Pismeni ispit iz kolegija
Realna analiza
11.06.2008.

1. [**20 bod.**] Dokažite da je s

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} - \frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}} \right|, x, y \in \mathbb{R}.$$

   zadana metrika na $\mathbb{R}$.

2. [**20 bod.**] Neka su (x_k) i (y_k) nizovi u metričkom prostoru (X, d) i neka (x_k) konvergira prema x_0. Pokažite da (y_k) konvergira prema x_0 onda i samo onda ako $d(x_k, y_k) \to 0$.

3. [**20 bod.**] Neka je X topološki, a Y metrički prostor. Neka je (f_k), $f_k : X \to Y$ niz neprekidnih funkcija, koji uniformno konvergira prema funkciji $f : X \to Y$. Dokažite da je f neprekidna funkcija.

4. [**20 bod.**] Pokažite da neprekidna funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ne može biti injekcija.

5. [**20 bod.**] Neka je $B \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična matrica te neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana formulom $f(x) := (Bx|x)$. Dokažite da je f diferencijabilna na $\mathbb{R}^n$ te da vrijedi $df(x_0)(x) = 2(Bx_0|x), \forall x_0, x \in \mathbb{R}^n$.

Dragana Jankov