A

1. **[20 bod.]** Dokazati da svaki niz (x_k) realnih brojeva ima monoton podniz.

2. **[20 bod.]** Neka su (x_k) i (y_k) nizovi u $\mathbb{R}^n$ i neka je niz (z_k) definiran na sljedeći način:

$$z_{2k} = x_k, \qquad z_{2k+1} = y_k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

   Dokažite da je niz (z_k) konvergentan onda i samo onda ako su konvergentni nizovi (x_k) i (y_k) i ako pri tome vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} y_k$.

3. **[20 bod.]** Neka su $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ ekvivalentne norme na realnom vektorskom prostoru $(X, +, \cdot)$. Dokažite da je prostor $(X, \|\cdot\|)$ potpun onda i samo onda ako je prostor $(X, \|\cdot\|')$ potpun.

4. **[20 bod.]** Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ kompaktni skupovi. Dokažite da je kompaktan i skup $C := A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

5. **[20 bod.]** Neka je K kompaktan skup iz metričkog prostora (X, d). Dokažite da je K potpuno omeđen.

B

1. **[20 bod.]** Dokazati da svaki omeđen niz u $\mathbb{R}^n$ ima konvergentan podniz.

2. **[20 bod.]** Neka su (x_k) i (y_k) nizovi u metričkom prostoru (X, d) i neka (x_k) konvergira prema x_0. Dokažite da $d(x_k, y_k) \to 0$ onda i samo onda ako (y_k) konvergira prema x_0.

3. **[20 bod.]** Neka je (X, d) potpun metrički prostor. Pretpostavimo da je (A_n) niz zatvorenih podskupova od X sa sljedeća dva svojstva:

   (a) niz (A_n) je silazan

   (b) $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{diam} A_k = 0$.

   Dokažite da je tada $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$.

4. **[20 bod.]** Dokažite da je skup $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 = 1\}$ kompaktan.

5. **[20 bod.]** Neka je K kompaktan skup iz metričkog prostora (X, d), a $F \subset K$ zatvoren. Dokažite da je F kompaktan.