3. kolokvij iz *Realne analize*

Grupa A

1. [**20 bod.**] Dokazati da su koordinatne projekcije $p_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, definirane formulom
$$p_i(x_1, \ldots, x_k) = x_i, \quad i = 1, \ldots, k$$
neprekidne na $\mathbb{R}^k$.

2. [**20 bod.**] Neka su $f, g : X \to Y$ neprekidna preslikavanja topološkog prostora X u Hausdorffov prostor Y. Dokazati sljedeće tvrdnje:
   (a) Skup $A := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ je zatvoren u X.
   (b) Ako je
   $$f(x) = g(x), \quad \forall x \in D,$$
   gdje je $D \subseteq X$ neki gust skup na X, onda je $f = g$.

3. [**20 bod.**] Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor. Pokazati da je funkcija $f = (f_1, \ldots, f_k) : X \to \mathbb{R}^k$ neprekidna u točki $x_0 \in X$ onda i samo onda ako su sva preslikavanja $f_i : X \to \mathbb{R}^k$, $i = 1, \ldots, k$, neprekidna u točki x_0.

4. [**20 bod.**] Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana formulom
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^6}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Ispitajte da li je funkcija f neprekidna, te da li su restrikcije funkcije f na bilo koji pravac neprekidne funkcije.

5. [**20 bod.**] Pokažite da $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ako je } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ gdje su } p \neq 0 \text{ i } q \text{ relativno prosti brojevi} \\ 1, & \text{ako je } x = 0 \\ 0, & \text{ako je } x \text{ iracionalan broj} \end{cases}$$
ima prekid u svakoj racionalnoj točki.

3. kolokvij iz *Realne analize*

Grupa B

1. [**20 bod.**] Neka je $(X, +, \cdot)$ realan vektorski prostor. Pokažite da je norma $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje.

2. [**20 bod.**] Neka su $f, g : X \to \mathbb{R}$ neprekidna preslikavanja topološkog prostora X u $\mathbb{R}$. Dokazati sljedeće tvrdnje:

   (a) Skup $A := \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ je zatvoren u X.

   (b) Skup $B := \{x \in X : f(x) < g(x)\}$ je otvoren u X.

3. [**20 bod.**] Dokazati sljedeću tvrdnju:
   Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$, a $f : D \to \mathbb{R}^m$ funkcija. Ako je f neprekidna u točki $x_0 \in D$, onda je f ograničena na nekoj okolini točke x_0, tj. onda postoje realni brojevi $M, r > 0$ takvi da za svaku točku $x \in K(x_0, r) \cap D$ vrijedi $||f(x)|| < M$.

4. [**20 bod.**] Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Ispitajte da li je funkcija f neprekidna, te da li su restrikcije funkcije f na bilo koji pravac neprekidne funkcije.

5. [**20 bod.**] Neka je $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki $(0,0)$, te neka je $g(0,0) = 0$. Dokažite da je tada i funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y)\dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{za } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{za } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   neprekidna u $(0,0)$.