3. kolokvij iz Realne analize
09.06.2011.
Grupa A

1. [**15 bod.**] Zadan je niz funkcija (f_k), tako da je $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $f_k := \dfrac{x}{1+kx^2}$, $k \in \mathbb{N}$. Pronađite graničnu funkciju $f = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$, te pokažite da dani niz funkcija (f_k) uniformno konvergira prema funkciji f.
2. [**10 bod.**] Dokazati da je interval (a, b) povezan skup.
3. [**20 bod.**] Neka su X i Y topološki prostori, $K \subseteq X$ kompakt i $f : K \to Y$ neprekidno preslikavanje. Pokazati da je $f(K)$ kompaktan skup.
4. [**15 bod.**] Pokazati da linearni operator $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ima Lipschitzovo svojstvo.
5. [**20 bod.**] Neka je $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana formulom:
$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^2}{x^2+|y|}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
Pokažite da funkcija h ima limes u točki $(0, 0)$.
6. [**20 bod.**] Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$, x_0 točka gomilanja skupa D. Pretpostavimo da funkcije $f, g : D \to \mathbb{R}$ imaju limes u točki x_0. Pokažite da tada i funkcija $f + g : D \to \mathbb{R}$ ima limes u točki x_0.

3. kolokvij iz Realne analize
09.06.2011.
Grupa B

1. [**20 bod.**] Neka je X topološki, a Y metrički prostor. Pretpostavimo da niz (f_k) neprekidnih funkcija $f_k : X \to Y$ uniformno konvergira prema funkciji $f : X \to Y$. Pokažite da je tada f neprekidna funkcija.
2. [**10 bod.**] Dokazati da je skup $(a, b]$ povezan.
3. [**20 bod.**] Neka je X topološki prostori, $K \subseteq X$ kompakt i $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Pokazati da postoje točke $x_1, x_2 \in K$, takve da je
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \qquad \forall x \in K.$$
4. [**10 bod.**] Neka je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija, takva da joj je s omeđena prva derivacija. Pokažite da je f Lipschitzova funkcija.
5. [**20 bod.**] Neka je $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana formulom:
$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
Pokažite da funkcija h ima limes u točki $(0, 0)$.
6. [**20 bod.**] Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$, x_0 točka gomilanja skupa D. Pretpostavimo da funkcije $f, g : D \to \mathbb{R}$ imaju limes u točki x_0. Pokažite da tada i funkcija $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ ima limes u točki x_0.