LOKALNI EKSTREMI

Podsjetimo se tvrdnji s predavanja koje ćemo ovdje koristiti:

* Kažemo da je točka x_0 stacionarna točka za funkciju f, ako je f derivabilna u točki x_0 i ako je $f'(x_0)=0$.

* Neka je f dva puta derivabilna funkcija na nekoj okolini svoje stacionarne točke c.
  a) Ako je $f''(c)<0$, onda f ima STROGI LOKALNI MAKSIMUM u TOČKI $(c, f(c))$
  b) Ako je $f''(c)>0$, onda f ima STROGI LOKALNI MINIMUM u točki $(c, f(c))$.

<u>Zadatak</u> Odredite lokalne ekstreme sljedećih funkcija:

a) $f(x)=e^{-x^2}$.

<u>Rj</u> Kao što smo komentirali i kod određivanja intervala monotonosti, tako i ovdje najprije moramo odrediti domenu zadane funkcije, jer funkcija očito ne može imati lokalne ekstreme u točkama u kojima nije definirana.

$\boxed{D_f=\mathbb{R}}$

Odredimo najprije 1. derivaciju zadane funkcije.

$f'(x)= e^{-x^2}\cdot(-2x)$

Izjednačavanjem 1. derivacije s nulom dobivamo stacionarne točke:

$f'(x)=0$

$\underbrace{e^{-x^2}}_{>0}(-2x)=0$

(uvijek)

$-2x=0 \quad /:(-2)$

$\boxed{x=0}$ STACIONARNA TOČKA

Nađimo drugu derivaciju naše funkcije f tako što ćemo derivirati 1. derivaciju

$$f''(x)=\left(e^{-x^2}\cdot(-2x)\right)' = e^{-x^2}\cdot(-2x)\cdot(-2x)+e^{-x^2}\cdot(-2)$$

$$\underset{\text{SREDIMO}}{=} e^{-x^2}\left((-2x)\cdot(-2x)-2\right) = e^{-x^2}(4x^2-2)$$

$$=2e^{-x^2}(2x^2-1)$$

Uvrstimo stacionarnu točku

$$f''(0)=2\cdot\underbrace{e^0}_{=1}(2\cdot 0-1)=2\cdot(-1)=-2<0$$

* U točki $(0, f(0))$ funkcija ima strogi lokalni maksimum.

Napomena Da 2. derivaciju nismo sredili do kraja nego da smo uvrstili u opet bi lako zaključili $f''(0)=e^0\cdot 0\cdot 0+e^0\cdot(-2)=-2<0$.

b) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

Rj $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x}(-1) = e^{-x}(1-x)$$

(1. derivaciju obavezno sredimo kako bi nam bilo lakše proučiti stacionarne točke, a zatim i 2. derivaciju)

$$f'(x) = 0$$

$$\underbrace{e^{-x}}_{>0}(1-x) = 0$$

$$1 - x = 0$$

$\boxed{x = 1}$ STACIONARNA TOČKA

$$f''(x) = \left(e^{-x} \cdot (1-x)\right)' = e^{-x}(-1) \cdot (1-x) + e^{-x} \cdot (-1)$$

Uvrstimo stac. točku u 2. derivaciju:

$$f''(1) = \underbrace{e^{-1} \cdot (-1)\underbrace{(1-1)}_{=0}}_{=0} + e^{-1} \cdot (-1) = -e^{-1} < 0$$

* u točki $(1, f(1))$ funkcija f ima strogi lokalni MAKSIMUM.

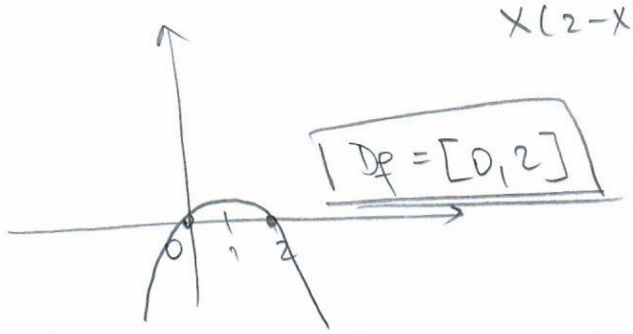
c) $f(x) = \sqrt{2x - x^2} = (2x - x^2)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad a = -1$ pa je parabola okrenuta prema dolje

Rj D_f: Mora vrijediti $2x - x^2 \geq 0$

nultočke: $2x - x^2 = 0$

$x(2-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$

$\boxed{D_f = [0, 2]}$



$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot (2 - 2x) = \frac{\cancel{2}(1-x)}{\cancel{2}\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$f'(x)=0$

$\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$ STAC. TOČKA

brojnik $=0$
(nazivnik ne smije biti nula)

