovarajuća vjerojatnost iznosi* 0.7 *(koristit ćemo oznake:* 1*=realizacija pisma;* 0*=realizacija glave). Tada slučajna varijabla* X *kojom modeliramo ovaj pokus ima Bernoullijevu distribuciju s parametrom* $p = 0.7$*, tj.*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Slučajna varijabla Y *koja opisuje broj realiziranih pisama nakon* 100 *nezavisnih bacanja ovog novčića ima binomnu distribuciju s parametrima* $n = 100$ *i* $p = 0.7$*, tj.* $Y \sim \mathcal{B}(100, 0.7)$*. Kako binomnu slučajnu varijablu možemo predstaviti kao sumu* n *Bernoullijevih slučajnih varijabli, tj.*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad X_i \text{ jednako distribuirana kao } X, \quad \forall i,$$

računanje matematičkog očekivanja od Y *znatno je pojednostavljeno i svodi se na primjenu svojstva aditivnosti očekivanja:*

$$EX = \sum_{i=1}^{100} EX_i = \sum_{i=1}^{100} (0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.7) = \sum_{i=1}^{100} 0.7 = 100 \cdot 0.7 = 70.$$

Za očekivanje obično kažemo da je jedna mjera centralne tendencije slučajne varijable. Naime, ako se pitamo postoji li realan broj koji je na neki način "najbliži" slučajnoj varijabli, onda je to u jednom načinu mjerenja udaljenosti upravo očekivanje. Pri tome udaljenost između slučajne varijable i broja mjerimo kao očekivano kvadratno odstupanje: $E(X-a)^2$.[4] Zaista, definiramo li funkciju $g(a) = E(X-a)^2 = EX^2 - 2aEX + a^2$ na $\mathbb{R}$, korištenjem tehnika diferencijalnog računa lako vidimo da ona postiže minimum upravo u vrijednosti $a = EX$.

Primjer 2.29. *Ilustrirajmo značenje očekivanog kvadratnog odstupanja slučajne varijable od konstante na primjerima.*

- *Neka je dana slučajna varijabla*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

$$E(X-a)^2 = (1-a)^2\frac{1}{4} + (2-a)^2\frac{1}{4} + (3-a)^2\frac{1}{4} + (4-a)^2\frac{1}{4}.$$

Minimum ove funkcije po a je točno prosjek vrijednosti koje slučajna varijabla može postići, tj. 2.5. *Uočimo da se ovdje sve vrijednosti reliziraju s istom vjerojatnošću (vidi sliku 2.20).*

- *Neka je dana slučajna varijabla*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

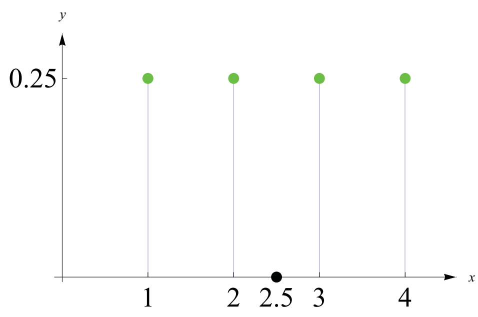
$$E(X-a)^2 = (1-a)^2\frac{1}{8} + (2-a)^2\frac{1}{8} + (3-a)^2\frac{1}{8} + (4-a)^2\frac{5}{8}.$$

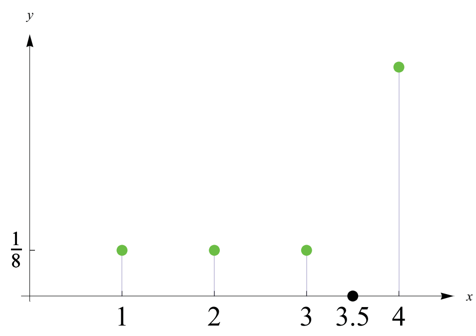
Minimum ove funkcije po a više nije prosjek vrijednosti koje slučajna varijabla može primiti jer vrijednost 4 *ima bitno veću vjerojatnost (težinu) nego ostale. Ovdje je minimum za* $a = 3.5$, *tj. "povučen" je prema 4 (vidi sliku 2.20).*

Minimalno očekivano kvadratno odstupanje slučajne varijable od konstante, koje se postiže u očekivanju, također ima svoje značenje. Zove se varijanca i tema je sljedećeg poglavlja.

---

[4] Vše o ovoj temi možete pogledati npr. u [30].





Slika 2.20: Grafovi distribucija slučajnih varijabli iz primjera 2.29.

2.6.2 Varijanca i ostali momenti. Važne nejednakosti

Koristeći definiciju očekivanja, za slučajnu varijablu definiramo momente i centralne momente.

Definicija 2.13. *Neka je X slučajna varijabla na diskretnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ i $r > 0$.*

- *Ako postoji $E(X^r)$, onda broj $\mu_r = E(X^r)$ zovemo* **moment r-tog reda** *ili* **r-ti moment** *od X.*
- *Ako postoji $E(|X|^r)$, onda broj $E(|X|^r)$ zovemo* **apsolutni moment r-tog reda** *ili* **r-ti apsolutni moment** *od X.*
- *Ako postoji EX i $E(|X - EX|^r)$ onda broj $E(|X - EX|^r)$ zovemo* **r-ti centralni moment** *od X.*
- *Ako postoji $E(X - EX)^2$ onda taj nenegativan broj zovemo* **varijanca** *slučajne varijable X i označavamo $Var\,X$, σ_X^2 ili σ^2.*

Uočimo:

- Očekivanje slučajne varijable X je njen moment prvog reda. Očekivanje uobičajeno označavamo μ umjesto μ_1.
- Varijanca je drugi centralni moment. Ona predstavlja očekivano kvadratno odstupanje slučajne varijable od njenog očekivanja.

Primjer 2.30. *Neka je slučajna varijabla X zadana tablicom distribucije*

$$X = \begin{pmatrix} -a & a & a^2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Izračunajmo sljedeće momente ove diskretne slučajne varijable: EX, EX^2, EX^3, $Var\,X$, $E(X-E(X))^3$.

$EX = -0.3a + 0.3a + 0.4a^2 = 0.4a^2.$

$EX^2 = 0.6a^2 + 0.4a^4 = 0.2a^2(2a^2+3).$

$EX^3 = -0.3a^3 + 0.3a^3 + 0.4a^6 = 0.4a^6.$

$Var\,X = E[(X-E(X))^2] = EX^2 - [EX]^2 = 0.24a^2(a^2+2.5).$

$E(X-E(X))^3 = EX^3 - 3EX^2EX + 2[EX]^3 = 0.464a^6 - 0.6a^2(2a^2+3).$

Propozicija 2.1. *Neka je $r > 0$ i $E(|X|^r)$ postoji. Tada postoji i $E(|X|^s)$ za svaki $0 < s < r$.*

Dokaz. *Za svaki realan broj x i $0 < s < r$ vrijedi nejednakost:*

$$|x|^s < 1 + |x|^r.$$

Odavde i iz monotonosti očekivanja vidimo da vrijedi:

$$|X|^s \le 1 + |X|^r \implies E(|X|^s) \le 1 + E(|X|^r) < \infty,$$

pa postoji očekivanje od X^s.

Kao ilustraciju mogućih interpretacija momenata navodimo tzv. Čebiševljevu nejednakost koja daje korisnu interpretaciju očekivanja i varijance svake slučajne varijable za koju je varijanca definirana.

Propozicija 2.2 (Čebiševljeva nejednakost)**.** *Neka je X slučajna vrijabla koja ima varijancu σ^2 te neka je dan broj $k > 0$. Tada vrijedi:*

$$P\{|X-\mu| \ge k\sigma\} \le \frac{1}{k^2},$$

gdje je μ očekivanje slučajne varijable X.

U dokazu ove propozicije iskoristit ćemo sljedeću nejednakost koja je općenito vrlo korisna u teoriji vjerojatnosti.

Teorem 2.4. *Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)P)$ i g nenegativna funkcija definirana na $\mathcal{R}(X)$ takva da postoji $Eg(X)$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi:*

$$P\{g(X) \geq \varepsilon\} \leq \frac{Eg(X)}{\varepsilon}.$$

Dokaz. *Prije svega, uočimo jednu općenito korisnu činjenicu: ako je $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ neki skup, označimo li*

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad \omega \in A \\ 0 & , \quad \omega \notin A \end{cases},$$

I_A je slučajna varijabla na Ω koju možemo iskoristiti za povezivanje vjerojatnosti skupa A i pojma očekivanja slučajne varijable. Naime, distribucija ove slučajne varijable ima oblik

$$I_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad p = P\{I_A = 1\} = P(A).$$

Dakle, vrijedi:

$$EI_A = P(A).$$

Korištenjem ovog načina označavanja, monotonosti i linearnosti očekivanja te nenegativnosti funkcije g vidimo da za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi:

$$\begin{aligned} Eg(X) &= E(g(X)I_{\{g(X)\geq\varepsilon\}} + g(X)I_{\{g(X)<\varepsilon\}}) \\ &= E(g(X)I_{\{g(X)\geq\varepsilon\}}) + E(g(X)I_{\{g(X)<\varepsilon\}}) \\ &\geq E(g(X)I_{\{g(X)\geq\varepsilon\}}) \geq \varepsilon EI_{\{g(X)\geq\varepsilon\}} \\ &= \varepsilon P\{g(X) \geq \varepsilon\}, \end{aligned}$$

što dokazuje tvrdnju.

Dokaz (Čebiševljeva nejednakost). *Iz prethodnog teorema slijedi:*

$$\begin{aligned} P\{|X - EX| \geq k\sigma\} &= P\{|X - EX|^2 \geq k^2\sigma^2\} \\ &\leq \frac{E|X - EX|^2}{k^2\sigma^2} = \frac{Var\,X}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Interpretacija varijance i očekivanja korištenjem Čebiševljeve nejednakosti zapravo se temelji na drugom korijenu iz varijance. Tu veličinu, tj. $\sqrt{Var\,X}$ zovemo **standardna devijacija** slučajne varijable i označavamo σ_X ili σ.

