2. kolokvij iz Realne analize
05.05.2011.
Grupa A

1. [**20 bod.**] Neka je $s_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$ k–ta parcijalna suma harmonijskog reda $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$. Pokažite da (s_k) nije Cauchyjev niz, što će značiti da harmonijski red divergira.
2. [**20 bod.**] Neka je K kompaktan skup iz metričkog prostora (X, d). Dokažite da je K potpuno omeđen.
3. [**20 bod.**] Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana formulom:
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Pokažite da je funkcija f neprekidna u točki $(0,0)$.
4. [**20 bod.**] Neka je $(X, +, \cdot)$ realan vektorski prostor. Pokažite da je norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje.
5. [**20 bod.**] Iskazati i dokazati lemu o lokalnoj omeđenosti neprekidne funkcije.

2. kolokvij iz Realne analize
05.05.2011.
Grupa B

1. [**20 bod.**] Neka je (x_k) niz u metričkom prostoru (X, d) zadan s općim članom $x_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}$. Pokažite da je taj niz Cauchyjev.
2. [**20 bod.**] Neka je K kompaktan skup iz metričkog prostora (X, d). Dokažite da svaki otvoreni pokrivač od K ima konačan potpokrivač.
3. [**20 bod.**] Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana formulom:
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Pokažite da je funkcija f neprekidna u točki $(0,0)$.
4. [**20 bod.**] Neka su X i Y topološki prostori, a $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Dokažite da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup za svaki otvoren skup V iz Y.
5. [**20 bod.**] Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : D \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija u točki $x_0 \in D$ takva da je $f(x_0) > 0$. Pokažite da postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je
$$f(x) > \frac{1}{2} f(x_0), \qquad \forall x \in K(x_0, \delta) \cap D.$$