A

1. [**15 bod.**] Neka je (X, d) metrički prostor. Dokažite da je skup $U \subseteq X$ otvoren onda i samo onda ako se on može prikazati kao unija neke familije otvorenih kugala.

2. [**20 bod.**] Neka je X realan vektorski prostor s normom $\|\cdot\|$ koja zadovoljava jednakost paralelograma
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$
Dokažite da postoji skalarni produkt na X koji inducira normu $\|\cdot\|$, tj. takav da vrijedi
$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

3. [**15 bod.**] Neka je X skup svih $m \times n$ realnih matrica. Dokažite da je formulom
$$\varrho(A, B) = \max_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}|$$
zadana metrika na X.

4. [**10 bod.**] Ilustrirajte primjerom da je općenito $\operatorname{Int}(A \cup B) \neq \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$.

5. [**20 bod.**] Neka je X topološki prostor, a $A \subseteq X$ proizvoljan podskup.
Dokažite da je $\partial A = \operatorname{Cl} A \backslash \operatorname{Int} A$.

6. [**20 bod.**] Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor, $A \subseteq X$ i $x_0 \in \operatorname{Cl} A$. Dokažite da je $A \cap O \neq \emptyset$ za svaku okolinu O točke x_0.

B

1. [**15 bod.**] Neka je $\mathcal{U}$ familija svih otvorenih skupova u metričkom prostoru (X, d). Dokažite da presjek konačno mnogo članova iz $\mathcal{U}$ pripada familiji $\mathcal{U}$.

2. [**20 bod.**] Dokažite da u svakom unitarnom vektorskom prostoru $(X, +, \cdot)$ vrijedi Schwarzova nejednakost:
$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \qquad x, y \in X,$$
pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako su x i y kolinearni vektori.

3. [**15 bod.**] Dokažite da je formulom
$$d(x, y) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|$$
zadana metrika na $\mathbb{R}^n$.

4. [**10 bod.**] Ilustrirajte primjerom da je općenito $\operatorname{Cl}(A \cap B) \neq \operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Cl} B$.

5. [**20 bod.**] Neka je X topološki prostor, a $A \subseteq X$ proizvoljan podskup.
Dokažite da je $\operatorname{Cl} A = A \cup \partial A$.

6. [**20 bod.**] Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Dokažite sljedeću tvrdnju: Ako je $A \cap O \neq \emptyset$ za svaku okolinu O točke x_0, onda je $x_0 \in \operatorname{Cl} A$.