Dakle, vidimo da Čebiševljeva nejednakost tvrdi: **vjerojatnost da odstupanje slučajne varijable X od njenog očekivanja bude po apsolutnoj vrijednosti veće ili jednako k standardnih devijacija, manja je ili jednaka od $1/k^2$.**

Primjer 2.31. *Neka je X slučajna varijabla kojom je modeliran broj kišnih dana u Osijeku tijekom jedne godine. Poznato je da je očekivani broj kišnih dana 128, a pripadna standardna devijacija 4. Ako želimo ocijeniti $P\{|X - EX| < 5\}$, tj. vjerojatnost da broj kišnih dana u Osijeku tijekom jedne godine odstupa od očekivanog broja za manje od pet dana, koristimo Čebiševljevu nejednakost. Iz Čebiševljeve nejednakosti dane u propoziciji 2.2 primjenom svojstva vjerojatnosti suprotnog događaja slijedi da je*

$$P\{|X - EX| \leq k\sigma\} \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Budući je u ovom primjeru $EX = 128$, $\sigma = 4$ i $k\sigma = 5$, tj. $k = 5/4$, slijedi da je

$$P\{|X - 128| < 5\} \geq 0.36.$$

Primjer 2.32. *Broj komaraca na kvadratnom metru travnate površine tijekom lipnja u gradu Osijeku modeliran je slučajnom varijablom X. Poznato je da je u opisanim uvjetima očekivani broj komaraca po metru kvadratnom 50, a pripadna varijanca 64. Ako je poznato da je*

$$P\{|X - 50| < 8k\} \geq 0.5,$$

tada možemo odrediti donju i gornju granicu broja komaraca na kvadratnom metru u zadanim uvjetima. Iz

$$1 - \frac{1}{k^2} = 0.5$$

slijedi da je $k = \sqrt{2}$. Prema tome je

$$0.5 \leq P\left\{50 - 8\sqrt{2} < X < 50 + 8\sqrt{2}\right\} \geq 0.5.$$

Budući je $(50-8\sqrt{2}) \approx 38.6863$ *i* $(50+8\sqrt{2}) \approx 61.3137$ *i broj komaraca mora biti prirodan broj, gornji rezultat možemo interpretirati na sljedeći način: s vjerojatnošću barem* 0.5 *će tijekom mjeseca lipnja na kvadratnom metru travnate površine u Osijeku biti više od* 38, *ali najviše* 61 *komarac.*

Na primjer, vjerojatnost je manja ili jednaka $1/9 \approx 11.1\%$ da slučajna varijabla odstupa od svog očekivanja za više od 3 standardne devijacije. Korištenjem statističke interpretacije vjerojatnosti možemo tada zaključiti da će se, prilikom puno nezavisnih realizacija slučajne varijable X, u ne više od 11,1% slučjeva realizirati vrijednosti izvan intervala $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$, a u barem 88.9% slučajeva vrijednosti unutar tog intervala. Kao što se može vidjeti iz ovih objašnjenja, ima smisla standardnu devijaciju smatrati jednom od mjera koja govori o raspršenosti realizacija slučajne varijable oko očekivanja, tj. mjerom raspršenja.

Primjer 2.33. *Neka je dana slučajna varijabla X koja ima očekivanje 0.7 i standardnu devijaciju 0.458. Tada Čebiševljeva nejednakost garantira: vjerojatnost odstupanja ove slučajne varijable od 0.7 za više od dvije standardne devijacije iznosi najviše 0.25. Naime*

$$P\{|X - 0.7| \geq 2\sigma\} \leq \frac{1}{4}.$$

Korištenjem statističke interpretacije vjerojatnosti možemo zaključiti da će se, prilikom puno nezavisnih realizacija ove slučajne varijable, najviše u 25% *slučjeva realizirati vrijednosti izvan intervala* $[0.7 - 2 \cdot 0.458, 0.7 + 2 \cdot 0.458] = [0.2417, 1.1583]$, *a u barem* 75% *slučajeva vrijednosti unutar tog intervala. (Odredite što kraći interval koji će sadržavati barem 88% realizacija!)*

Dakako, ova ocjena nije jako precizna obzirom da se odnosi na sve slučajne varijable sa zadanim iznosom očekivanja i standardne devijacije, bez obzira na tip distribucije. Ukoliko je točno poznata distribucija slučajne varijable ovakve vjerojatnosti se mogu izračunati i puno preciznije, što će biti ilustrirano u narednim poglavljima.

Obzirom da je varijanca moment koji ćemo često koristiti, dokažimo nekoliko korisnih svojstava.

Važna vojstva varijance

- Neka je X slučajna varijabla koja ima varijancu, te a i b proizvoljni realni brojevi. Tada vrijedi

$$Var\,(aX + b) = a^2 Var\,X.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} Var\,(aX+b) &= E\left((aX+b) - (aEX+b)\right)^2 = \\ &= E\left(aX - aEX\right)^2 = a^2 E(X-EX)^2 = a^2 Var\,X. \end{aligned}$$

- Ako za slučajnu varijablu X vrijedi $Var\,X = 0$, onda ona zapravo nema karakter slučajnosti, tj. $P\{X = konst\} = 1$. Očigledno je da vrijedi i drugi smjer ove tvrdnje, tj. ako za slučajnu varijablu X vrijedi $P\{X = konst\} = 1$, onda je $Var\,X = 0$.

Dokaz. *Neka je* $Var\,X = 0$. *Tada vrijedi:* $E(X-\mu)^2 = 0$. *Obzirom da je* $(X-\mu)^2 \geq 0$, *na skupu na kojemu je* $(X-\mu)^2 > 0$ *mora biti pripadna vjerojatnost* 0, *tj.* $P\{(X-\mu)^2 > 0\} = 0$. *Odavde slijedi da je* $P\{(X-\mu)^2 = 0\} = 1$, *tj.* $P\{X = \mu\} = 1$, *što dokazuje prvu tvrdnju. Za dokaz druge tvrdnje pretpostavimo* $P\{X = c\} = 1$. *Tada je* $EX = c$,

a $Var\,X = E(X-c)^2 = 0$.

- Varijancu možemo računati također primjenom formule

$$Var\,X = EX^2 - (EX)^2.$$

Dokaz. *Neka je* $EX = \mu$. *Vrijedi:*

$$Var\,X = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu EX + \mu^2) = EX^2 - \mu^2.$$

2.6.3 Očekivanje i varijanca nekih parametarskih diskretnih distribucija

Parametarski dane familije distribucija često se koriste u praksi, a njihovi parametri nerijetko se mogu iskazati u terminima momenata. U ovom poglavlju izračunat ćemo očekivanje i varijancu za diskretne parametarske familije definirane u poglavlju 2.4.

Empirijska distribucija

Za slučajnu varijablu X rekli smo da ima empirijsku distribuciju ako je njen skup vrijednosti konačan podskup skupa realnih brojava , tj. $\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbf{R}$, a pripadni niz vjerojatnosti je definiran na sljedeći način:

$$p_i = P\{X = x_i\} = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Očekivanje ove slučajne varijable je aritmetička sredina elemenata skupa $\mathcal{R}(X)$, tj.

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}_n.$$

Za varijancu tada vrijedi:

$$Var\,X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2.$$

Specijalno, ako je skup vrijednosti $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, tada je:

$$EX = \frac{n+1}{2}, \quad Var\,X = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Bernoullijeva distribucija

Za slučajnu varijablu rekli smo da ima Bernoullijevu distribuciju ako je zadana tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad p \in (0, 1).$$

Za očekivanje i varijancu lako se dobije:

$$EX = p, \; Var\,X = p(1-p).$$

Binomna distribucija

Binomna slučajna varijabla $\mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbf{N}$ i $p \in (0,1)$, definirana je skupom vrijednosti $\{0,1,2,...,n\}$ s pripadnim vjerojatnostima

$$p_i = P\{X = i\} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Označimo $q = 1 - p$.

Prije nego izračunamo očekivanje i varijancu binomne slučajne varijable uočimo da za fiksne realne brojeva a i b vrijede slijedeći izrazi:

$$g(t) = (at+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) a^i t^i b^{n-i}$$

$$g'(t) = n(at+b)^{n-1}a = \sum_{i=1}^{n} i \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) a^i t^{i-1} b^{n-i}$$

$$g'(1) = n(a+b)^{n-1}a = \sum_{i=1}^{n} i \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) a^i b^{n-i} \tag{2.3}$$

$$g''(t) = n(n-1)(at+b)^{n-2}a^2 = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) a^i t^{i-2} b^{n-i}$$

$$g''(1) = n(n-1)(a+b)^{n-2}a^2 = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) a^i b^{n-i} \tag{2.4}$$

Primjenom izraza (2.3) dobivamo:

$$EX = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = np(p+1-p)^{n-1} = np.$$

Primjenom izaza (2.3) i (2.4) dobivamo:

$$\begin{aligned} Var\,X &= EX^2 - (EX)^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2 \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} - (np)^2 \\ &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = npq. \end{aligned}$$

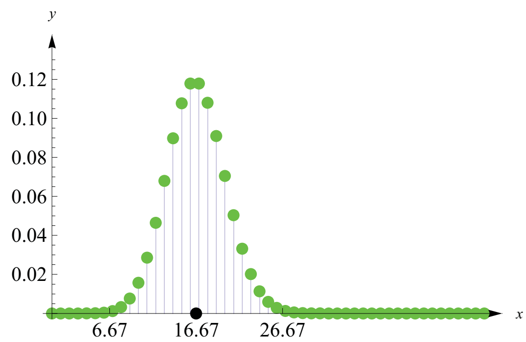
Dakle, očekivanje i varijanca binomne slučajne varijable dani su sljedećim izrazima:

$$E(X) = np, \quad Var\,X = npq.$$

Primjer 2.34. *Očekivanje i varijanca binomne slučajne varijable* X *s parametrima* $n = 50$ *i* $p = \frac{1}{3}$ *iznose:*

$$\mu = np = 16.6667, \quad \sigma^2 = np(1-p) = 11.1111,$$

dok je standardna devijacija $\sigma = 3.33$. *Slikom 2.21 prikazana je distribucija ove slučajne varijable s označenim očekivanjem i granicama intervala* $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma] = [6.67, 26.67]$.



