Matematika 2, vježbe, 22.4.2020.

* Računanje površine lika u ravnini *
- nastavak

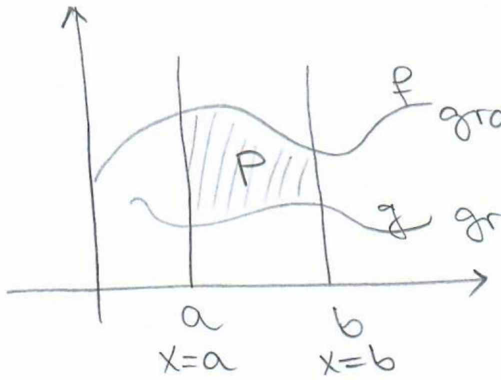
2. slučaj Površina P lika omeđenog s

① Grafovima neprekidnih funkcija f i g na segmentu $[a,b]$ za koje vrijedi

$$\underbrace{f(x) \geq g(x)}, \ \forall x \in [a,b]$$

→ primijetite da ovo znači da su vrijednosti funkcije f veće ili jednake od vrijednosti funkcije g tj. graf funkcije f na segmentu $[a,b]$ se nalazi iznad grafa funkcije g (vidi sliku)

② Pravcima $x=a$ i $x=b$



graf funkcije f

graf funkcije g

P – površina koju tražimo (omeđena grafovima funkcija f i g te pravcima $x=a$ i $x=b$). Računamo ju:

$$P = \int_a^b \underbrace{(f(x) - g(x))}\,dx$$

oduzimamo: funkcija koja ima veće vrijednosti f (tj. čiji je graf iznad) minus funkcija koja ima manje vrijednosti g (tj. čiji je graf ispod)

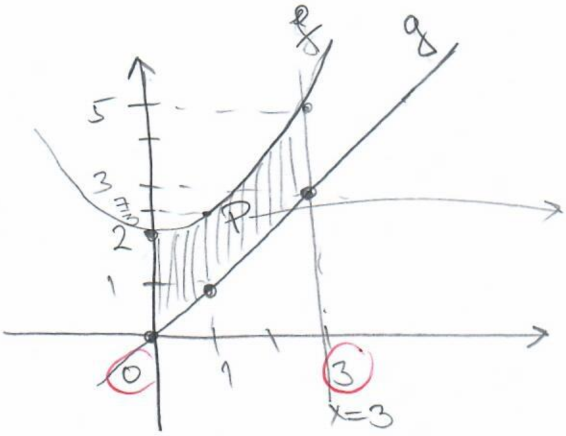
Zad1 Izračunajte površinu lika omeđenog grafovima funkcija $\underbrace{f(x)=\frac{1}{3}x^2+2}$ i $g(x)=x$ te pravcima $x=0$ i $x=3$. Primijetimo da je graf od f parabola a od g pravac

Rj Najprije ćemo skicirati funkcije f i g da vidimo koja je "iznad" a koja "ispod" kako bi mogli postaviti integral. Uzimamo u tablici svakako vrijednosti 0 i 3 jer su nam to granice.

x	0	1	3
$f(x)$	2	$\underbrace{\frac{7}{3}}_{\frac{1}{3}+2}$	$\underbrace{5}_{\frac{9}{3}+2}$

x	0	1	3
$g(x)$	0	1	3

← Uzimamo iste vrijednosti x za obje funkcije jer ih promatramo na istom području



$x=0$ je y-os

$$P=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$$

↑ zadane granice

→ jer je graf od f iznad grafa od g (vidi sliku) na $[0,3]$

$$=\int_0^3\left(\frac{1}{3}x^2+2-x\right)dx$$

↑ uvrstimo g i f

$$=\frac{1}{3}\int_0^3 x^2\,dx+2\cdot\int_0^3 \underbrace{1}_{x^0}\,dx-\int_0^3 x^1\,dx$$

↑ rastavimo na 3 integrala i izlučimo konstante

$$\left[\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad n\neq -1\right.$$

$$=\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}}_{=\frac{x^3}{9}}\Big|_0^3+2\cdot x^1\Big|_0^3\underbrace{-\frac{x^2}{2}}_{=-\frac{1}{2}x^2}\Big|_0^3=\frac{\cancel{27}^{3}}{\cancel{9}_1}-0+2\cdot 3-2\cdot 0-\frac{1}{2}\left(3^2-0\right)$$

N-L formula

pa mogu izlučiti $-\frac{1}{2}$ prije uvrštavanja granica da lakše radimo s minusima

$$=3+6-\frac{1}{2}\cdot 9=9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$$

Zad 2 Izračunajte površinu lika omeđenog grafovima funkcija $f(x)=x^2-2x$ i $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$.

