Jedna metoda procjene parametara u smislu minimizacije sume L_p ortogonalnih udaljenosti

Ivana Kuzmanović, e-mail: ikuzmano@mathos.hr
Rudolf Scitovski, e-mail: scitowsk@mathos.hr
Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Gajev Trg 6, HR-31 000 Osijek, Croatia

Sažetak. Zadane su točke $T_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, m$, u ravnini. Treba procijeniti optimalne parametre b, c općenito nelinearne funkcije–modela $x \mapsto f(x; b, c)$, tako da suma ortogonalnih $L_p(p \geq 1)$ udaljenosti točaka T_i, $i = 1, \ldots, m$, do grafa funkcije f bude minimalna, tj. treba minimizirati funkciju

$$F_p(b,c) = \sum_{i=1}^{m} d_p^p(T(x_\pi, f(x_\pi; b, c)), T_i),$$

gdje je

$$x_\pi = \arg\min_x d_p^p(T(x, f(x; b, c)), T_i).$$

Problem će se posebno razmatrati za linearnu, eksponencijalnu i logističku funkciju za najvažnije slučajeve: $p = 1, 2, \infty$. Ako (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, shvatimo kao neke eksperimentalne ili empirijske podatke, onda se ovdje radi o procjeni parametara općenito nelinearne regresije u smislu L_p ortogonalnih odstupanja, što ima široku primjenu u različitim primijenjenim istraživanjima.

Budući da je ovdje riječ o problemu nediferencijabilne minimizacije nelinearne funkcije F, problem ćemo rješavati primjenom Nelder-Meadove Downhill Simplex metode, a za izračunavanje L_p udaljenosti točaka T_i do grafa funcije f koristit ćemo metodu jednodimenzionalne minimizacije, što će biti razrađeno u radu I.Soldo i K.Sabo, također prijavljenom za ovu konferenciju. Svi programi i potprogrami bit će izrađeni primjenom programskog sustava *Mathematica*. Pri tome koristit će se grafičke mogućnosti i animacija iterativnog procesa. Software koji će za ovu priliku biti izrađen moći će se koristiti za konstrukciju ilustrativnih primjera u nastavi, ali također i za praktične aplikacije u raznim područjima primjena, kao primjerice u poljoprivredi, medicini, ekonomiji, biologiji itd.

Ključne riječi: procjena parametara, ortogonalna regresija

Abstract. (A method of parameter estimation in L_p orthogonal distance regession) Points $T_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, m$, are given in the plane. Optimal parameters b, c of a nonlinear function-model $x \mapsto f(x; b, c)$ should be estimated, such that the sum of orthogonal distances $L_p(p \geq 1)$ from points T_i, $i = 1, \ldots, m$, to the graph of function f is minimal, i.e. function

$$F_p(b,c) = \sum_{i=1}^{m} d_p^p(T(x_\pi, f(x_\pi; b, c)), T_i),$$

should be minimized, where

$$x_\pi = \arg\min_x d_p^p(T(x, f(x; b, c)), T_i).$$

The problem will be considered for the linear, the exponential and the logistic function, respectively, for the most important cases: $p = 1, 2, \infty$. If (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, are considered to be some experimental or empirical data, then we deal here with the estimation of parameters of a generally nonlinear function in the sense of L_p orthogonal deviations, which is widely used in applied research.

Since the problem in question is the problem of nondifferentiable minimization of nonlinear function F, it will be solved by using the Nelder-Mead Downhill Simplex Method, and for the calculation of L_p distances from points T_i to the graph of function f the method of one-dimensional minimization will be used, which will be elaborated in the paper by I.Soldo and K.Sabo, that will be also presented at this conference. All programs and subprograms will be done by using the *Mathematica* software system. We will thereby use graphic options and animation of the iterative process. Software that will be created for this purpose can be used for designing illustrative examples used in the teaching procress, but also for practical applications in various fields, such as agriculture, medicine, economics, biology, etc.

Keywords: parameter estimation, orthogonal distance regression

AMS Mathematical Classifications (2000): 65D05, 65D07, 65F05, 65F50, 68N19

1 Uvod

U primjenjenim istraživanjima matematički model često je definiran funkcijom-modelom:

$$t \mapsto f(t; \mathbf{a}), \tag{1}$$

gdje je $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ vektor nepoznatih parametara, kojeg treba odrediti na osnovi zadanih podataka: (w_i, x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, gdje su x_i vrijednosti nezavisne varijable, y_i odgovarajuće izmjerene vrijednosti zavisne varijable, a w_i težine podataka. Obično je $m \gg n$.