Slika 2.21: Distribucija slučajne varijable $X \sim \mathcal{B}(50, \frac{1}{3})$.

Odredimo vjerojatnost realizacije ove slučajne varijable unutar intervala $(6.67, 26.67)$, *tj. vjerojatnost realizacije slučajne varijable udaljene od očekivanja za manje od tri standardne devijacije:*

$$P\{X \in (6.67, 26.67)\} = \sum_{i=7}^{26} \binom{50}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{50-i} = 0.999054.$$

Dakle, ova slučajna varijabla će se s vjerojatnošću 0.997402 realizirati unutar intervala $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$. *Korištenjem statističke interpretacije vjerojatnosti možemo zaključiti da* *će, prilikom puno nezavisnih realizacija ove slučajne varijable, njih 99.7% pasti unutar tog intervala.*

Odredite najkraći simetričan interval oko očekivanja za koji možemo tvrditi da će sadržati barem 95% realizacije ove slučajne varijable prilikom puno nezavisnih ponavljanja pokusa. (Iskoristite računalo!)

Poissonova distribucija

Slučajna varijabla X ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$ ako prima vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots\}$ s vjerojatnostima

$$p_i = P\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}.$$

Izračunajmo očekivanje i varijancu Poissonove slučajne varijable:

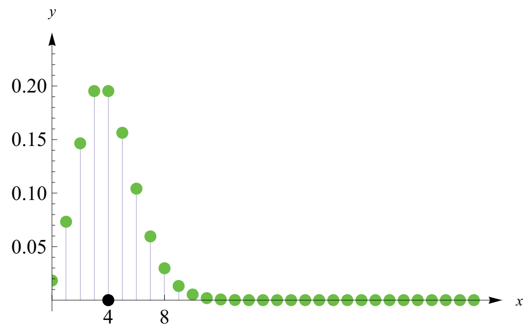
$$EX = \sum_{i=0}^{\infty} i\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty} i\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.$$

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty} i\frac{\lambda^i}{(i-1)!} = \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}(i-1+1)\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \\
&= \lambda e^{-\lambda}\left(\lambda\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}\right) = \\
&= \lambda e^{-\lambda}[\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}] = \lambda(\lambda+1),
\end{aligned}$$

$$Var\,X = EX^2 - (EX)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Dakle, očekivanje i varijanca Poissonove slučajne varijable dani su sljedećim izrazom:

$$EX = Var\,X = \lambda.$$



Slika 2.22: Distribucija slučajne varijable $X \sim \mathcal{P}(4)$.

Primjer 2.35. *Očekivanje i varijanca Poissonove slučajne varijable X s parametrom 4 jednaki su vrijednosti parametra, tj. 4, dok je standardna devijacija $\sigma = 2$. Slikom 2.22 prikazana je distribucija ove slučajne varijable s označenim očekivanjem i granicama intervala $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma] = [0, 8]$.*

Odredimo vjerojatnost realizacije ove slučajne varijable unutar intervala $[0, 8]$, tj. vjerojatnost realizacije slučajne varijable udaljene od očekivanja za manje ili točno dvije standardne devijacije:

$$P\{X \in [0, 8]\} = \sum_{i=0}^{8} e^{-4} \frac{4^i}{i!} = 0.978637.$$

Dakle, ova slučajna varijabla će se s vjerojatnošću 0.978637 realizirati unutar intervala $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$. Korištenjem statističke interpretacije vjerojatnosti možemo zaključiti da će, prilikom puno nezavisnih realizacija ove slučajne varijable, njih 97.8% pasti unutar tog intervala.

Odredite najkraći simetričan interval oko očekivanja za koji možemo tvrditi da će sadržati barem 95% realizacije ove slučajne varijable prilikom puno nezavisnih ponavljanja pokusa. (Iskoristite računalo!)

Geometrijska distribucija

Slučajna varijabla X ima geometrijsku distribuciju s parametrom p, $p \in (0, 1)$, ako prima vrijednosti iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots\}$ s vjerojatnostima

$$p_k = P\{X = k\} = p(1 - p)^{k-1}.$$

Izračunajmo očekivanje i varijancu ove distribucije.

Deriviranjem jednakosti

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i, \quad |x| < 1, \tag{2.5}$$

po x i primjenom dobivenog izraza uz $x = 1 - p$ slijedi

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} ip(1-p)^{i-1}\frac{1}{p}.$$

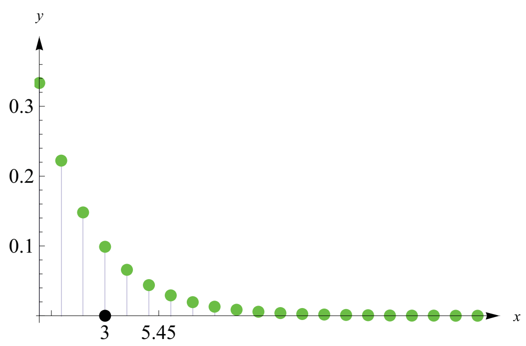
Primjenom druge derivacije izraza 2.5 uz $x = 1 - p$ dobivamo

$$Var\,X = \frac{1-p}{p^2}.$$

Primjer 2.36. *Očekivanje i varijanca geometrijske slučajne varijable X s parametrom $p = \frac{1}{3}$ iznose*

$$\mu = \frac{1}{p} = 3, \quad \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2} = 6,$$

dok je standardna devijacija $\sigma = 2.45$. Slikom 2.23 prikazana je distribucija ove slučajne varijable s označenim očekivanjem i granicama intervala $[\mu - \sigma, \mu + \sigma] = [0.55, 5.45]$.



Slika 2.23: Distribucija geometrijske slučajne varijable s parametrom $p = \frac{1}{3}$.

Odredimo vjerojatnost realizacije ove slučajne varijable unutar intervala $(0.55, 5.45)$, tj. vjerojatnost realizacije slučajne varijable udaljene od očekivanja za manje od jedne standardne devijacije:

$$P\{X \in (0.55, 5.45)\} = \sum_{i=1}^{5} ip(1-p)^{i-1} = 0.578875.$$

Dakle, ova slučajna varijabla će se s vjerojatnošću 0.578875 *realizirati unutar intervala* $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$. *Korištenjem statističke interpretacije vjerojatnosti možemo zaključiti da će, prilikom puno nezavisnih realizacija ove slučajne varijable, njih 57.8% pasti unutar tog intervala.*

Odredite jedan logičan interval oko očekivanja za koji možemo tvrditi da će sadržati barem 95% realizacije ove slučajne varijable prilikom puno nezavisnih ponavljanja pokusa. (Iskoristite računalo!)

2.6.4 Očekivanje i momenti neprekidne slučajne varijable

Za neprekidne slučajne varijable očekivanje se definira korištenjem pripadne funkcije gustoće.

Definicija 2.14. *Neka je* X *neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće* $f(x)$. *Ako je konačan integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx,$$

onda kažemo da slučajna varijabla X *ima očekivanje i broj*

$$\mu = EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx,$$

zovemo **matematičko očekivanje neprekidne slučajne varijable** X.

Valja naglasiti da sva spomenuta svojstva očekivanja (vidi poglavlje 2.29) koja vrijede za diskretne slučajne varijable, vrijede i ovdje. Također, ako je dana realna funkcija realne varijable g, onda očekivanje slučajne varijable[5]

[5] za uvjete na funkciju g koji osiguravaju da je $g(X)$ neprekidna slučajna vrijabla pogledati npr. [30]

$g(X)$ možemo računati analogno diskretnom slučaju ali koristeći funkciju gustoće i integral umjesto sume, tj.

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx.$$

Definicija momenata je onda identična definiciji momenata u diskretnom slučaju, ali se drugačije računa obzirom da se definicije očekivanja razlikuju. Tako je npr. drugi centralni moment, odnosno varijanca, definiran na sljedeći način:

$$Var\,X = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - EX^2\right) f(x)\,dx.$$

Također se može pokazati da pri ovoj definiciji ostaju sačuvana sva svojstva varijance dokazana u poglavlju 2.6.2 za diskretan slučaj, kao i navedene korisne nejednakosti (vidi npr. [30]).

Primjer 2.37. *Funkcija gustoće slučajne varijable definirana je sljedećim izrazom:*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad x \in (0, \pi/2] \\ 0 & , \quad x \notin (0, \pi/2] \end{cases}.$$

Izračunajmo sljedeće momente ove neprekidne slučajne varijable: EX, EX^2, EX^3, $Var\,X$, $E[X - E(X)]^3$.

$$E(X) = \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin x\,dx = 1$$

$$EX^2 = \int_0^{\pi/2} x^2 \cdot \sin x\,dx = \pi - 2$$

$$EX^3 = \int_0^{\pi/2} x^3 \cdot \sin x\,dx = \frac{3}{4}(\pi - 8)$$

$$Var\,X = EX^2 - (EX)^2 = \pi - 3$$

$$E[X - E(X)]^3 = \int_0^{\pi/2} (x - E(X))^3 \cdot \sin x\,dx = \frac{3\pi^2}{4} - 3\pi + 2.$$

2.6.5 Očekivanje i varijanca nekih parametarskih neprekidnih distribucija

Analogno parametarskim diskretnim distribucijama, za nastavak kolegija će biti korisno izračunati i zapamtiti izraze za očekivanje i varijancu nekih parametarskih neprekidnih distribucija koje se često koriste. U tu svrhu je samo potrebno riješiti zadane integrale. Obzirom da je normalna slučajna vrijabla najvažnija u klasi neprekidnih slučajnih varijabli, ovdje ćemo navesti samo izračun očekivanja i varijance te distribucije, a za ostale navodimo eksplicitne izraze u tablici 2.1.

