Matematika 2
vježbe, 27.5.2020.

* Sustav linearnih algebarskih jednadžbi *

* Gaussova metoda (metoda eliminacije) za rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi sastoji se u tome da se polazni sustav pomoću ELEMENTARNIH OPERACIJA NAD REDCIMA svede na ekvivalentni sustav u "GORNJE TROKUTASTOM" OBLIKU koji se onda rješava UNAZAD (odozdo prema gore)

Kao što smo npr. vidjeli kod traženja inverza matrice, gdje smo također koristili elementarne operacije nad redcima to su

① permutiranje redaka $\circlearrowleft$

② množenje retka skalarom $\neq 0$ npr. $/\cdot 4$ ~

③ dodavanje retku nekog drugog retka prethodno pomnoženog proizvoljnim skalarom $/\cdot 4 \rfloor +$

<u>zad</u> Gaussovom metodom eliminacije nađite rješenje sljedećeg sustava:

a) $$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=3\\ -2x_1 \qquad\quad +x_3&=-2\\ x_1+2x_2-x_3&=3 \end{aligned}$$

sjetite se → nije bitno kojim redom su jednadžbe poredane → stavljamo ih u retke → zato imamo elementarne operacije nad retcima

≠ stupce NE SMIJEMO DIRATI (promjena koeficijenata koji stoje uz x_1, x_2, x_3 ili vectora desne strane sustava dovela bi i do promjene rješenja sustava)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3\\ -2 & 0 & 1 & -2\\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] /\cdot(-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3\\ -2 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] /\cdot 2 \sim \begin{array}{cccc|} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3\\ 0 & 4 & 7 & 4\\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c}(3)\\(2)\\(1)\end{array}$$

"Proširena matrica sustava" → trebamo svesti na gornje trokutasti oblik (da s lijeve strane, u matrici sustava, <u>ispod</u> glavne dijagonale imamo sve nule

gornje trokutasta matrica

Sada rješavamo u nazad

iz (1) $0\cdot x_1+0\cdot x_2-4\cdot x_3=0$

$-4x_3=0 \;/:(-4)$

$x_3=0$

iz (2) $0\cdot x_1+4\cdot x_2+7\cdot x_3=4$

$4\cdot x_2+0=4 \;/:4$

$x_2=1$

iz (1) $x_1+2x_2+3x_3=3$

$x_1+2\cdot 1+3\cdot 0=3$

$x_1 + 2 = 3$

$x_1 = 1$

Rj. je $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$

Provjera (npr. uvrstimo u 1. jednadžbu sustava)

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$

$$1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 3$$

$$3 = 3 \checkmark$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Rj.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & -1 & 3 \end{array}\right] /\cdot(-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} /\cdot 2 \\ /\cdot(-3) \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -8 & 10 & 2 \\ -6 & 9 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -6 & 2 \end{array}\right] /\cdot 1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & -1 & -6 & 2 \end{array}\right] /\cdot 1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{matrix} (3) \\ (2) \\ (1) \end{matrix}$$

Rješavamo o nazad

Iz (1) $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = -2$

$$x_3 = -2$$

Iz (2) $0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 = -4$

$$x_2 + 7 \cdot (-2) = -4$$

$$x_2 = -4 + 14$$

$$x_2 = 10$$

Iz (3) $6 \cdot x_1 - 8x_2 + 10x_3 = 2$

$$6x_1 - 8 \cdot 10 + 10 \cdot (-2) = 2$$

$$6x_1 = 2 + 100 = 102 /: 6$$

$$x_1 = \frac{102}{6} = \underline{\underline{17}}$$

Rj. $(x_1, x_2, x_3) = (17, 10, -2)$

Provjera u 3. jedn.

$$3 \cdot 17 - 5 \cdot 10 - (-2) = 3$$

$$3 = 3 \checkmark$$

c) $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$

$-x_1 - x_2 + x_3 = 2$

$x_1 + 2x_2 \quad = 3$

Rj $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] /\cdot 1 \; + \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] /(-1) \; +$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} (3) \\ (2) \\ (1) \end{array}$

Rješavamo u nazad

iz (1) $3x_3 = 2 \; / :3$

$x_3 = \frac{2}{3}$

iz (2) $x_2 - 2x_3 = 3$

$x_2 - 2 \cdot \frac{2}{3} = 3$

$x_2 = 3 + \frac{4}{3}$

$x_2 = \frac{13}{3}$

iz (3) $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$

$x_1 + 2 \cdot \frac{13}{3} - 3 \cdot \frac{2}{3} = 1$

$x_1 + \frac{26-6}{3} = 1$

$x_1 = 1 - \frac{20}{3} = \frac{-17}{3}$

Rj $(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{17}{3}, \frac{13}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Provjera upr. u 2. jedn.