Navedeni problem često se javlja u biologiji ([16]), kemiji ([20]), ekonomiji ([15], [20], [22]), poljoprivredi ([8]) itd. Za ilustraciju navodimo nekoliko klasičnih modela iz matematičke biologije. Za opisivanje prirasta veličine neke populacije (ili mase živog organizma) navest ćemo neke najčešće korištene modele s dva parametra jer se za taj slučaj problem procjene parametara može zgodno grafički ilustrirati uz primjenu mogućnosti koje pruža programski sustav *Mathematica*:

- Ako pretpostavimo da je brzina porasta populacije u svakom trenutku t konstantna, dobivamo model opisan diferencijalnom jednadžbom

  $$\frac{dy}{dt} = b, \quad b \in \mathbb{R},$$

  čije je rješenje *linearna funkcija-model* (vidi primjerice [13], [15], [18], [26]):

  $$f(t; b, c) = bt + c. \tag{2}$$

- U modelu opisanom diferencijalnom jednadžbom

  $$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = c$$

  stopa rasta populacije u svakom trenutku t je konstantna. Rješenje te diferencijalne jednadžbe je *eksponencijalna funkcija-model* (vidi primjerice [10], [11], [20], [22], [24], [25], [26]):

  $$f(t; b, c) = b\, e^{ct}. \tag{3}$$

- *Logistička funkcija* (Vidi primjerice [8], [10], [12], [15], [16], [20], [22])

  $$f(t; b, c) = \frac{A}{1 + be^{-ct}}, \quad A, b, c > 0, \tag{4}$$

rješenje je poznate Verhulstove diferencijalne jednadžbe iz 1836. godine:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = c(A - y), \quad A, c > 0,$$

kojom je iskazana pretpostavka da je stopa rasta populacije u nekom trenutku t proporcionalna veličini biološkog potencijala $A - y(t)$ u tom trenutku. Pri tome konstante $A > 0$ predstavlja razinu zasićenja, tj. biološki maksimum populacije nekog ograničenog životnog prostora i obično se zadaje unaprijed na bazi prethodnih istraživanja. Postoje različite generalizacije Verhulstove diferencijalne jednadžbe (vidi [15], [20], [28]), kao primjerice

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = c\left[1 - \left(\frac{A}{y}\right)^{\gamma}\right], \quad A, b, c > 0,$$

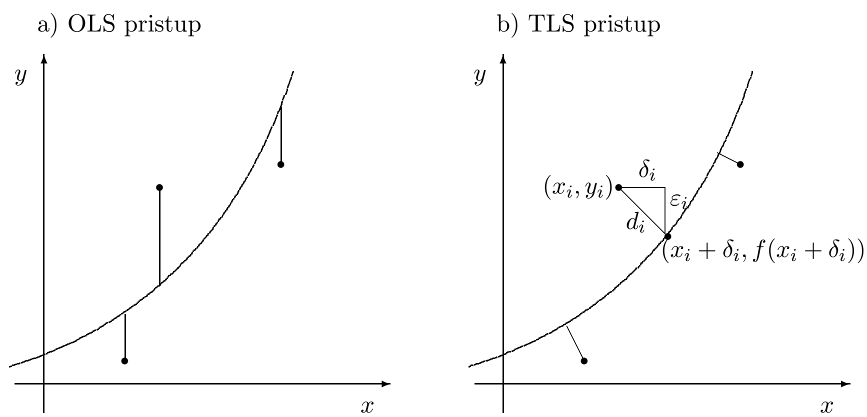
čije je rješenje *asimetrična S-funkcija*:

$$f(t; b, c) = \frac{A}{(1 + be^{-c\gamma t})^{1/\gamma}}, \quad A, b, c, \gamma > 0. \tag{5}$$

Ako je konstanta $\gamma = 1$, onda se radi o logističkoj funkciji. Više o značenju konstanti A i γ može se naći u radu [15].

Ako pretpostavimo da se pogrške mogu pojaviti samo u izmjerenim vrijednostima nezavisne varijable y i da su normalno distribuirane s matematičkim očekivanjem 0, onda se parametri $a_1, \ldots, a_m$, funkcije (1), u praksi najčešće određuju običnom metodom najmanjih kvadrata (OLS – Ordinary Least Squares) (*Slika 1.a*) minimizirajući funkcional

$$S(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{m} w_i \left[y_i - f(x_i; \mathbf{a})\right]^2. \tag{6}$$



Slika 1. OLS i TLS pristup

Ako je funkcija f linearna u parametrima $a_1, \ldots, a_n$, onda se radi o linearnom problemu najmanjih kvadrata koji ima jedinstveno rješenje (vidi primjerice [1]). To rješenje može se dobiti na više načina. Spomenimo samo QR dekompoziciju i dekompoziciju na singularne vrijednosti (vidi primjerice [1], [5], [26]). Ako je funkcija f nelinearna u parametrima $a_1, \ldots, a_n$, onda se radi o nelinearnom problemu najmanjih kvadrata koji se može rješavati metodama navedenim u [4], [5], [26]. Problem egzistencije optimalnih parametara u smislu OLS razmatra se u radovima [9], [10], [11], [12], [25].