Očekivanje i varijanca normalne distribucije

Neka je $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, tj.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Da bismo lakše riješili potrebne integrale uočimo prvo da je funkcija

$$g(x) = x\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

neparna funkcija, pa je

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx = 0.$$

Osim toga,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1.$$

Primjenom supstituciije $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$ dobijemo:

$$EX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \\
&= \mu,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
EX^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu)^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + \frac{2\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + \mu^2.
\end{aligned}
$$

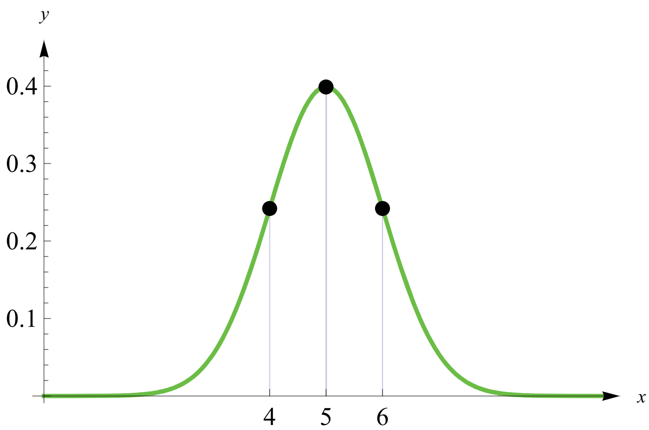
Gornji integral rješavamo parcijalnom integracijom:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(t e^{-\frac{t^2}{2}} + \int e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \right), \\
\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt &= 0 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 0 + \sigma^2.
\end{aligned}
$$

Dakle, $Var\, X = \sigma^2$.

Uočimo da su parametri μ i σ^2 normalne distribucije upravo njezino matematičko očekivanje i varijanca, redom.

Primjer 2.38. *Graf funkcije gustoće normalne slučajne varijable s očekivanjem 5 i varijancom 1 prikazan je slikom 2.24.*
Vidimo da funkcija gustoće ima maksimum u očekivanju, a za vrijednosti nezavisne varijable $x_1 = \mu - \sigma$ i $x_2 = \mu + \sigma$ ima točke infleksije. Odredimo vjerojatnost realizacije ove slučajne varijable unutar intervala $[\mu-\sigma, \mu+\sigma] = [4, 6]$, tj. vjerojatnost realizacije slučajne



Slika 2.24: Graf funkcije gustoće normalne distribucije s očekivanjem 5 i varijancom 1.

varijable udaljene od očekivanja za manje ili točno jednu standardnu devijaciju (koristite računalo!).

$$P\{X \in [4,6]\} = 0.682689.$$

Provjerite da vrijedi:

$$P\{X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]\} = 0.9545.$$

$$P\{X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]\} = 0.9973.$$

Naziv distribucije	**distribucija (gustoća)**	**očekivanje**	**varijanca**
Bernoullijeva, $p \in (0,1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$	p	$p(1-p)$
Binomna $\mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$	$\mathcal{R}(X) = \{0,1,2,\ldots,n\}$ $p_i = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$	np	$np(1-p)$
Poissonova $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$	$\mathcal{R}(X) = \mathbb{N}_0$ $p_i = \frac{\lambda^1}{i!} e^{-\lambda}$	λ	λ
Geometrijska $\mathcal{G}(p)$, $p \in (0,1)$	$\mathcal{R}(X) = \mathbb{N}$ $p_i = p(1-p)^{i-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Uniformna na (a,b) $\mathcal{U}(a,b)$, $a < b$	$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Eksponencijalna $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Laplaceova $\lambda > 0$	$f(x) = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda \lvert x \rvert}$	0	$\frac{2}{\lambda^2}$
Normalna $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

Tablica 2.1: Tablica distribucija ili funkcija gustoća te očekivanja i varijanci važnijih parametarskih familija distribucija.

2.7 Neke transformacije slučajnih varijabli

2.7.1 Postupak standardizacije

Korištenjem svojstava očekivanja i varijance dokazat ćemo da svaku slučajnu varijablu koja ima varijancu možemo afino transformirati (dodavanjem konstante i množenjem s konstantom različitom od 0) tako da novonastala slučajna varijabla ima očekivanje 0 i varijancu 1. Takav postupak transformiranja slučajne varijable u statistici se naziva **postupak standardizacije**.

Propozicija 2.3. *Neka je X slučajna varijabla s očekivanjem $\mu \in \mathbb{R}$ i varijancom $\sigma^2 > 0$. Tada slučajna varijabla*

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}, \ \ \sigma = \sqrt{\sigma^2},$$

ima očekivanje 0 i varijancu 1.

Dokaz. *Korištenjem rezultata poglavlja 2.6 vidimo da vrijedi:*

$$EY = \frac{1}{\sigma}(EX - \mu) = 0,$$

$$Var\, Y = \frac{1}{\sigma^2} Var\, X = 1.$$

Vidimo da smo postupkom standardizacije lako promijenili varijancu i očekivanje slučajne varijable, ali ovdje je ostalo nejasno što se pri toj transformaciji dogodilo s njenom funkcijom distribucije tj. na koji način je ona promijenjena.

Propozicija 2.4. *Neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije $F_X(x)$, očekivanjem $\mu \in \mathbb{R}$ i varijancom $\sigma^2 > 0$. Tada slučajna varijabla*

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}, \ \ \sigma = \sqrt{\sigma^2},$$

ima funkciju distribucije $F_Y(x) = F_X(\sigma x + \mu)$.

Dokaz. *Obzirom da je $\sigma > 0$, vrijedi:*

$$F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq x\right\} = P\left\{X \leq \sigma x + \mu\right\} = F_X(\sigma x + \mu).$$

Primjer 2.39. *Neka je $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$. Postupkom standardizacije dobivamo slučajnu varijablu*

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Uočimo da Y više nema distribuciju u binomnoj familiji!

Primjer 2.40. *Neka je $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Postupkom standardizacije dobivamo slučajnu varijablu*

$$Y = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

Uočimo da Y više nema distribuciju u Poissonovoj familiji!

Primjer 2.41. *Neka je $X \sim \mathcal{U}(a,b)$. Funkcija distribucije slučajne varijable X dana je izrazom*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , \quad a \leq x < b \\ 1 & , \quad x \geq b \end{cases}.$$

Postupkom standardizacije dobivamo slučajnu varijablu Y sa sljedećom funkcijom distribucije

$$F_Y(x) = F_X(\sigma x + \mu) = \begin{cases} 0 & , \quad \sigma x + \mu < a \\ \dfrac{\sigma x + \mu - a}{b-a} & , \quad a \leq \sigma x + \mu < b \\ 1 & , \quad \sigma x + \mu \geq b \end{cases}.$$

Ovaj oblik funkcije distribucije ekvivalentan je obliku

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < \frac{a-\mu}{\sigma} \\ \dfrac{x - \frac{a-\mu}{\sigma}}{\frac{b-\mu}{\sigma} - \frac{a-\mu}{\sigma}} & , \quad \frac{a-\mu}{\sigma} \leq x < \frac{b-\mu}{\sigma} \\ 1 & , \quad x \geq \dfrac{b-\mu}{\sigma} \end{cases},$$

odakle vidimo da je $Y \sim \mathcal{U}\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}, \dfrac{b-\mu}{\sigma}\right)$, tj. postupak standardizacije zadržao je slučajnu varijablu u istoj klasi, ali s drugim paramterima.

Primjer 2.42. *Neka je $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Postupkom standardizacije dobivamo slučajnu varijablu*

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

(Provjerite ovu tvrdnju!)

2.7.2 Bijektivna transformacija slučajne varijable

Postupkom standardizacije transformiramo slučajnu varijablu afinom funkcijom s pozitivnim koeficijentom smjera. Naime, u postupku standardizacije novonastala slučajna varijabla Y kompozicija je afine funkcije $g(x) = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$ i slučajne varijable X, tj. $Y = g(X)$. Pokazali smo da se, kod ovako jednostavne funkcije g, može lako odrediti funkcija distribucije novonastale slučajne varijable. Sličan postupak može se primijeniti kod svih transformacija bijektivnim funkcijama g. Ako je slučajna varijabla X diskretna opisanim postupkom dobivamo slučajnu varijablu $Y = g(X)$ koja je također diskretnog tipa. Međutim, ako je X apsolutno neprekidna, $Y = g(X)$ će biti apsolutno neprekidna samo ako je moguće izraziti njenu funkciju distribucije pomoću funkcije gustoće.

Primjer 2.43. *Neka je dana diskretna slučajna varijabla X tablicom distribucije*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}, \quad 0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_i p_i = 1$$

i neka je $g : \mathcal{R}(X) \to \mathbb{R}$ bijekcija. Tada slučajna varijabla $Y = g(X)$ ima tablicu distribucije sljedećeg oblika:

$$Y = \begin{pmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \dots & g(x_n) & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}, \quad p_i \geq 1, \quad \sum_i p_i = 1.$$

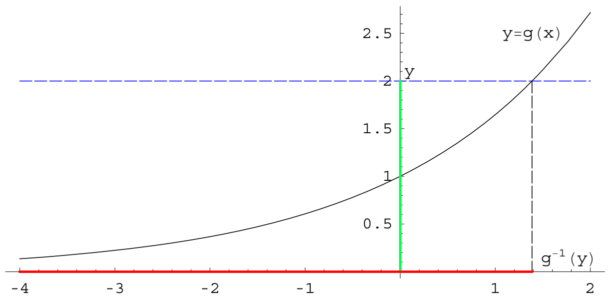
Neka je sada X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće $f_X(x)$, a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija. Tražimo funkciju distribucije F_Y slučajne varijable $Y = g(X)$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = P\{g(X) \in (-\infty, y]\} = \\ = P\{X \in g^{-1}((-\infty, y])\} = P\{X \in A_y\}, \end{aligned}$$

gdje je $A_y = g^{-1}((-\infty, y]) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in (-\infty, y]\}$ oznaka za original intervala $(-\infty, y]$ obzirom na funkciju g.

Kako je svaka bijektivna funkcija monotona, promatramo sljedeće slučajeve:

- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **monotono rastuća funkcija** (slika 2.7.2).



