Pismeni ispit iz kolegija
Realna analiza
01.07.2009.

1. [**20 bod.**] Dokažite da je $(\mathbb{R}^2, d)$ metrički prostor, ako je

$$d(T,S) = \begin{cases} \|T\| + \|S\|, & \text{ako je } \|T\| \neq \|S\| \\ d_2(T,S), & \text{ako je } \|T\| = \|S\| \end{cases},$$

gdje $\|\cdot\|$ označava Euklidsku normu, a d_2 Euklidsku metriku na $\mathbb{R}^2$.

2. (a) [**5 bod.**] Dokažite da su norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_\infty$ ekvivalentne na $\mathbb{R}^n$.

   (b) [**15 bod.**] Neka su $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ ekvivalentne norme na realnom vektorskom prostoru $(X, +, \cdot)$. Dokažite da je prostor $(X, \|\cdot\|)$ potpun onda i samo onda ako je prostor $(X, \|\cdot\|')$ potpun.

3. Neka su A i B kompaktni podskupovi metričkog prostora X. Dokažite ili opovrgnite:

   (a) [**10 bod.**] Skup $A \cup B$ je kompaktan.

   (b) [**10 bod.**] Skup $A \cap B$ je kompaktan.

4. [**20 bod.**] Pokažite da je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ako je } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ gdje su } p \neq 0 \text{ i } q \text{ relativno prosti brojevi} \\ 1, & \text{ako je } x = 0 \\ 0, & \text{ako je } x \text{ iracionalan broj} \end{cases}$$

neprekidna u svakoj iracionalnoj točki, te da ima prekid u svakoj racionalnoj točki.

5. [**20 bod.**] Neka su $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirane formulama

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^4}{x^2 + y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^2}{x^2 + |y|}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Ispitajte imaju li navedene funkcije limes u točki $(0,0)$.

Dragana Jankov