Rješenja nekih zadataka s vježbi

1. Dokažite da polja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ i $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ nisu izomorfna.

   Rješenje. Pretpostavimo da je $\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ izomorfizam. Kako je φ homomorfizam mora vrijediti

   $$\varphi(a + b\sqrt{2}) = \varphi(a) + \varphi(b)\varphi(\sqrt{2}), \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}.$$

   Analogno kao na vježbama se pokazuje, jer je φ izomorfizam, da mora vrijediti

   $$\varphi(q) = q, \quad \forall q \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

   Stoga je

   $$\varphi(a + b\sqrt{2}) = a + b\varphi(\sqrt{2}), \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}.$$

   Zanima nas, dakle, što može biti $\varphi(\sqrt{2})$. Kako je $\varphi(\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, postoje $a, b \in \mathbb{Q}$ takvi da vrijedi $\varphi(\sqrt{2}) = a + b\sqrt{3}$. Koristeći (1) dobivamo sljedeći niz jednakosti

   $$2 = \varphi(2) = \varphi(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = \varphi(\sqrt{2})\varphi(\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{3})^2 = a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{3}.$$

   Baza vektorskog prostora $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ je $\{1, \sqrt{3}\}$ pa (iz linearne nezavisnoti vektora baze) dobivamo sljedeći sustav jednadžbi

   $$2ab = 0, \quad a^2 + 3b^2 = 2.$$

   Kako ovaj sustav nema rješenja, zaključujemo da polja ne mogu biti izomorfna. □

2. Odredite $n = [\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]$.

   Rješenje. Označimo s $\alpha = \sqrt{3}$. Kako je $\alpha^2 = 3$, α je nultočka polinoma $p(x) = x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$. Pitanje je je li ovaj polinom ireducibilan nad $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Ako pretpostavimo suprotno, onda je $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ tj. postoje $a, b \in \mathbb{Q}$ takvi da je $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$. Kvadriranjem dobivamo jednakost istog tipa kao u prethodnom zadatku i, sasvim analognim zaključivanjem, dolazimo do zaključka da $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ tj. $p(x)$ je ireducibilan nad $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ i $p = \mu_{\sqrt{3}}$. Kako je $\deg \mu_{\sqrt{3}} = 2$, dobivamo da je $n = 2$. □

3. Odredite $n = [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})]$.

   Rješenje. Označimo s $\alpha = i$ i dokažimo da je polinom $p(x) = x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$. Ako pretpostavimo suprotno, onda je $i \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ pa postoje $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ takvi da je

   $$i = a + b\sqrt[4]{2} + c\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8}$$

   što je nemoguće, budući je i imaginaran broj, a s desne strane imamo realan broj. Stoga je $n = 2$. □

4. Odredite $n = [\mathbb{Q}(\sqrt{-2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{-2 + \sqrt{2}})]$.

   Rješenje. Uočimo da je $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{-2 + \sqrt{2}})$ jer je $\sqrt{2} = (\sqrt{-2 + \sqrt{2}})^2 + 2$. Stoga je $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{-2 + \sqrt{2}})$ pa je $n = 1$.

   □

5. Odredite $n = [\mathbb{Q}(\sqrt{-3+\sqrt{3}}, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{-3+\sqrt{3}})]$.

Rješenje. Pretpostavimo da je $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3+\sqrt{3}})$. Kada se odredi baza za $\mathbb{Q}(\sqrt{-3+\sqrt{3}})$ dobiva se da mora vrijediti sljedeća jednakost

$$\sqrt{2} = a + b\sqrt{-3+\sqrt{3}} + c(-3+\sqrt{3}) + d(-3+\sqrt{3})\sqrt{-3+\sqrt{3}}.$$

Stoga je

$$\sqrt{2} - a - c(-3+\sqrt{3}) = (b + d(-3+\sqrt{3}))\sqrt{-3+\sqrt{3}}.$$

Kako s lijeve strane imamo realan, a s desne strane imaginaran broj, jednakost će vrijediti ako i samo ako su i lijeva i desna strana jednaka 0. Dobivamo sljedeći sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} \sqrt{2} - a + 3c - c\sqrt{3} &= 0 \\ b - 3d + d\sqrt{3} &= 0 \end{aligned}$$

koji nema rješenja. Stoga je $n = 2$.

$\square$