Slika 2.25: Monotona rastuća funkcija $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Uočimo da je za fiksni y original intervala $A = (-\infty, y]$ jednak intervalu $A_y = g^{-1}((-\infty, y]) = (-\infty, g^{-1}(y)]$. Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X \in A_y\} = P\{X \in (-\infty, g^{-1}(y)]\} = \\ = P\{X \le g^{-1}(y)\} = F_X(g^{-1}(y)). \end{aligned}$$

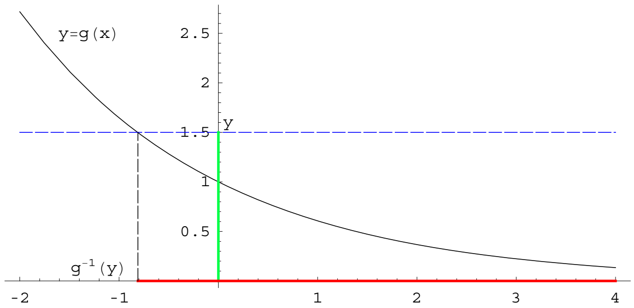
Deriviranjem funkcije distribucije dobivamo funkciju gustoće:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(g^{-1}(y)) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot [g^{-1}(y)]'.$$

- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **monotono padajuća funkcija** (slika 2.7.2).

Uočimo da je za fiksni y original intervala $A = (-\infty, y]$ jednak intervalu $A_y = g^{-1}((-\infty, y]) = [g^{-1}(y), +\infty)$. Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X \in A_y\} = P\{X \in [g^{-1}(y), +\infty)\} = \\ = P\{X \ge g^{-1}(y)\} = 1 - P\{X < g^{-1}(y)\} = \\ = 1 - P\{X \le g^{-1}(y)\} = 1 - F_X(g^{-1}(y)). \end{aligned}$$



Slika 2.26: Monotona padajuća funkcija $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Funkcija gustoće je sljedećeg oblika:

$$f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y)) \cdot [g^{-1}(y)]'.$$

Zajednički zapis funkcije gustoće slučajne varijable $Y = g(X)$ za monotonu funkciju $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je sljedeći

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dg^{-1}}{dy} \right| = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| (g^{-1}(y))' \right|.$$

Primjer 2.44. *Neka je dana neprekidna slučajna varijabla X funkcijom gustoće $f(x)$ i $g(x) = e^x$. Tada je $Y = g(X) = e^X$ neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće $h(x) = f(\ln x) \cdot \dfrac{1}{x}$ za $x > 0$ i $h(x) = 0$ za $x \le 0$.*
Zaista,

$$F_Y(x) = P\{Y \le x\} = P\{g(X) \le x\} = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 0 \\ P\{X \le g^{-1}(x)\} & , \quad x > 0 \end{cases}.$$

Nadalje, za $x > 0$ vrijedi:

$$P\{X \le g^{-1}(x)\} = \int_{-\infty}^{g^{-1}(x)} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\ln x} f(t)\, dt.$$

Uz supstituciju $t = \ln u$ imamo:

$$P\{X \le g^{-1}(x)\} = \int_0^x f(\ln u)\frac{1}{u}\, du.$$

Definiranjem funkcije

$$h(u) = \begin{cases} 0 & , \quad u \le 0 \\ f(\ln u)\dfrac{1}{u} & , \quad u > 0 \end{cases},$$

vidimo da je ona nenegativna i vrijedi

$$P\{Y \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} h(u)\, du,$$

pa je time pokazano da je $h(u)$ funkcija gustoće slučajne varijable Y.

Primjer 2.45. *Neka je neprekidna slučajna varijabla X zadana funkcijom gustoće $f(x)$ i $g(x) = e^{-x}$. Tada je $Y = g(X) = e^{-X}$ neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće $h(x) = f(-\ln(x))\dfrac{1}{x}$ za $x > 0$ i $h(x) = 0$ za $x \leq 0$.*

2.7.3 Primjeri transformacija koje nisu bijektivne

Primjer 2.46. *Neka je diskretna slučajna varijabla X dana tablicom distribucije*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}, \quad p_i \geq 1, \quad \sum_i p_i = 1.$$

Neka je $g : \mathcal{R}(X) \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija te neka je slučajna varijabla Y definirana kao $Y = g(X)$. Označimo $\mathcal{R}(Y) = \{w_1, w_2, \dots, w_k, \dots\}$. Tada slučajna varijabla Y ima tablicu distribucije

$$Y = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_k & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots & q_k & \dots \end{pmatrix}, \quad q_k \geq 1, \quad \sum_k q_k = 1,$$

gdje je

$$q_k = \sum_{\{\omega\in\Omega | g(X)=w_k\}} P\{\omega\} = \sum_{\{i|g(x_i)=w_k\}} p_i.$$

Primjer 2.47. *Neka je slučajna varijabla X zadana tablicom distribucije*

$$X = \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Tada slučajna varijabla $Y = X^2$, koja je dobivena kompozicijom slučajne varijable X i nebijektivne funkcije $g(t) = t^2$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ima distribuciju zadanu tablicom

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Primjer 2.48. *Neka je X neprekidna slučajna varijabla zadana funkcijom gustoće $f(x)$. Tada je $Y = X^2$ neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće*

$$h(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right) & , \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Zaista, za $x < 0$ je $P\{Y \leq x\}$ očigledno jednako 0. Za $x \geq 0$ je

$$P\{Y \leq x\} = P\{X^2 \leq x\} = P\{-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\} = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(t)\,dt = \int_{0}^{\sqrt{x}} (f(-t) + f(t))\;dt.$$

Supstitucijom $t = \sqrt{u}$ u ovom integralu vidimo da, za $x \geq 0$, vrijedi:

$$P\{Y \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\sqrt{u}} \big(f(\sqrt{u}) + f(-\sqrt{u})\big)\;du.$$

Dakle, funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable $Y = X^2$ dana je izrazom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \big(f(\sqrt{u}) + f(-\sqrt{u})\big) & , \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Odredite funkciju distribucije neprekidne slučajne varijable $Y = X^2$, ako je X standardna normalna slučajna varijabla, tj. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

2.8 Generiranje slučajnih varijabli

Važan način ispitivanja istinitosti tvrdnji koje se odnose na slučajne varijable je provjera tih tvrdnji na podacima. Međutim, podaci koji se u tu svrhu trebaju koristiti su realizacije slučajne varijable. Pitanje je, kako prikupiti podatke iz slučajne varijable zadane distribucije. Radi ilustracije problema zamislimo da želimo dobiti 30 podataka koji su realizacije Bernoullijeve slučajne varijable

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Za to postoji nekoliko jednostavnih načina. Npr., bacimo pravilno iskovan novčić 30 puta i pri tome bilježimo 0 ako je palo pismo, a 1 ako se okrenula glava. Ili, uzmemo kutijicu s istim brojem bijelih i crnih kuglica pa iz nje nasumično izvlačimo jednu kuglicu 30 puta ali tako da svaki puta izvučenu kuglicu vratimo u kutijicu i promiješamo. Pri tome bilježimo 0 ako je izvučena bijela kuglica, a 1 ako je izvučena crna kuglica.

Međutim, kako ćemo dobiti podatke iz npr. normalne distribucije sa zadanim očekivanjem i varijancom?

Posebno koristan rezultat koji se koristi u tu svrhu odnosi se na distribuciju slučajne varijable $F(X)$, gdje je $F(x)$ funkcija distribucije slučajne varijable X.

Naime, pretpostavimo da je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom distribucije $F(x)$. Obzirom da je X neprekidna slučajna varijabla, F je neprekidna, rastuća bijekcija. Za funkciju distribucije F_U slučajne varijable $U = F(X)$ vrijedi:

$$F_U(u) = P\{U \leq u\} = P\{F(X) \leq u\} = \begin{cases} 0 & , \quad u < 0 \\ P\{X \leq F^{-1}(u)\} & , \quad u \in [0,1) \\ 1 & , \quad , u \geq 1 \end{cases} .$$

Obzirom da je $P\{X \leq F^{-1}(u)\} = F(F^{-1}(u)) = u$, vidimo da je $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ i to neovisno o funkciji distribucije F sve dok je ona funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable.

Pogledajmo i drugi smisao ovog rezultata. Pođimo od slučajne varijable $U \sim \mathcal{U}(0,1)$. Odaberimo funkciju distribucije F neprekidne slučajne varijable X koju želimo modelirati. Očigledno je da se distribucija slučajne varijable X može dobiti kao distribucija kompozicije $F^{-1}(U)$. Naime, vrijedi:

$$P\{F^{-1}(U) \leq x\} = P\{U \leq F(x)\} = F(x).$$

Dakle, ako trebamo generirati n podataka iz neprekidne slučajne varijable s distribucijom F, dovoljno je da imamo niz podataka $(u_i, i = 1, \ldots, n)$ iz $\mathcal{U}(0,1)$. Tražene podatke tada dobijemo kao $(F^{-1}(u_i), i = 1, \ldots, n)$.

Za generiranje realizacija uniformne distribucije na $(0,1)$ danas se koriste takozvani generatori slučajnih brojeva koji su ugrađeni u sve naprednije računalne programe.

Uniformna distribucija na intervalu $(0,1)$ može se također iskoristiti i za generiranje realizacija diskretnih distribucija. Zainteresirani čitatelj može više informacija o tome pronaći npr. u [8].

2.9 Zadaci

Zadatak 2.1. Promotrimo slučajan pokus koji se sastoji od bacanja simetričnog novčića dva puta za redom. Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost broj realiziranih pisama. Nađite zakon razdiobe i gustoću diskretne slučajne varijable X, te grafički prikažite gustoću.

Rješenje.
Tablica distribucije:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Gustoća:

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & , \quad x \in \{0,2\} \\ 1/2 & , \quad x = 1 \\ 0 & , \quad \text{inače.} \end{cases}$$

Zadatak 2.2. Strijelac na raspolaganju ima tri metka i gađa metu dok je ne pogodi ili dok ne potroši sva tri metka. Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost broj potrošenih metaka. Uz pretpostavku o nezavisnosti gađanja nađite zakon razdiobe i gustoću od X ako je vjerojatnost pogotka mete pri svakom gađanju jednaka 0.8.

