1. [**20 bod.**] Pokažite da je formulom

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{|x_1 - x_2|} + \sqrt{|y_1 - y_2|}$$

zadana metrika na $\mathbb{R}^2$.

2. [**20 bod.**] Neka su (x_k) i (y_k) nizovi u $\mathbb{R}^n$ i neka je niz (z_k) definiran na sljedeći način:

$$z_{2k} = x_k, \qquad z_{2k-1} = y_k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Pokažite da je niz (z_k) konvergentan onda i samo onda ako su konvergentni nizovi (x_k) i (y_k) i ako pri tome vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} y_k$.

3. [**20 bod.**] Dokažite da je skup $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 = 1\}$ kompaktan.

4. [**20 bod.**] Pokažite da neprekidna funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ne može biti injekcija.

5. [**20 bod.**] Odredite $a, b \in \mathbb{R}$ tako da funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y)\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)^2, & y \neq 0 \\ ax + b, & y = 0 \end{cases}$$

bude neprekidna, a zatim u svim točkama za koje je $y = 0$ odredite parcijalne derivacije funkcije. Ispitajte i njenu diferencijabilnost.

U Osijeku, 06.02.2008.