U mnogim praktičnim situacijama pogreške su sadržane i u vrijednostima nezavisne varijable x_i (primjerice trenuci izvođenja mjerenja u eksperimentu). Ako pretpostavimo da x_i sadrži nepoznatu aditivnu pogrešku δ_i, a y_i nepoznatu aditivnu pogrešku ε_i, onda je

$$y_i = f(x_i + \delta_i; \mathbf{a}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Prihvatljiv način za procjenu parametara u ovom slučaju je minimizirati težinsku sumu kvadrata udaljenosti d_i od podatka (x_i, y_i) do krivulje $f(t; \mathbf{a})$ (vidi [2], [6], [7]). Kako je $d_i^2 = \delta_i^2 + \varepsilon_i^2$ (vidi *Sliku 1.b*), onda treba minimizirati

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{m} w_i d_i^2 = \sum_{i=1}^{m} w_i(\varepsilon_i^2 + \delta_i^2) \\ \text{uz ograničenja } y_i = f(x_i + \delta_i; \mathbf{a}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, m. \end{gathered} \tag{7}$$

Budući da su ograničenja u (7) linearna u ε_i, eliminacijom ε_i i svih ograničenja dobivamo problem minimuma bez ograničenja:

$$\min_{b,c,\delta} T(\mathbf{a}, \delta), \quad T(\mathbf{a}, \delta) = \sum_{i=1}^{m} w_i \left[f(x_i + \delta_i; \mathbf{a}) - y_i\right]^2 + \sum_{i=1}^{m} w_i \delta_i^2, \tag{8}$$

gdje je $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_m)^T \in \mathbb{R}^m$. Primijetimo da funkcional T ima $n + m$ nezavisnih varijabli i da je kvadrat vrijednosti funkcionala T suma kvgadrata udaljenosti točaka (x_i, y_i) do točaka $(x_i + \delta_i, f(x_i + \delta_i))$ na grafu Γ_f.

Ova metoda u statističkoj literaturi poznata je pod nazivom *in variables* ili *orthogonal regression* (vidi primjerice [2]), a u numeričkoj analizi pojavljuje se pod nazivom *metoda potpunih najmanjih kvadrata* (TLS – Total Least Squares). Na *Slici 1.* vidi se razlika između obične i potpune metode najmanjih kvadrata.

Budući da se u slučaju TLS problema može pojaviti veliki broj nezavisnih varijabli, razvijene su specijalne numeričke metode za procjenu optimalnih parametara (vidi [2], [10], [21]). Dobar pregled dosadašnjih rezultata o TLS metodi može se naći u [6] i [7]. Problem egzistencije optimalnih parametara u smislu TLS razmatrao se u radovima [9], [10], [12], [13], [25].

U ovom radu predlaže se jedna metoda za procjenu parametara model-funkcije f za slučaj pojavljivanja pogrešaka u izmjerenim vrijednostima nezavisne i zavisne varijable, koja se zasniva na ideji iznesenoj u radu [23]. Metoda se pokazala efikasnom i prikladnom za primjene.

2 Opis metode

Pretpostavimo da su zadani podaci mjerenja (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, pri čemu se pogreške mogu očekivati u izmjerenim vrijednostima nezavisne x_i i zavisne y_i varijable. Zbog jednostavnosti nadalje pretpostavljamo da su težine podataka $w_i = 1$ za sve $i = 1, \ldots, m$. Razmatra se problem procjene vektora parametara $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ model–funkcije $t \mapsto f(t; \mathbf{a})$ u smislu *potpunih najmanjih L_p odstupanja* (TL_p):

$$\min_{\mathbf{a}, \delta \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} T_p(\mathbf{a}, \delta) \ , \tag{9}$$

gdje je

$$T_p(\mathbf{a}, \delta) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} |y_i - f(x_i + \delta_i; \mathbf{a})|^p + \sum\limits_{i=1}^{m} |\delta_i|^p, & 1 \leq p < \infty \\ \max\left\{|f(x_1 + \delta_1; \mathbf{a}) - y_1|, \ldots, |f(x_m + \delta_m; \mathbf{a}) - y_m|, |\delta_1|, \ldots, |\delta_m|\right\}, & p = \infty \end{cases}$$