$-\left(-\frac{17}{3}\right) - \frac{13}{3} + \frac{2}{3} = 2$

$\frac{6}{3} = 2$

$2 = 2$ ✓

d)
$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 2$$

Rj.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 2 \end{array}\right] /(-2) + \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -1 \\ 2 & 7 & 3 & 2 \end{array}\right] /(-2) +$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right] + /(-5) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 9 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} (3) \\ (2) \\ (1) \end{array}$$

Rješavamo u nazad:

Iz (1) $10x_3 = 9 \,/ :10$

$$x_3 = \frac{9}{10}$$

Iz (2) $-x_2 - 3x_3 = -2$

$$-x_2 - 3\cdot\frac{9}{10} = -2$$

$$-x_2 = -2 + \frac{27}{10} = \frac{7}{10} \,/ \cdot(-1)$$

$$x_2 = -\frac{7}{10}$$

Iz (3) $x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2$

$$x_1 + 4\left(-\frac{7}{10}\right) + 3\cdot\frac{9}{10} = 2$$

$$x_1 = 2 + \frac{1}{10} = \frac{21}{10}$$

Rj. $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{21}{10}, \frac{-7}{10}, \frac{9}{10}\right)$

Provjera u 3. jedn. upr.

$$2\cdot\frac{21}{10} + 7\cdot\left(\frac{-7}{10}\right) + 3\cdot\frac{9}{10} = 2$$

$$\frac{42 - 49 + 27}{10} = 2$$

$$\frac{20}{10} = 2$$

$$2 = 2 \checkmark$$

e) $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -4$

$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -2$

$x_2 - 3x_3 = 7$

Rj $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -4 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} /(-2) \\ + \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ /:6 \\ \\ \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ /\cdot 1 \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} (3) \\ (2) \\ (1) \end{array}$

Rješavamo u nazad

iz (1) $-4x_3 = 8 \quad /:(-4)$

$x_3 = -2$

iz (2) $-x_2 - x_3 = 1$

$-x_2 + 2 = 1$

$-x_2 = -1 \quad /:(-1)$

$x_2 = 1$

iz (1) $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -4$

$x_1 + 2\cdot 1 + 5\cdot(-2) = -4$

$x_1 - 8 = -4$

$x_1 = 4$

Rj $(x_1, x_2, x_3) = (4, 1, -2)$

Provjera upr. u jedn. 1

$4 + 2\cdot 1 + 5\cdot(-2) = -4$

$-4 = -4$ ✓

Determinante

Determinanta $A \mapsto \det A$ je funkcija definirana na skupu svih kvadratnih matrica, a poprima vrijednosti iz skupa skalara. Osim oznake $\det A$ za determinantu kvadratne matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

koristi se i oznaka

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Definicija (DETERMINANTA PRVOG REDA)

Determinanta matrice $A = [a]$ je broj a.

Zad Izračunajte sljedeće determinante matrica prvog reda:

a) $A = [-43]$

Rj $\det A = -43$

b) $B = [125]$

Rj $\det B = 125$

<u>Definicija</u> (DETERMINANTA DRUGOG REDA)

Determinantom matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ zovemo broj

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

<u>zad</u> Izračunajte sljedeće determinante matrica trećeg reda:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 14 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$

Rj $\det A = 1 \cdot 10 - (-3) \cdot 14 = 10 + 42 = \underline{\underline{52}}$

b) $B = \begin{bmatrix} 9 & -18 \\ 5 & 18 \end{bmatrix}$

Rj $\det B = 9 \cdot 18 - 5 \cdot (-18) = 162 + 90 = \underline{\underline{252}}$

c) $C = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

Rj $\det C = -5 \cdot (-4) - (-1) \cdot 2 = 20 + 2 = \underline{\underline{22}}$