(3)

Rj Primijetite da ovdje nemamo dodatno zadane pravce koji predstavljaju granice integracije pa onda sami trebamo odrediti granice. Zanima nas površina koju omeđuju grafovi funkcija f i g pa s obzirom da želimo/trebamo omeđeno područje "nadamo se" da se funkcije f i g sijeku. Kako odrediti točke gdje se/u kojima se f i g sijeku? Tako da ih izjednačimo:

$$f(x)=g(x)$$

$$x^2-2x=-\frac{1}{2}x^2+x$$ (sada možemo sve prebaciti na jednu stranu)

$$x^2-2x+\frac{1}{2}x^2-x=0$$

$$\frac{3}{2}x^2-3x=0 \quad /:3$$

$$\frac{1}{2}x^2-x=0 \quad /\cdot 2$$

$$x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0 \Rightarrow \boxed{x_1=0,\ x_2=2}$$

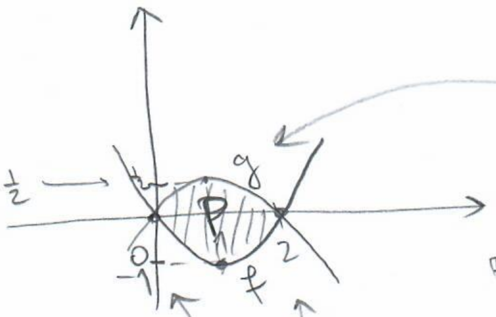
u tim točkama se f i g sijeku! Njih onda uvrštavamo u tablicu (i još neku točku između da imamo bolju skicu)

x	0	1	2
f(x)	0	-1	0

↳ primijetimo da je graf fje f parabola koja je okrenuta prema gore zbog $a=1>0$

x	0	1	2
g(x)	0	$\underbrace{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}+1}$	0

↳ graf fje g je parabola okrenuta prema dolje jer $a=-\frac{1}{2}<0$



jer je graf funkcije g iznad grafa funkcije f na području [0,2] koje promatramo

$$P = \int_0^2 (g(x) - f(x))\,dx$$

to su granice našeg područja

$$= \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + x - (x^2 - 2x)\right) dx$$

uvrstimo funkcije

$$= \int_0^2 \left(\underbrace{-\frac{1}{2}x^2 - x^2}_{-\frac{3}{2}x^2} + \underbrace{x + 2x}_{=3x}\right) dx$$

sredimo da nam bude lakše integrirati

$$= \int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 3x\right) dx$$

$$= -\frac{3}{2}\int_0^2 x^2\,dx + 3 \cdot \int_0^2 x^1\,dx$$

$$= -\frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{x^3}{\cancel{3}}\Big|_0^2 + 3 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^2$$

kratimo 3-ke

$$= -\frac{2^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{2}} + 0 + 3 \cdot \frac{2^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} - 3 \cdot \frac{0^2}{2} = -4 + 6 = \underline{\underline{2}}$$

Zad 3 Izračunajte površinu P lika omeđenog grafovima funkcija $f(x)=x^2-2x+2$ i $g(x)=x+2$.