Rješenje:
Tablica distribucije:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.8 & 0.16 & 0.04 \end{pmatrix}.$$

Gustoća:

$$f(x) = \begin{cases} 0.8 & , \quad x = 1 \\ 0.16 & , \quad x = 2 \\ 0.04 & , \quad x = 3 \\ 0 & , \quad \text{inače.} \end{cases}$$

Zadatak 2.3. Promotrimo slučajan pokus koji se sastoji od bacanja simetrične igraće kockice dva puta za redom. Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost zbroj realiziranih brojeva u oba bacanja. Nađite zakon razdiobe i gustoću diskretne slučajne varijable X, te grafički prikažite gustoću.

Rješenje:
Tablica distribucije:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Gustoća:

$$f(x) = \begin{cases} 1/36 & , \quad x \in \{2, 12\} \\ 1/18 & , \quad x \in \{3, 18\} \\ 1/12 & , \quad x \in \{4, 10\} \\ 1/9 & , \quad x \in \{5, 9\} \\ 5/36 & , \quad x \in \{6, 8\} \\ 1/6 & , \quad x = 7 \\ 0 & , \quad \text{inače.} \end{cases}$$

Zadatak 2.4. Iz kutije u kojoj se nalazi 7 kuglica numeriranih brojevima od 1 do 7 izvlače se istovremeno tri kuglice $\{i, j, k\}$. Odredite zakon razdiobe, gustoću i funkciju distribucije slučajne varijable X definirane na sljedeći način:

$$X(\{i, j, k\}) = \max(i, j, k), \;\; i, j, k \in \{1, \ldots, 7\}.$$

Rješenje:
Tablica distribucije:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{35} & \frac{3}{35} & \frac{6}{35} & \frac{10}{35} & \frac{15}{35} \end{pmatrix}.$$

Gustoća:

$$f(x) = \begin{cases} 1/35 & , \quad x = 3 \\ 3/35 & , \quad x = 4 \\ 6/35 & , \quad x = 5 \\ 10/35 & , \quad x = 6 \\ 15/35 & , \quad x = 7 \\ 0 & , \quad \text{inače.} \end{cases}$$

Funkcija distribucije:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in (-\infty, 3) \\ 1/35 & , \quad x \in [3, 4) \\ 4/35 & , \quad x \in [4, 5) \\ 10/35 & , \quad x \in [5, 6) \\ 20/35 & , \quad x \in [6, 7) \\ 1 & , \quad x \in [7, \infty) \end{cases}$$

Zadatak 2.5. U smjeru kretanja automobila nalaze se redom tri semafora koji rade nezavisno jedan od drugog. Na svakom se s vjerojatnošću $p = 0.5$ pojavljuje crveno i s vjerojatnošću $q = 0.5$ zeleno svjetlo. Slučajna varijabla X predstavlja broj semafora pored kojih prolazi automobil do prvog zaustavljanja. Odredite distribuciju, gustoću i funkciju distribucije diskretne slučajne varijable X. Skicirajte grafove gustoće i funkcije distribucije.

Rješenje:

Tablica distribucije:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Gustoća:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & , \quad x = 0 \\ 1/4 & , \quad x = 1 \\ 1/8 & , \quad x \in \{2, 3\} \\ 0 & , \quad \text{inače.} \end{cases}$$

Funkcija distribucije:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in (-\infty, 0) \\ 1/2 & , \quad x \in [0, 1) \\ 3/4 & , \quad x \in [1, 2) \\ 7/8 & , \quad x \in [2, 3) \\ 1 & , \quad x \in [3, \infty) \end{cases}$$

Zadatak 2.6. Odredite matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable zadane sljedećom tablicom distribucije:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix}.$$

Rješenje:

$$E(X) = \frac{15}{16}, \quad Var\, X = \frac{367}{256}.$$

Zadatak 2.7. Slučajna varijabla X zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 8 \\ a & 1/8 & a - b^2 & b^2 & 1/4 & b \end{pmatrix},$$

gdje su a i b nepoznati parametri. Ako očekivanje od X iznosi $25/8$, odredite:

a) Vrijednosti parametara a i b;

b) Varijancu slučajne varijable X;

c) Funkciju distribucije slučajne varijable X.

Rješenje: a) $a = \frac{3}{16}, b = \frac{1}{4}$; b) $Var\, X = \frac{719}{64}$

c) Funkcija distribucije:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \in (-\infty, -1) \\ 3/16 & , \ x \in [-1, 0) \\ 5/16 & , \ x \in [0, 1) \\ 7/16 & , \ x \in [1, 3) \\ 8/16 & , \ x \in [3, 4) \\ 12/16 & , \ x \in [4, 8) \\ 1 & , \ x \in [8, \infty) \end{cases}$$

.

Zadatak 2.8. Odredite vjerojatnost da smo od 2007 kuglica numeriranih brojevima od 1 do 2007, koje se nalaze u istoj kutiji, izvukli kuglicu:

a) numeriranu brojem 6,

b) numeriranu brojem većim ili jednakim 3,

c) numeriranu brojem strogo manjim od 4.

Rješenje:

a) $P\{X = 6\} = \frac{1}{2007}$, b) $P\{X \geq 3\} = \frac{2005}{2007}$, c) $P\{X < 4\} = \frac{3}{2007}$.

Zadatak 2.9. Poznato je da je u velikom skladištu trgovine informatičkom opremom vjerojatnost pojavljivanja prijenosnog računala s greškom nastalom u proizvodnji jednaka 0.02. Pretpostavimo da iz tog skladišta biramo 10 prijenosnih računala. Odredite sljedeće vjerojatnosti:

a) vjerojatnost da je točno 5 prijenosnih računala sa greškom,

b) vjerojatnost da su s greškom najviše 3 prijenosna računala;

c) vjerojatnost da je s greškom barem 6 prijenosnih računala.

Rješenje:

a) $P\{X = 5\} = 0.000000728$, b) $P\{X \leq 3\} =$, c) $P\{X \geq 4\} =$.

Zadatak 2.10. U Bernoullijevoj shemi (n nezavisnih ponavljanja Bernoullijevog pokusa) zadana vjerojatnost uspjeha iznosi p, $p \in [0, 1]$. Odredite potreban broj pokusa koje treba provesti da bismo s vjerojatnošću r imali barem jedan uspjeh.

Rješenje:

$$n = \frac{\ln(1-r)}{\ln(1-p)}.$$

Zadatak 2.11. Poznata osječka pizzeria primi u prosjeku 240 narudžbi tijekom jednog sata. Odredite vjerojatnost da u vremenskom periodu od jedne minute:

a) nije primljena niti jedna narudžba;

b) primljene su barem dvije narudžbe.

Rješenje:

a) $P\{X = 0\} = e^{-4}$, b) $P\{X \geq 2\} = 1 - 5e^{-4}$.

Zadatak 2.12. Neka telefonska centrala primi u prosjeku 120 poziva tijekom jednog sata. Zbog iznenadnog kvara na centrali tijekom jedne minute pozivi nisu primani. Kolika je vjerojatnost da u tom periodu centrali nije bilo upućeno više od 4 poziva?

Rješenje:

$$P\{X < 4\} = \frac{19e^{-2}}{3}.$$

Zadatak 2.13. Proizvodi u tvornici, među kojima se neispravan proizvod nalazi s vjerojatnošću 0.007, pakuju se u kutije po 100 komada. Kolika je vjerojatnost da kutija ne sadrži niti jedan pokvaren proizvod, a kolika da sadrži dva ili više pokvarenih proizvoda?

Rješenje:

$$P\{X = 0\} = 0.4954, \quad P\{X \geq 2\} = 0.1554.$$

Zadatak 2.14. U skladištu se nalazi m proizvoda od kojih je r loših. Na slučajan način izvlačimo n proizvoda.

a) Kolika je vjerojatnost da je točno 5 proizvoda loših?

b) Kolika je vjerojatnost da su barem 2 proizvoda loša?

Zadatak 2.15. U velikom skladištu nalazi se 20000 proizvoda od kojih je 20 loših. Na slučajan način izvlačimo 10 proizvoda. Odredite vjerojatnost da su među njima najviše 3 loša.

Zadatak 2.16. Za zadane realne funkcije realne varijable odredite vrijednost nepoznate konstante tako da svaka od njih bude funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable:

1. $f(x) = \begin{cases} ax & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$

2. $g(x) = \begin{cases} b\cos 2x & , \quad x \in [-\pi/4, \pi/4) \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$

3. skicirajte grafove funkcija f i g.

Zadatak 2.17. Zadana je funkcija gustoće slučajne varijable X:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

Izračunajte funkciju distribucije slučajne varijable X, te skicirajte grafove funkcije gustoće i funkcije distribucije.

Zadatak 2.18. Neka je X neprekidna slučajna varijabla zadana funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

b) odredite funkciju distribucije slučajne varijable X i skicirajte njezin graf,

c) izračunajte $P(0.25 < X \leq 2)$.

Zadatak 2.19. Neka je X neprekidna slučajna varijabla zadana funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x & , \quad x \in [-\pi/4, \pi/4) \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

b) odredite funkciju distribucije slučajne varijable X i skicirajte njezin graf,

c) izračunajte $P(0 < X \leq \pi/8)$.

Zadatak 2.20. Unutar kruga radijusa R na slučajan način biramo točku. Nađite funkciju distribucije i funkciju gustoće slučajne varijable koja je definirana kao udaljenost odabrane točke od središta kruga.
Napomena: promatrajte krug proizvoljnog radijusa sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava.

Zadatak 2.21. Slučajna varijabla X zadana je funkcijom gustoće:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad -1 \leq x < 0 \\ 1-x & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & , \quad \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X, te izračunajte njezino matematičko očekivanje i varijancu.

Zadatak 2.22. Slučajna varijabla X zadana funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \quad x \in (a,b) \\ 0 & , \quad x \notin (a,b) \end{cases}$$

zove se uniformna slučajna varijabla s parametrima a i b, $a < b$. Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X, te izračunajte njezino matematičko očekivanje i varijancu.

Zadatak 2.23. Slučajna varijabla X zadana funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} 0 & za \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & za \quad x \geq 0 \end{cases}$$

zove se eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\lambda > 0$. Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X, te izračunajte njezino matematičko očekivanje i varijancu.