(u redu je jer je ona element domene)

$$f''(x)=\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)'=\left(\frac{1-x}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)'=\frac{-1\cdot\sqrt{2x-x^2}-(1-x)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{(2-2x)}_{\cancel{2}(1-x)}}{\left((2x-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

formula za derivaciju kvocijenta

$$=\frac{-\sqrt{2x-x^2}-\frac{(1-x)\cdot(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2}$$

$$f''(1)=\frac{-\sqrt{2\cdot1-1}-0}{2\cdot1-1^2}=\frac{-\sqrt{1}}{1}=-1<0$$

$1-1=0$

* u točki $(1,f(1))$ funkcija ima strogi lokalni maksimum

d) $f(x)=x-\ln(1+x)$

Rj. D_f: Zbog uvjeta na domenu logaritamske funkcije mora biti $1+x>0$ tj. $\boxed{x>-1}$ tj. $x\in(-1,\infty)$

$\Rightarrow \boxed{D_f=(-1,\infty)}$

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{1+x-1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$$

uključena je u domenu

Stacionarna točka:

$f'(x)=0$

$\frac{x}{1+x}=0 \Rightarrow x=0$ STAC. TOČKA

brojnik $=0$

$$f''(x)=\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{1\cdot(1+x)-x\cdot1}{(1+x)^2}$$

Uvrstimo stac. točku: $f''(0)=\frac{1\cdot(1+0)-0\cdot1}{(1+0)^2}=1>0$

U točki $(0,f(0))$ funkcija f ima strogi lokalni MINIMUM

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

Rj: Domena: nazivnik ne smije biti nula tj.

$x+1 \neq 0$ tj. $x \neq -1$

$\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{matrix}}$$ STAC. TOČKE

$$f''(x) = \left(\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\right)' = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x) \cdot 2(x+1) \cdot 1}{(x+1)^4}$$

$$f''(0) = \frac{(2 \cdot 0 + 2)(0+1)^2 - \overbrace{(0^2 + 2 \cdot 0)}^{=0} \cdot 2 \cdot (0+1)}{(0+1)^4} = \frac{2}{1} > 0$$

* u točki $(0, f(0))$ funkcija ima strogi lokalni minimum

Sada uvrstimo drugu stacionarnu točku

$$f''(-2) = \frac{(2 \cdot (-2) + 2)(-2+1)^2 - \overbrace{((-2)^2 + 2 \cdot (-2))}^{4-4=0} \cdot 2 \cdot (-2+1)}{(-2+1)^4}$$

$$= \frac{-2 \cdot 1}{1} = -2 < 0$$

* u točki $(-2, f(-2))$ funkcija ima strogi lokalni maksimum.

Konveksnost, konkavnost i točke infleksije

* Neka je f dva puta derivabilna funkcija na intervalu (a,b).

a) Funkcija f je STROGO konveksna na (a,b) ako i samo ako je $f''(x)>0$ za svaki $x\in(a,b)$

b) Funkcija f je STROGO KONKAVNA na (a,b) ako i samo ako je $f''(x)<0$ za svaki $x\in(a,b)$.

* Točka infleksije je točka u kojoj funkcija prelazi iz konveksnog u konkavno područje ili obratno.

<u>zadatak</u> Odredite intervale konveksnosti, konkavnosti i točke infleksije sljedećih funkcija:

a) $f(x)=\dfrac{2}{x-3}=2(x-3)^{-1}$

<u>Rj</u> $\boxed{D_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}}$

$$f'(x)=2\cdot(-1)(x-3)^{-2}\cdot 1=-\frac{2}{(x-3)^2}=-2(x-3)^{-2}$$

$$f''(x)=\left(-2(x-3)^{-2}\right)'=-2\cdot(-2)(x-3)^{-3}\cdot 1=\frac{4}{(x-3)^3}$$

$$f''(x)>0 \Rightarrow \frac{\overset{>0}{4}}{(x-3)^3}>0 \Rightarrow (x-3)^3>0 \Rightarrow x-3>0 \Rightarrow \boxed{x>3}$$

* na intervalu $(3,+\infty)$ je funkcija f strogo konveksna

$f''(x) < 0 \Rightarrow \dfrac{\overset{>0}{4}}{(x-3)^3} < 0 \Rightarrow (x-3)^3 < 0$

$\Rightarrow x-3 < 0 \Rightarrow \boxed{x < 3}$

* na intervalu $(-\infty, 3)$ je funkcija strogo konkavna.

Zaključujemo da u točki $x_0 = 3$ funkcija prelazi iz konkavnog u konveksno područje, ali to nije točka infleksije jer nije u domeni, dakle nema točaka infleksije.

b) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$

Rj. $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$

$f''(x) = 6x - 10$

$f''(x) > 0 \Rightarrow 6x - 10 > 0$

$6x > 10 \quad / : 6$

$\boxed{x > \frac{5}{3}}$

* na intervalu $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$ je funkcija f strogo konveksna

$f''(x) < 0 \Rightarrow 6x - 10 < 0$

$6x < 10 \quad / : 6$

$\boxed{x < \frac{5}{3}}$

* na intervalu $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$ je funkcija strogo konkavna.

Točka infleksije je $\left(\frac{5}{3}, f\left(\frac{5}{3}\right)\right)$ jer u njoj funkcija prelazi iz konkavnog u konveksno područje (a ta točka je u domeni).

c) $f(x) = \dfrac{10}{x+6}$ → Riješiti za DZ