Rj: Opet nemamo granice zadane pa idemo pronaći sjecišta funkcija f i g:

$$f(x)=g(x)$$
$$x^2-2x+2=x+2$$
$$x^2-2x+\cancel{2}-x-\cancel{2}=0$$
$$x^2-3x=0$$
$$x(x-3)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=3$$

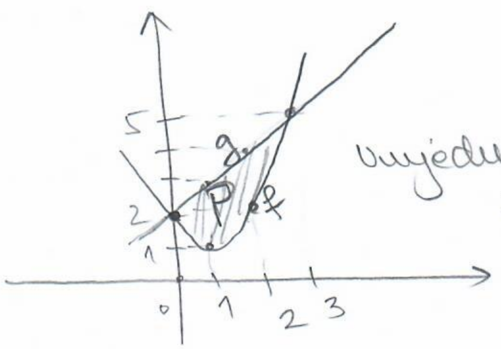
sjecišta pa ćemo skicirati funkcije na tom području

uzmemo i neke točke između da preciznije skiciramo

x	0	1	2	3
f(x)	2	1	2	5

x	0	1	2	3
g(x)	2	3	4	5

iste vrijednosti varijable x uzmemo i u tablici za g (iako bi nam tu bile dovoljne 2 točke jer je graf f-je g pravac)



vrijednosti od g su veće od vrijednosti funkcije f na području $[0,3]$

$$P=\int_0^3 (g(x)-f(x))\,dx$$
$$=\int_0^3 (x+2-(x^2-2x+2))\,dx=\int_0^3 (x+\cancel{2}-x^2+2x-\cancel{2})\,dx$$
$$=\int_0^3 (-x^2+3x)\,dx=-\int_0^3 x^2\,dx+3\cdot\int_0^3 x^1\,dx$$
$$=-\frac{x^3}{3}\Big|_0^3+3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^3=-\frac{\cancel{27}^{\,9}}{\cancel{3}}+\frac{27}{2}=\frac{27}{2}-9$$
$$=\frac{27-18}{2}=\frac{9}{2}$$

ako ne dobijemo pozitivnu površinu nešto smo pogriješili

nulu nisam ni uvrštavala jer je u njoj vrijednost nula

Zad DZ Odredite površinu lika omeđenog grafovima funkcija $f(x)=x^2-9$ i $g(x)=-5x^2+45$. ⑥

DIREKTNA INTEGRACIJA

* Koristimo Newton–Leibnizovu formulu (kada imamo određeni integral) te tablicu integrala koju smo naveli prošli put, s tim da, sjetite se, ako imamo granice (određeni integral) uvrstit ćemo ih prema N-L formuli, a ako nemamo granice (neodređeni integral) dodajemo na kraju konstantu c.

Zad Izračunajte sljedeće integrale:

a) $$\int_0^1 \underbrace{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{4}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1}\Big|_0^1 = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3}{7}\cdot 1^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{7}\cdot 0 = \frac{3}{7}$$

ovo ne znamo integrirati dok ne preuredimo $x^1\cdot\sqrt[3]{x} = x^1\cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{1+\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$

b) $$\int_0^1 3^x\cdot e^x\,dx = \int_0^1 (3\cdot e)^x\,dx = \frac{(3e)^x}{\ln(3e)}\Big|_0^1 = \frac{(3e)^1}{\ln(3e)} - \frac{(3e)^0}{\ln(3e)}$$

$a^b\cdot c^b = (a\cdot c)^b$

$$\boxed{\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c}$$, a naš $a=3e$

$$= \frac{3e}{\ln(3e)} - \frac{1}{\ln(3e)}$$

c) $$\int_0^1 10^x\cdot 5^x\,dx = \int_0^1 (10\cdot 5)^x\,dx = \int_0^1 50^x\,dx = \frac{50^x}{\ln(50)}\Big|_0^1$$

$$= \frac{50^1}{\ln(50)} - \frac{50^0}{\ln(50)} = \frac{50}{\ln(50)} - \frac{1}{\ln(50)}$$

d) $\int_0^{\pi} \left(\underbrace{\sqrt{x\sqrt{x}}} + \sin x \right) dx = \int_0^{\pi} \left(x^{\frac{3}{4}} + \sin x \right) dx$

$\sqrt{x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{3}{2}}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$

$= \int_0^{\pi} x^{\frac{3}{4}} \, dx + \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} \Big|_0^{\pi} - \cos x \Big|_0^{\pi}$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

$= \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} \Big|_0^{\pi} - \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{7} \cdot \pi^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{7} \cdot 0 - \underbrace{\cos \pi}_{-1} - \underbrace{(-\cos 0)}_{=1}$

$= \frac{4}{7} \cdot \pi^{\frac{7}{4}} + 1 + 1 = \frac{4}{7} \pi^{\frac{7}{4}} + 2$