Primijetimo da je u slučaju $1 < p < \infty$ funkcional T_p diferencijabilan, što nije slučaj za $p = 1$. Međutim, problem procjene parametara u smislu TL_1 je i najinteresantniji zbog toga što se na taj način najbolje eleiminira utjecaj jako stršećih podataka – tzv. *outliers*. Primijetimo da se za $p = 2$ problem (9) podudara s TLS problemom opisanom u prethodnom poglavlju.

Lako se može provjeriti da je

$$\min_{\mathbf{a}, \delta \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} T_p(\mathbf{a}, \delta) = \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} d_p^p(T_i, T(x_\pi, f(x_\pi; \mathbf{a}))) \ , \qquad 1 \leq p < \infty$$

gdje je $d_p(T_i, T(x_\pi, f(x_\pi; \mathbf{a})))$ L_p udaljenost točke $T_i(x_i, y_i)$ do grafa funkcije $f(t; \mathbf{a})$. Na taj način naš problem svodi se na određivanje nepoznatog vektora parametara $\mathbf{a}^\star$ model funkcije $t \mapsto f(t; \mathbf{a})$ koji minimizira funkcional

$$F_p(\mathbf{a}) := \sum_{i=1}^{m} d_p^p(T_i, T(x_\pi, f(x_\pi; \mathbf{a}))), \qquad 1 \leq p < \infty \ . \tag{10}$$

gdje je

$$x_\pi = \arg\min_x d_p^p(T(x, f(x; b, c)), T_i).$$

Funkcional F_p ima n varijabli, dok odgovarajući funkcional T_p ima $n + m$ varijabli, pri čemu broj podataka m može biti velik. Zbog toga se može očekivati da će minimizacija funkcionala F_p biti značajno efikasnija nego minimizacija funkcionala T_p.

Izračunavanje L_p udaljenosti točke $T_i(x_i, y_i)$ do grafa funkcije f svodi se na problem jednodimenzionalne minimizacije funkcije

$$\varphi(x) = \begin{cases} |x_i - x|^p + |y_i - f(x; \mathbf{a})|^p \,, & 1 \leq p < \infty \\ \max\left\{|x_i - x|, |y_i - f(x; \mathbf{a})|\right\}, & p = \infty \end{cases} \tag{11}$$

što se može provesti nekom od metoda navedenih u [4], [5], [19]. U ovom radu za rješavanje problema jednodimenzionalne minimizacije funkcije φ koristit ćemo metodu i *Mathematica*-modul iz rada [27].

Za rješavanje problema višedimenzionalne minimizacije općenito nediferencijabilne funkcije F_p zadane s (10) mogu se koristiti razne metode navedene u [3], [14], [17], [19]. U ovom radu u tu svrhu koristit će se Nelder-Meadova Downhill Simplex metoda [17] za što je izrađen vlastiti *Mathematica*–modul.

3 Numerički eksperimenti

Pretpostavimo da su zadani podaci (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, i funkcija model $t \mapsto f(t; b, c)$ s dva parametra b, c. Promatramo modele s dva parametra kako bi grafički mogli ilustrirati iterativni proces[1]. Nepoznate parametre b, c procijenit ćemo u smislu minimizacije sume ortogonalnih L_p udaljenosti minimizirajući funkcional F_p zadan s (10) pri čemu se L_p udaljenost točke $T_i(x_i, y_i)$ do grafa funcije f dobiva jednodimenzionalnom minimizacijom:

$$d_p(T_i, T(x_\pi, f(x_\pi; b, c))) = \min_x \begin{cases} |x_i - x|^p + |y_i - f(x; b, c)|^p\,, & 1 \le p < \infty \\ \max\{|x_i - x|, |y_i - f(x; b, c)|\}\,, & p = \infty \end{cases} \tag{12}$$

Jednodimenzionalnu minimizaciju provest ćemo metodom navedenom u radu [27], a višedimenzionalnu minimizaciju funkcionala F_p zadanog s (10) primjenom vlastitog *Mathematica*–modula.

