Pismeni ispit iz kolegija
Realna analiza
04.07.2011.

1. [**15 bod.**] Dokažite da je $(\mathbb{R}^2, d)$ metrički prostor, ako je

$$d(A,B) = \begin{cases} \|A\| + \|B\|, & za \quad \|A\| \neq \|B\| \\ d_2(A,B), & za \quad \|A\| = \|B\|, \end{cases}$$

gdje je s $\|\cdot\|$ označena Euklidska norma, a s d_2 Euklidska metrika na $\mathbb{R}^2$.

2. [**15 bod.**] Pretpostavimo da skup $A \subseteq \mathbb{R}$ nije kompaktan. Dokažite ili opovrgnite: Postoji neomeđena, neprekidna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$.

3. (a) [**10 bod.**] Ispitajte da li je *biti Cauchyjev niz* topološko svojstvo.
   (b) [**10 bod.**] Ispitajte da li uniformno neprekidno preslikavanje *čuva* Cauchyjeve nizove.

4. (a) [**10 bod.**] Neka je $X = \{1,2,3,4\}$ i neka su $\mathcal{U} = \mathcal{P}(X)$ i $\mathcal{V} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ topologije na X. Da li je preslikavanje dano s $f : (X, \mathcal{U}) \to (X, \mathcal{V})$, $f(x) = x$ homeomorfizam?
   (b) [**5 bod.**] Ispitajte da li su $[0,2]$ i $[0,1] \cup [2,3]$ homeomorfni skupovi.

5. [**15 bod.**] Neka je funkcija f definirana u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$, te neka za neki $a \in \mathbb{R}_+$ i za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$

Dokažite da je f periodična funkcija s periodom $4a$, te koristeći se tom tvrdnjom ispitajte da li je dana funkcija neprekidna na $\mathbb{R}$.

6. [**10 bod.**] Neka je X metrički prostor, $A \subseteq X$, te $\rho_A : X \to \mathbb{R}$ funkcija koja točki $x \in X$ pridružuje njenu udaljenost do skupa A, tj.

$$\rho_A(x) = \inf\{d(x,a) : \, a \in A\}.$$

Pokažite da je funkcija ρ_A Lipschitzova s konstantom $\lambda = 1$.

7. [**10 bod.**] Ispitajte da li funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definirana s

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}, & za \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & za \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ima limes u točki $(0,0)$.

Dragana Jankov