Zad Izračunajte sljedeće neodređene integrale

a) $\int 5 \underbrace{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} \, dx = \int 5 \cdot x^{\frac{7}{8}} dx = 5 \cdot \int x^{\frac{7}{8}} dx$

$\left(\sqrt{x\sqrt{x \cdot x^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{x \cdot \sqrt{x^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{x \cdot \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^1 \cdot x^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{x^{\frac{7}{4}}} = \left(x^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{8}} \right)$

$= 5 \cdot \frac{x^{\frac{7}{8}+1}}{\frac{7}{8}+1} + c = 5 \cdot \frac{x^{\frac{15}{8}}}{\frac{15}{8}} + c = \cancel{5} \cdot \frac{8}{\cancel{15}_3} \cdot x^{\frac{15}{8}} + c = \frac{8}{3} x^{\frac{15}{8}} + c$

b) $\int \frac{x^4 + 2x - 1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^4 + 2x - 1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int \underbrace{x^{-\frac{1}{2}} (x^4 + 2x - 1)}_{\text{izmnožimo svaki sa } x^{-\frac{1}{2}}} dx$

ne postoji formula za integral kvocijenta pa i ovo moramo srediti

$= \int \left(x^{-\frac{1}{2}+4} + 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}+1} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$

$= \int \left(x^{\frac{7}{2}} + 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$

$$= \frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} + 2\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} + 2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c$$

c) $$\int \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{2x}\,dx =$$

sredimo, prvo izmnožimo u brojniku, a onda ćemo svaki podijeliti sa x, (ili pomnožiti s x^{-1} isto je)

$\frac{1}{2}$ je constanta pa može ići ispred integrala.
zašto $\frac{1}{2}$? Pa jer je 2 u nazivniku.

$$= \frac{1}{2}\int \frac{x^2-2x-x+2}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2-3x+2}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2}{x} - \frac{3x}{x} + \frac{2}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\int\left(x^1 - 3 + \frac{2}{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 3\cdot x + 2\cdot \ln|x|\right) + c$$

važno je dodati jednu konstantu na kraju

jer $\int \frac{2}{x}\,dx = 2\cdot\int\frac{1}{x}\,dx = 2\cdot\ln|x|$

d) $$\int \frac{x^1(x^3-\sqrt{x})}{x^5}\,dx = \int \frac{x^4 - x^{\frac{3}{2}}}{x^5}\,dx$$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

sredimo

$$= \int\left(\frac{x^4}{x^5} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^5}\right)dx = \int\left(\frac{1}{x} - x^{-\frac{7}{2}}\right)dx = \int\frac{1}{x}\,dx - \int x^{-\frac{7}{2}}\,dx$$

$x^{\frac{3}{2}-5} = x^{\frac{3}{2}-5} = x^{-\frac{7}{2}}$

$$= \ln|x| - \frac{x^{-\frac{5}{2}}}{-\frac{5}{2}} + c$$

$-\frac{7}{2}+1 = -\frac{5}{2}$

$$= \ln|x| + \frac{2}{5}x^{-\frac{5}{2}} + c$$

c) $\int (4\cdot 3^x + 2\cos x)\,dx = 4\cdot\int 3^x\,dx + 2\cdot\int \cos x\,dx$

$= 4\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + 2\cdot\sin x + c$

$\int \cos x\,dx = \sin x + c$

f) $\int \frac{(3+x)(x-2)}{x^2}\,dx = \int \frac{3x-6+x^2-2x}{x^2}\,dx$

$= \int \frac{x^2+x-6}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{6}{x^2}\right)dx$

$= \int \left(1 + \frac{1}{x} - 6x^{-2}\right)dx$

$= \int x^0\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx - 6\int x^{-2}\,dx$

$= x + \ln|x| - 6\frac{x^{-1}}{-1} + c = x + \ln|x| + \frac{6}{x} + c$

g) $\int (3^{-x}\cdot 2^x + 16)\,dx = \int \left(\frac{2^x}{3^x} + 16\right)dx$

$= \int \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x + 16\right)dx = \int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx + 16\int 1\,dx$

a

$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} + 16x + c$