Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
28. siječnja 2013.

2. kolokvij iz
Geometrije ravnine i prostora

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Pravac p u ravnini zadan je svojom normalom $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} \neq \vec{0}$ i točkom $P_0 = (x_0, y_0)$ kojom prolazi. Napišite njegov implicitni oblik i Hesseov normalni oblik. Odredite udaljenost proizvoljne točke $Q = (u, v)$ do pravca p.*
(b) *Specijalno, odredite udaljenost točke $Q = (5, 5)$ do pravca p ako je $\vec{n} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ i $P_0 = (0, 5)$.*
Rješenje: *(a) $ax + by - c = 0$, $c = ax_0 + by_0$; Hesseov oblik: $x\cos\varphi + y\sin\varphi - \delta = 0$, $\delta \geq 0$, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $d(Q,p) = \frac{|au+bv-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (b) $3x + 4y - 20 = 0$, $d(Q,p)=3$*

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Napišite definiciju linearnog operatora $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$. Je li skup $\mathcal{L}(X_0)$ grupa obzirom na operaciju množenja (kompozicije) ?*
(b) *Definirajte operator projekcije na simetralu prvog i treceg kvadranta. Je li to linearan operator ? Napišite matricu tog linearnog operatora u bazi $\{e_1, e_2\}$. Je li to simetričan i nesingularan operator ?*
Rješenje: *(a) - (b) $\mathcal{A}(e_1) = \mathcal{A}(e_2) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$ je linearni operator; $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. $\mathcal{A}$ je simetričan, ali singularan operator.*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Što je svojstvena vrijednost, a što svojstveni vektor linearnog operatora $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$? Kakve su svojstvene vrijednosti simetričnog linearnog operatora ?*
(b) *Odredite svojstvene vrijednosti i odgovarajuće svojstvene vektore linearnog operatora $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$ zadanog s $\mathcal{A}(e_1) = -3e_1 - 2e_2$, $\mathcal{A}(e_2) = 5e_1 + 4e_2$.*
Rješenje: *(a) - Realne (b) $\lambda_1 = -1$, $v_1 = 5e_1 + 2e_2$; $\lambda_2 = 2$, $v_2 = e_1 + e_2$.*

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Pokažite da je kvadratna forma $q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1, x_2 + a_{22}x_2^2$ pozitivno definitna onda i samo onda ako je $a_{11} > 0$ i $\det A > 0$.*
(b) *Ispitajte definitnost kvadratne forme $q(x_1, x_2) = -3x_2^2 + 4x_1x_2$.*
Rješenje: *(a) - (b) Indefinitna*

Zadatak 5. [30 bodova]
(a) *Napišite sljedeću kvadratnu jednadžbu u formi bez mješovitog člana*

$$6x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2 + 24x_1 - 8x_2 = 0.$$

(b) *Koja krivulja drugog reda je određena tom kvadratnom jednadžbom ?*
Rješenje: *(a) - (b) Elipsa: $\frac{(y_1-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{(y_2+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6})^2} = 1$, gdje je $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$*

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 110 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim kolokvijima.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
28. siječnja 2013.

2. kolokvij iz
Geometrije ravnine i prostora

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Ravnina M u prostoru zadana je svojom normalom $\vec{n} = a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k} \neq \vec{0}$ i točkom $P_0 = (x_0, y_0, y_0)$ kojom prolazi. Napišite implicitni oblik i Hesseov normalni oblik jednadžbe ravnine. Odredite udaljenost proizvoljne točke $Q = (u, v, w)$ do ravnine M.*
(b) *Specijalno, odredite udaljenost točke $Q = (5, 5, 5)$ do Ravnine M ako je $\vec{n} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ i $P_0 = (0, 6, 3)$.*
Rješenje: *(a) $ax+by+cz-d = 0$, $d = ax_0+by_0+cz_0$; Hesseov oblik: $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\delta = 0$, $\delta \geq 0$, $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $d(Q,p) = \frac{|au+bv+cw-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$*
(b) $-2x + 4y + 4z - 36 = 0$, d(Q,p)=1

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Napišite definiciju linearnog operatora $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$. Za koji linearni operator kažemo da je nesingularan ?*
(b) *Definirajte operator projekcije na simetralu drugog i četvrtog kvadranta. Je li to linearan operator ? Napišite matricu tog linearnog operatora u bazi $\{e_1, e_2\}$. Je li to simetričan i nesingularan operator ?*
Rješenje: *(a) - (b) $\mathcal{A}(e_1) = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$, $\mathcal{A}(e_2) = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2)$ je linearni operator;*
$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. *$\mathcal{A}$ je simetričan, ali singularan operator.*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Što je svojstvena vrijednost, a što svojstveni vektor linearnog operatora $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$? Kakvi su svojstveni vektori simetričnog linearnog operatora ?*
(b) *Odredite svojstvene vrijednosti i odgovarajuće svojstvene vektore linearnog operatora $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$ zadanog s $\mathcal{A}(e_1) = -2e_1 + e_2$, $\mathcal{A}(e_2) = 4e_1 - 2e_2$.*
Rješenje: *(a) - Okomiti (b) $\lambda_1 = -4$, $v_1 = -2e_1 + e_2$; $\lambda_2 = 0$, $v_2 = 2e_1 + e_2$.*

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Pokažite da je kvadratna forma $q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1, x_2 + a_{22}x_2^2$ negativno definitna onda i samo onda ako je $a_{11} < 0$ i $\det A > 0$.*
(b) *Ispitajte definitnost kvadratne forme $q(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - 8x_1x_2$.*
Rješenje: *(a) - (b) Pozitivno definitna*

Zadatak 5. [30 bodova]
(a) *Napišite sljedeću kvadratnu jednadžbu u formi bez mješovitog člana*

$$2x_1^2 - 4x_2^2 + 8x_1x_2 - 8x_1 - 4x_2 - 7 = 0.$$

(b) *Koja krivulja drugog reda je određena tom kvadratnom jednadžbom ?*
Rješenje: *(a) - (b) Hiperbola: $-\frac{y_1^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{(y_2+\frac{\sqrt{5}}{2})^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$, gdje je $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$*

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 110 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim kolokvijima.