Pismeni ispit iz kolegija
Realna analiza
17.06.2009.

1. [**20 bod.**] Na skupu $\mathbb{R}$ definiramo $d(\alpha,\beta) = \mathrm{arctg}|\alpha-\beta|$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Pokažite da je s d zadana metrika na $\mathbb{R}$.

2. Neka su (x_k) i (y_k) nizovi u $\mathbb{R}^n$.
   (a) [**5 bod.**] Ako niz $(x_k + y_k)$ konvergira, da li tada konvergiraju i nizovi (x_k) i (y_k)?
   (b) [**15 bod.**] Ako je (z_k) definiran na sljedeći način:
   $$z_{2k} = x_k, \qquad z_{2k+1} = y_k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$
   Dokažite da je niz (z_k) konvergentan onda i samo onda ako su konvergentni nizovi (x_k) i (y_k) i ako pri tome vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} y_k$.

3. Dokažite ili opovrgnite:
   (a) [**10 bod.**] Ako je $F \subseteq X$ kompaktan, X Hausdorffov i $x \notin F$, onda se x i F mogu separirati disjunktnim, otvorenim skupovima.
   (b) [**10 bod.**] Kompaktan podskup Hausdorffovog prostora je zatvoren.

4. [**20 bod.**] Pokažite da neprekidna funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ne može biti injekcija.

5. (a) [**10 bod.**] Neka je X topološki, a Y metrički prostor. Neka je (f_k), $f_k : X \to Y$ niz neprekidnih funkcija, koji uniformno konvergira prema funkciji $f : X \to Y$. Dokažite da je f neprekidna funkcija.
   (b) [**10 bod.**] Pokažite da niz funkcija $f_k(x) = \dfrac{x}{1+kx^2}$, $k \in \mathbb{R}$, $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uniformno konvergira ka f, gdje je $f = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$.

Dragana Jankov