Pismeni ispit iz kolegija
Realna analiza
26.06.2008.

1. [**20 bod.**] Dokažite da u svakom unitarnom vektorskom prostoru $(X, +, \cdot)$ vrijedi Schwarzova nejednakost:
$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \qquad x, y \in X,$$
pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako su x i y kolinearni vektori.

2. [**20 bod.**] Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ kompaktni skupovi. Dokažite da je kompaktan i skup $C := A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

3. [**20 bod.**] Pokažite da $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ako je } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ gdje su } p \neq 0 \text{ i } q \text{ relativno prosti brojevi} \\ 1, & \text{ako je } x = 0 \\ 0, & \text{ako je } x \text{ iracionalan broj} \end{cases}$$
ima prekid u svakoj racionalnoj točki, te da je neprekidna u svakoj iracionalnoj točki.

4. [**20 bod.**] Pokažite da neprekidna funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ne može biti injekcija.

5. [**20 bod.**] Ispitajte diferencijabilnost funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Dragana Jankov