Zadatak 2.24. Diskretna slučajna varijabla zadana je tablicom distribucije:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Odredite zakon razdiobe slučajne varijable $Y = 3X^2 - 3$.

Zadatak 2.25. Diskretna slučajna varijabla zadana je tablicom distribucije:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \frac{2\pi}{3} & \frac{5\pi}{6} \\ 0.25 & 0.2 & 0.3 & 0.15 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Odredite zakon razdiobe slučajne varijable $Y = 3 - 2\cos^2 X$.

Zadatak 2.26. Slučajna varijabla X ima binomnu distribuciju s parametrima n i p, tj. $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Odredite zakon razdiobe slučajne varijable $Y = 3X+1$ te izračunajte njezino matematičko očekivanje i varijancu.

Zadatak 2.27. Neka je F_X funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable X. Odredite funkciju distribucije slučajne varijable $Y = -X$.

Zadatak 2.28. Slučajna varijabla X uniformno je distribuirana na intervalu $(0,1)$, tj. $X \sim \mathcal{U}(0,1)$. Odredite funkciju gustoće i funkciju distribucije slučajne varijable

a) $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

b) $Z = -\ln X$.

Zadatak 2.29. Slučajna varijabla X ima Cauchyjevu distribuciju s funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Odredite funkciju gustoće i funkciju distribucije slučajne varijable

a) $Y = X^2$,

b) $Z = 1/X$.

Zadatak 2.30. Slučajna varijabla X ima uniformnu distribuciju na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$, tj. $X \sim \mathcal{U}(-\pi/2, \pi/2)$. Odredite funkciju distribucije i funkciju gustoće slučajne varijable

$$Y = \cos X.$$

Zadatak 2.31. Slučajna varijabla X ima funkciju gustoće $f_X(x)$. Odredite funkcije gustoća sljedećih slučajnih varijabli:

a) $Y = e^X$, b) $Y = e^{-X}$,

c) $Y = \sqrt{X}$, $X > 0$, d) $Y = \mathrm{sh} X = \dfrac{e^X - e^{-X}}{2}$.

Zadatak 2.32. Slučajna varijbla X zadana je funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2/3 & , \quad -1 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}.$$

Odredite funkciju gustoće slučajne varijable $Y = X^2$.

Poglavlje 3

Dodatak

3.1 Osnove algebre skupova

Skup A **je podskup skupa** B ($A \subseteq B$) ako je svaki element skupa A ujedno element i skupa B.

Skup A **jednak je skupu** B ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.

Unija skupova A i B je skup $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$.

Presjek skupova A i B je skup $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$.

Razlika skupova A i B je skup $A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$.

Simetrična razlika skupova A i B je skup $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Komplement skupa (događaja) $A \subseteq \Omega$ je skup $A^C = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$ kojeg nazivamo SUPROTAN DOGAĐAJ događaja A.

Komplement prostora elementarnih događaja je prazan skup, tj. $\Omega^C = \emptyset$. Cijeli prostor elementarnih događaja Ω nazivamo SIGURAN DOGAĐAJ, a njegov komplement NEMOGUĆ DOGAĐAJ.

1.	$A \cup B = B \cup A$	KOMUTATIVNOST
2.	$A \cap B = B \cap A$	
3.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	ASOCIJATIVNOST
4.	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
5.	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	DISTRIBUTIVNOST
6.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
7.	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	DE MORGANOVI ZAKONI
8.	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	

Tablica 3.1: Osnovna svojstva skupovnih operacija.

Konačna unija skupova (događaja) $A_1, A_2, \dots A_n \subseteq \Omega$ je skup

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_1 \vee \omega \in A_2 \vee \dots \vee \omega \in A_n\} =$$

$$= \{\omega \in \Omega : \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ t.d. } \omega \in A_i\}.$$

Konačan presjek skupova (događaja) $A_1, A_2, \dots A_n \subseteq \Omega$ je skup

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_1 \wedge \omega \in A_2 \wedge \dots \wedge \omega \in A_n\} =$$

$$= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Osnovna svojstva skupovnih operacija

3.2 Osnovni kombinatorni rezultati

Najpoznatiji kombinatorni principi prebrojavnja su:

Princip jednakosti - Neka su S i T konačni skupovi. Ako postoji bijekcija među njima, tada je $k(S) = k(T)$.

Princip sume - Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $S_1, \ldots, S_n$ konačni skupovi takvi da je $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$ (dakle, disjunktni su). Tada je $(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n)$ konačan skup i vrijedi:

$$k(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = k(S_1) + k(S_2) + \ldots + k(S_n).$$

Princip produkta - Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $S_1, \ldots, S_n$ konačni skupovi (ne nužno disjunktni). Tada je njihov Kartezijev produkt konačan skup i vrijedi:

$$k(S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n) = k(S_1) \cdot k(S_2) \cdot \ldots \cdot k(S_n).$$

O uzastopnom prebrojavanju - Neka su $A_1, \ldots, A_n$ konačni skupovi i neka je $T \subset (A_1 \times \ldots \times A_n)$ skup uređenih n-torki $(a_1, \ldots, a_n)$ definiranih na sljedeći način: prva komponenta a_1 može se birati na k_1 načina (dakle, među k_1 različitih elemenata skupa A_1); za svaku već izabranu prvu komponentu, drugu komponentu a_2 možemo birati na k_2 različitih načina itd. Za svaki izbor komponenata $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, n-tu komponentu a_n možemo odabrati na k_n različitih načina. Tada je kardinalni broj skupa T jednak :

$$k(T) = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n.$$

Primjer 3.1. *Trebamo odabrati jedan par, mladića i djevojku, iz razreda koji se sastoji od* 21 *djevojke i* 2 *mladića. Na koliko načina to možemo učiniti?*

Uređeni razmještaji nazivaju se **permutacije**, a neuređeni razmještaji **kombinacije**.

Definicija 3.1. *Neka je $A = \{a_1, \ldots a_n\}$ skup koji se sastoji od n elemenata i neka je $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$. Varijacija r-tog razreda u skupu A je svaka uređena r-torka međusobno različitih elemenata iz skupa A. Broj varijacija r-tog razreda n-članog skupa je:*

$$V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Primjer 3.2. *Koliko ima međusobno različitih uređenih trojki elemenata skupa A, ako je $k(A) = 10$?*

Definicija 3.2. *Svaku uređenu n-torku skupa od n elemenata zovemo permutacija. Broj permutacija n-članog skupa je:*

$$p_n = V_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Definicija 3.3. *Permutacija u n-članom skupu je svaka varijacija n-tog razreda tog skupa, odnosno permutacija n-članog skupa je svaka bijekcija tog skupa na samog sebe.*

Primjer 3.3. *Na koliko načina pet ljudi može stati u red?*

Definicija 3.4. *Neka je $A = \{a_1, \ldots a_n\}$ skup koji se sastoji od n elemenata i neka je $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$. Kombinacija r-tog razreda u skupu A je svaki r-člani podskup skupa A. Broj kombinacija r-tog razreda skupa od n elemenata je:*

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}.$$

Primjer 3.4. *U razredu ima 15 dječaka i 10 djevojčica. Na koliko načina možemo odabrati:*

a) tri dječaka,

b) tri dječaka i dvije djevojčice,

c) jednak broj dječaka i djevojčica?

Definicija 3.5. *Neka je $A = \{a_1, \ldots a_n\}$ skup koji se sastoji od n elemenata. Varijacija r-tog razreda s ponavljanjem skupa od n-elemenata je svaka uređena r-torka elemenata iz skupa A. Broj takvih varijacija s ponavljenjem je n^r.*

Primjer 3.5. *Koliko ima binarnih nizova duljine 7?*

Definicija 3.6. *Broj permutacija s ponavljenjem skupa od n elemenata među kojima je n_1 elemenata prve vrste, n_2 elemenata druge vrste, $\ldots$, n_k elemenata k-te vrste (pri čemu je $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$) je:*

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

3.3 Ponovljeni red

U diskretnoj teoriji vjerojatnosti česta je potreba za računanjem sume tzv. ponovljenog reda. Da bismo pojasnili razliku između ponovljenog reda i običnog reda, podsjetimo se da je red uređeni par dva niza $((a_n), (s_n))$ od kojih drugi niz nastaje sumiranjem prvih n članova prvog niza, tj.

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n.$$

Pri tome kažemo da red konvergira ako konvergira niz parcijalnih suma (s_n) [13].
Ponovljeni red nastaje tako da prvo napravimo jednu particiju[1] skupa prirodnih brojeva $(M_i, i \in \mathbb{N})$ pa posebno zbrojimo one članove niza čiji indeksi pripadaju u M_i, a zatim sve tako dobivene sume, ako takve sume postoje.

