Pismeni ispit iz kolegija
Realna analiza
21.09.2009.

1. (a) [**10 bod.**] Neka je X realan vektorski prostor s mormom $\|\cdot\|$ koja zadovoljava jednakost paralelograma. Dokažite da postoji skalarni produkt na X koji inducira normu $\|\cdot\|$, tj. takav da vrijedi $\|\cdot\| = \sqrt{(x|x)}$.
   (b) [**10 bod.**] Dokažite ili opovrgnite: Jednakost paralelograma vrijedi za norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_\infty$.
2. (a) [**5 bod.**] Dokažite da su $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_\infty$ ekvivalentne norme na $\mathbb{R}^n$.
   (b) [**15 bod.**] Neka su $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ ekvivalentne norme na realnom vektorskom prostoru $(X, +, \cdot)$. Dokažite da je prostor $(X, \|\cdot\|)$ potpun onda i samo onda ako je prostor $(X, \|\cdot\|')$ potpun.
3. (a) [**15 bod.**] Dokažite da je skup $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 = 1\}$ kompaktan.
   (b) [**5 bod.**] Ispitajte da li je Cantorov trijadski skup kompaktan.
4. [**20 bod.**] Pokažite da je $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ako je } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ gdje su } p \neq 0 \text{ i } q \text{ relativno prosti brojevi} \\ 1, & \text{ako je } x = 0 \\ 0, & \text{ako je } x \text{ iracionalan broj} \end{cases}$$

   neprekidna u svakoj iracionalnoj točki, te da ima prekid u svakoj racionalnoj točki.
5. (a) [**10 bod.**] Neka je X topološki, a Y metrički prostor. Neka je (f_k), $f_k : X \to Y$ niz neprekidnih funkcija, koji uniformno konvergira prema funkciji $f : X \to Y$. Dokažite da je f neprekidna funkcija.
   (b) [**10 bod.**] Pokažite da niz funkcija $f_k(x) = \dfrac{x}{1 + kx^2}$, $k \in \mathbb{R}$, $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uniformno konvergira ka f, gdje je $f = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$.

Dragana Jankov