ODJEL ZA MATEMATIKU
SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU

13. svibnja 2013.

Prvi kolokvij iz Algebre

1. Neka je $G = \{e, x, x^2, y, yx, yx^2\}$ grupa koja nije Abelova, a $|x| = 3$, $|y| = 2$. Odredite čemu je jednak xy te dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju: $H = \langle y \rangle$ je normalna podgrupa od G.

2. Dokažite da je svaki element grupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ konačnog reda i provjerite je li $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ciklička grupa.

3. Neka je G konačna grupa i $\varphi : G \to G$ zadan s $\varphi(g) = g^2$.
   (a) Dokažite da je φ homomorfizam ako i samo ako je G Abelova grupa.
   (b) Ako je G Abelova grupa neparnog reda, dokažite da je φ izomorfizam.

4. Neka je $H \leq S_4$. Ako je $(1\,3\,4) \in H$ i H sadrži podgrupu izomorfnu $\mathbb{Z}_8$, odredite H i nađite joj redove Sylowljevih podgrupa.

5. Neka je S neprazan skup i $\mathcal{P}(S)$ partitivni skup skupa S. Na $\mathcal{P}(S)$ definirajmo operacije $+$ i $\cdot$ na sljedeći način:

$$A + B = A \triangle B, \qquad A \cdot B = A \cap B.$$

   Dokažite da je $(\mathcal{P}(S), +, \cdot)$ komutativan prsten s 1. Odredite sve elemente u ovoj strukturi koji imaju multiplikativni inverz i sve elemente koji su djelitelji nule.

Napomena. Sve svoje tvrdnje obrazložite.