

2. kolokvij iz
Geometrije ravnine i prostora

Zadatak 1. [25 bodova]

(a) Kako se definira linearni operator $\mathcal{A}: X_0 \rightarrow X_0$ na vektorskom prostoru X_0 . Vrijedi li za bilo koja dva linearna operatora $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(X_0)$ zakon komutacije? Ima li svaki linearni operator $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X_0)$ svoj inverz?

(b) Definirajte linearni operator $\mathcal{A}$ rotacije za kut $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Napišite matricu tog linearnog operatora u bazi $\{e_1, e_2\}$. Je li to simetričan i nesingularan operator? Ako je nesingularan, odredite njemu inverzni linearni operator.

Rješenje: (a) Nastavni materijali (b) $\mathcal{A}(e_1) = -e_2$, $\mathcal{A}(e_2) = e_1$ nije simetričan, ali je nesingularan. $\mathcal{A}^{-1}(e_1) = e_2$, $\mathcal{A}^{-1}(e_2) = -e_1$

Zadatak 2. [25 bodova]

(a) Kako se definira svojstvena vrijednost, a kako svojstveni vektor linearnog operatora $\mathcal{A}: X_0 \rightarrow X_0$? Kakve su svojstvene vrijednosti linearnog operatora iz prethodnog Zadatka 1?

(b) Odredite svojstvene vrijednosti i odgovarajuće svojstvene vektore linearnog operatora $\mathcal{A}: X_0 \rightarrow X_0$ zadanog s $\mathcal{A}(e_1) = 5e_1 + 2e_2$, $\mathcal{A}(e_2) = 2e_1 + 5e_2$. Kakve su svojstvene vrijednosti simetričnog linearnog operatora?

Rješenje: (a) (b) $\lambda_1 = 7$, $v_1 = e_1 + e_2$; $\lambda_2 = 3$, $v_2 = -e_1 + e_2$. Realne

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) Kako se definira ortogonalni linearni operator?

(b) Neka je $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(X_0)$ linearni operator rotacije za kut $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Kako operator $\mathcal{U}$ transformira ortonormiranu bazu $\{e_1, e_2\}$? Neka su $(2, 2)$ koordinate točke T u bazi $\{e_1, e_2\}$. Kolike su koordinate te točke u bazi $\{e'_1, e'_2\}$, $e'_1 = \mathcal{U}e_1$, $e'_2 = \mathcal{U}e_2$

Rješenje: (a) (b) $(x'_1, x'_2) = (1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$

Zadatak 4. [25 bodova]

(a) Pokažite da je kvadratna forma $q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ negativno semi-definitna onda i samo onda ako je $a_{11} \leq 0$, $a_{22} \leq 0$ i $\det A \geq 0$.

(b) Ispitajte definitnost kvadratnih formi

$$q_1(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2, \quad q_2(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Rješenje: (a) - (b) q_1 indefinitna, q_2 pozitivno definitna

Zadatak 5. [25 bodova]

(a) Napišite sljedeću kvadratnu jednadžbu u formi bez mješovitog člana

$$-4x_1^2 + 16x_1x_2 - 4x_2^2 + 4x_1 - 4x_2 = 0.$$

(b) Koja krivulja drugog reda je određena tom kvadratnom jednadžbom?

Rješenje: (a) - (b) Hiperbola: $-3(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{6})^2 + y_2^2 + \frac{1}{6} = 0$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 125 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u prethodnom kolokviju.

2. kolokvij iz
Geometrije ravnine i prostora

Zadatak 1. [25 bodova]

(a) Kako se definira linearni operator $\mathcal{A}: X_0 \rightarrow X_0$ na vektorskom prostoru X_0 . Kako se definira linearni operator kontrakcije i dilatacije?

(b) Definirajte linearni operator $\mathcal{A}$ rotacije za kut $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Napišite matricu tog linearnog operatora u bazi $\{e_1, e_2\}$. Je li to simetričan i singularan operator? Što je slika $\mathcal{A}(S)$ segmenta $S = \overline{AB} = \{x \in X_0: x = \lambda r_A + (1 - \lambda)r_B, \lambda \in [0, 1]\}$, gdje je $A = (1, 1)$, $B = (3, 2)$? Nacrtajte odgovarajuću sliku.

Rješenje: (a) Nastavni materijali (b) $\mathcal{A}(e_1) = e_2$, $\mathcal{A}(e_2) = -e_1$ nije simetričan, ali je nesingularan. $\mathcal{A}(S) = \overline{A'B'}$, $A' = (-1, 1)$, $B' = (-2, 3)$.

Zadatak 2. [25 bodova]

(a) Kako se definira svojstvena vrijednost, a kako svojstveni vektor linearnog operatora $\mathcal{A}: X_0 \rightarrow X_0$? Kakve su svojstvene vrijednosti linearnog operatora iz prethodnog Zadatka 1?

(b) Odredite svojstvene vrijednosti i odgovarajuće svojstvene vektore linearnog operatora $\mathcal{A}: X_0 \rightarrow X_0$ zadanog s $\mathcal{A}(e_1) = -5e_1 - 2e_2$, $\mathcal{A}(e_2) = -2e_1 - 2e_2$. Kakvi su međusobno svojstveni vektori simetričnog linearnog operatora?

Rješenje: (a) Kompleksne (b) $\lambda_1 = -6$, $v_1 = 2e_1 + e_2$; $\lambda_2 = -1$, $v_2 = -e_1 + 2e_2$. Okomiti

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) Kako se može geometrijski opisati djelovanje ortogonalnog linearnog operatora?

(b) Neka je $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(X_0)$ linearni operator rotacije za kut $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Kako operator $\mathcal{U}$ transformira ortonormiranu bazu $\{e_1, e_2\}$? Neka su $(2, 2)$ koordinate točke T u bazi $\{e_1, e_2\}$. Kolike su koordinate te točke u bazi $\{e'_1, e'_2\}$, $e'_1 = \mathcal{U}e_1$, $e'_2 = \mathcal{U}e_2$

Rješenje: (a) (b) $(x'_1, x'_2) = (1 + \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$

Zadatak 4. [25 bodova]

(a) Pokažite da je kvadratna forma $q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ pozitivno semi-definitna onda i samo onda ako je $a_{11} \geq 0$, $a_{22} \geq 0$ i $\det A \geq 0$.

(b) Ispitajte definitnost kvadratnih formi

$$q_1(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, \quad q_2(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2.$$

Rješenje: (a) - (b) q_1 indefinitna, q_2 negativno definitna

Zadatak 5. [25 bodova]

(a) Napišite sljedeću kvadratnu jednadžbu u formi bez mješovitog člana

$$5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - x_2 = 0.$$

(b) Koja krivulja drugog reda je određena tom kvadratnom jednadžbom?

Rješenje: (a) - (b) Elipsa: $7y_1^2 + 3(y_2 - \frac{\sqrt{2}}{6})^2 = \frac{1}{6}$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 125 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u prethodnom kolokviju.