Primjer 3.6. *Neka je zadan geometrijski red s kvocijentom $\frac{1}{2}$ i prvim članom $\frac{1}{2}$. tj.*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ovaj red je konvergentan i suma mu je 1. Isti rezultat dobit ćemo ako podijelimo skup indeksa $\mathbb{N}$ na parne i neparne brojeve, tj. ako promatramo particiju $\{N, P\}$ skupa prirodnih brojeva pri čemu je

$$N = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}, \quad P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Budući je $\mathbb{N} = P \cup N$ sumu spomenutog geometrijskog reda možemo izračunati tako da prvo zbrojimo sve članove niza s parnim eksponentima, zatim sve članove niza s neparnim eksponentima, a zatim te dvije sume:

$$\sum_{n \in N} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3},$$

[1] Familija skupova $\{M_i, i \in \mathbb{N}\}$ čini particiju skupa A ako su zadovoljena sljedeća svojstva:

1. $M_i \subseteq A$, $\forall i \in \mathbb{N}$,
2. $M_i \cap M_j = \emptyset$ za sve $i \neq j$,
3. $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i = A$.

$$\sum_{n\in P}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}.$$

Očito vrijedi:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^n}=\sum_{n\in N}\frac{1}{2^n}+\sum_{n\in P}\frac{1}{2^n}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1.$$

Za zadavanje ponovljenog reda treba nam niz (a_n) i particija skupa $\mathbb{N}$: $\{M_i, i\in\mathbb{N}\}$. Ako za svaki $i\in\mathbb{N}$ konvergiraju redovi $\sum\limits_{j\in M_i} a_j$ i sume im označimo

$$A_i=\sum_{j\in M_i}a_j,$$

tada definramo ponovljeni red kao

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in M_i}a_j=\sum_{i\in\mathbb{N}}A_i.$$

Primjer 3.7. *Neka je zadana beskonačna matrica realnih brojava:*

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Ovakve matrice često koristimo za zadavanje ponovljenih redova obzirom da se particije skupa $\mathbb{N}$ često mogu lakše prikazati korištenjem dva indeksa. Iz beskonačne matrice možemo definirati mnogo ponovljenih redova. Navedimo nekoliko primjera:

- *Sumirajmo prvo članove matrice po redovima:*

$$A_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}.$$

Ako te sume postoje, tj. ako je $A_i<\infty$, $\forall i\in\mathbb{N}$, možemo definirati ponovljeni red

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}.$$

- *Sumirajmo prvo članove matrice po stupcima:*

$$A_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Ako te sume postoje, tj. ako je $A_j < \infty$, $\forall j \in \mathbb{N}$, možemo definirati ponovljeni red

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

- *Osim zbrajanja po stupcima ili recima, možemo particiju praviti i na druge načine, npr. po pavilima koji su slikovito prikazani u sljedećoj matrici:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Obzirom da se iz istog niza (a_n) brojeva može definirati mnogo različitih ponovljenih redova, pitanje je koliko se toga u konačnici "preslagivanjem" mijenja. Npr. ako jedan ponovljeni red konvergira, može li se "preslagivanjem" dogoditi da novonastali ponovljeni red ne konvergira, može li se uopće definirati ponovljeni red za bilo koju particiju skupa indeksa, itd. Da ovako postavljena pitanja imaju smisla, potvrđuje sljedeći primjer:

Primjer 3.8. *Neka je zadana beskonačna realna matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \ldots \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & \ldots \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & \ldots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Svi redovi koji nastaju sumiranjem elemenata iz jednog retka ove matrice su divergentni, tj. za svaki $i \in \mathbb{N}$ divergentni su redovi

$$\sum_j a_{ij}.$$

Dakle, ponovljeni red se ne može definirati tako da se prvo sumira po redovima zadane beskonačne matrice. Slično vrijedi i ako se prvo sumira po stupcima. Međutim, ako particiju pravimo po bilo kojoj od dvije sheme označene u matricama:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

vidimo da sume uvijek postoje. Dakle, ponovljene redove po tim particijama možemo definirati i njihova suma je 0*.*

Sljedeći teorem daje nužne i dovoljne uvjete koji jamče da se "preslagivanjem" neće promijeniti suma ponovljenog reda.

Teorem 3.1. *Neka je s* $(a_n, n \in \mathbb{N})$ *dan niz realnih brojeva i neka je* $\{M_i, i \in \mathbb{N}\}$ *jedna particija skupa prirodnih brojeva. Red*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

konvergira onda i samo onda ako konvergira red

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in M_i} |a_j|.$$

U slučaju konvegencije sume su im iste.

Dokaz. Pretpostavimo da red

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in M_i} |a_j|$$

konvergira i označimo njegovu sumu L. Red $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ je red s pozitivnim članovima i očigledno je njegov niz parcijalnih suma ograničen realnim brojem L. Dakle, i ovaj red je konvergentan (pogledati npr. [13]). Nadalje,

obzirom da je apsolutno konvergentan red realnih brojeva ujedno i konvergentan (pogledati npr. [13]) slijedi da je i red $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergentan.
Pretpostavimo sada da konvergira red

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

i njegovu sumu označimo L. Tada, za svaki element M_i particije skupa prirodnih brojeva, pripadni red

$$\sum_{j\in M_i} |a_j|$$

predstavlja red realnih brojeva s pozitivnim članovima čiji je niz parcijalnih suma ograničen. Dakle, za svaki $i \in \mathbb{N}$, takav red je konvergentan. Označimo:

$$\sum_{j\in M_i} |a_j| = A_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Dokažimo da i red

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} A_i$$

konvergira, te da mu je suma L. U tu svrhu označimo $(b_{1i}, i \in \mathbb{N})$ podniz niza $(|a_i|, i \in \mathbb{N})$ koji čine oni elementi s indeksima iz M_1. Analogno, za svaki $k \in \mathbb{N}$ definirajmo odgovarajući podniz $(b_{ki}, i \in \mathbb{N})$ niza $(|a_i|, i \in \mathbb{N})$ koji čine oni elementi s indeksima iz M_k. Uočimo da je ovako nastali skup podnizova od $(|a_i|, i \in \mathbb{N})$ pokupio sve njegove članove te da se niti jedan član ne pojavljuje više od jednom. Obzirom da se radi o pozitivnim brojevima, posljedica toga je da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + \cdots A_n &= \lim_{l\to\infty} \sum_{i=1}^{l} b_{1i} + \lim_{l\to\infty} \sum_{i=1}^{l} b_{2i} + \cdots + \lim_{l\to\infty} \sum_{i=1}^{l} b_{ni} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{l} b_{1i} + \cdots + \sum_{i=1}^{l} b_{ni} \right] < L. \end{aligned}$$

Dakle, red s pozitivnim članovima je ograničen, pa je time i konvergentan. Označimo njegovu sumu V. Očigledno je da je i $V \leq L$ obzirom da je L

gornja međa pripadnog niza parcijalnih suma. Pokažimo da je istovremeno i $V \geq L$. Naime, za svaku k-tu parcijalnu sumu reda $\sum_{i=1}^{k} |a_i|$ močemo naći dovoljno veliki n tako da je

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \geq \sum_{i=1}^{k} |a_i|.$$

Pripadne granične vrijednosti će onda također zadovoljavati istu nejednakost, što znači da je $V \geq L$. Dakle, mora biti $V = L$.

Teorem 3.2. *Neka je s $(a_n, n \in \mathbb{N})$ dan niz realnih brojeva i neka je $\{M_i, i \in \mathbb{N}\}$ jedna particija skupa prirodnih brojeva. Ako jedan od redova*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|, \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in M_i} |a_j|$$

konvergira onda konvergiraju i redovi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n, \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in M_i} a_j$$

i sume su im iste.

Dokaz. Koristeći prethodni teorem i činjenicu da je apsolutno konvergentan red realnih brojeva ujedno i konvergentan, da bismo dokazali tvrdnju teorema dovljno je dokazati da konvergencija reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ povlači konvergenciju reda $\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in M_i} a_j$ te da je tada

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in M_i} a_j.$$

U tu svrhu uočimo da iz pretpostavke o konvergenciji reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ možemo zaključiti:

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ je konvergentan. Označimo:

$$V = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

- $\sum_{j\in M_i} |a_j|$ je konvergentan za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa je time i $\sum_{j\in M_i} a_j$ konvergentan. Označimo:
$$\sum_{j\in M_i} a_j = A_i.$$

Slično kao u dokazu prethodnog teorema, za svaki $i \in \mathbb{N}$ definirajmo odgovarajući podniz $(b_{ik}, k \in \mathbb{N})$ niza $(a_j, j \in \mathbb{N})$ koji čine elementi s indeksima iz M_i, tj.
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} b_{ik} = A_i.$$
Uočimo da je ovako nastali skup podnizova od $(a_j, j \in \mathbb{N})$ pokupio sve njegove članove te da se niti jedan član ne pojavljuje više od jednom.
Iz apsolutne konvergencije reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ znamo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je
$$\sum_{j=k_0+1}^{\infty} |a_j| < \varepsilon, \tag{3.1}$$
odakle slijedi da je
$$\left| V - \sum_{j=1}^{k_0} a_j \right| = \left| \sum_{j=k_0+1}^{\infty} a_j \right| \leq \sum_{j=k_0+1}^{\infty} |a_j| < \varepsilon.$$
Neka su n_0 i l_0 dovoljno veliki prirodni brojevi da izraz
$$\sum_{i=1}^{n_0} \sum_{k=1}^{l_0} b_{ik} - \sum_{j=1}^{k_0} a_j$$
predstavlja sumu članova reda $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ s indeksima većim od k_0. Tada za svaki $n \geq n_0$ i $l \geq l_0$ vrijedi:
$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} b_{ik} - \sum_{j=1}^{k_0} a_j \right| < \varepsilon,$$
pa prijelazom na limes po $l \to \infty$ vidimo da je
$$\left| \sum_{i=1}^{n} A_i - \sum_{j=1}^{k_0} a_j \right| < \varepsilon.$$

Koristeći prethodnu nejadnakost i nejadnakost (3.1) vidimo da je

$$\left|\sum_{i=1}^{n} A_i - V\right| < 2\varepsilon, \quad \forall n > n_0,$$

Dakle, red $\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in M_i} a_j$ konvergira i suma mu je V.

Bibliografija

[1] ANDERSON, T.W. *An introduction to Multivariante Statistical Analysis*, J. Wiley, 1958.

[2] BAIN, L.E, ENGELHARDT, M. *Introduction to Probability and Mathematical statistics*, Duxbury, 2009.

[3] COHN, D.L. *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1980.

[4] CHOW, Y.S, TEICHER, H. *Probability Theory*, Spronger, New York-Heidelberg-Berlin, 1978.

[5] DANIEL, W.W., TERRELL, J.C. *Business Statistics*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1989.

[6] DURRETT, R. *Probability: Theory and Examples*, Duxbury Press, 1995.

[7] ELEZOVIĆ, N. *Diskretna vjerojatnost*, Element, Zagreb, 2007.

[8] ELEZOVIĆ, N. *Slučajne varijable*, Element, Zagreb, 2007.

[9] ELEZOVIĆ, N. *Statistika i procesi*, Element, Zagreb, 2007.

[10] GLIŠIČ, Z., PERUNIČIĆ, P. *Zbirka rešenih zadataka iz verovatnoće i matematičke statistike*, Naučna knjiga, Beograd, 1982.

[11] ILIJAŠEVIĆ, M., PAUŠE, Ž. *Riješeni primjeri i zadaci iz vjerojatnosti i statistike*, "Zagreb", Samobor, 1990.