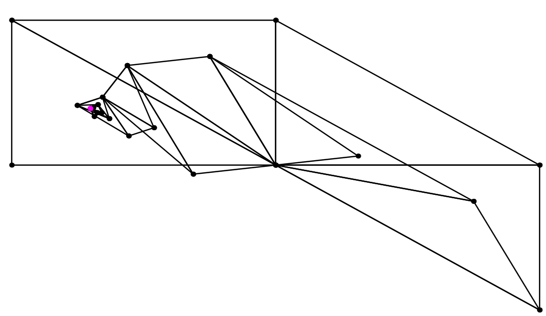
Na bazi poznate funkcije $t \mapsto f(t; b, c)$ najprije generiramo podatke (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, tako da je:

$$\begin{aligned} m = 20, \quad x_i = i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ y_i = f(x_i + \delta_i) + \varepsilon_i, \quad \delta_i, \varepsilon_i \sim N(0, .8). \end{aligned}$$

Nakon toga, jedan od podataka y_i značajnije pokvarimo, čime dobivamo set podataka među kojima se pojavljuje "outlier".

Primjer 1 *Neka je zadana linearna funkcja $f(t) = t + 1$ i podaci generirani na prethodno opisan način.*

Ilustracija iterativnog procesa minimizacije odgovarajućeg funkcionala F_p uz primjenu Nelder–Meadove metode prikazana je na *Slici 2*.

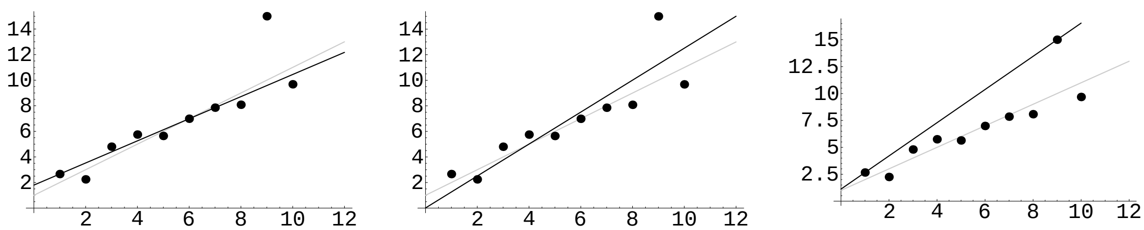


Slika 2. Animacija minimizacije funkcionala F_p

[1] Sva izračunavanja, ilustracije i animacije izrađene su u programskom sustavu *Mathematica* [29]

Na *Slici 3.* prikazan je graf dobivene linearne funkcije-modela (tamnija linija), generirani podaci (tamne točkice) i graf linearne funkcije $f(t) = t+1$ pomoću koje su generirani podaci. Primijetimo da L_1 aproksimacija ignorira jako stršeće podatke – "outliers" (*Slika 3.a*), L_2 aproksimacija je osjetljiva na njih (*Slika 3.b*), a L_∞ je jako osjetljiva na njih (*Slika 3.c*).

a) L_1 aproksimacija b) L_2 aproksimacija c) L_∞ aproksimacija

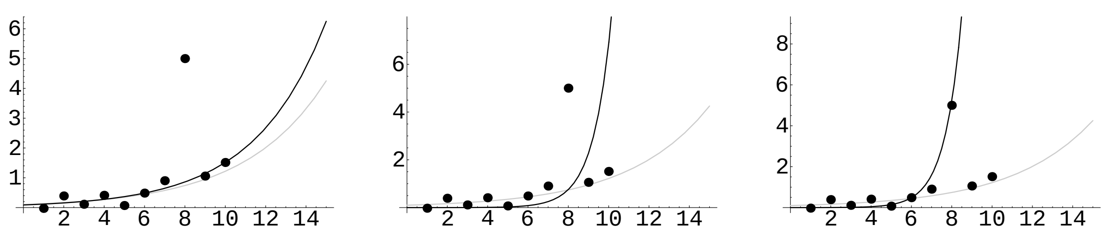


Slika 3. L_1, L_2 i L_∞ aproksimacija linerane funcije-modela

Primjer 2 *Neka je zadana eksponencijalna funkcja $f(t) = 0.1e^{0.25t}$ i podaci generirani na prethodno opisan način.*

Na *Slici 4.* prikazan je graf dobivene eksponencijalne funkcije-modela (tamnija linija), generirani podaci (tamne točkice) i graf eksponencijalne funkcije $f(t) = 0.1e^{0.25t}$ pomoću koje su generirani podaci. Primijetimo da L_1 aproksimacija ignorira jako stršeće podatke – "outliers" (*Slika 4.a*), L_2 aproksimacija je osjetljiva na njih (*Slika 4.b*), a L_∞ je jako osjetljiva na njih (*Slika 4.c*).

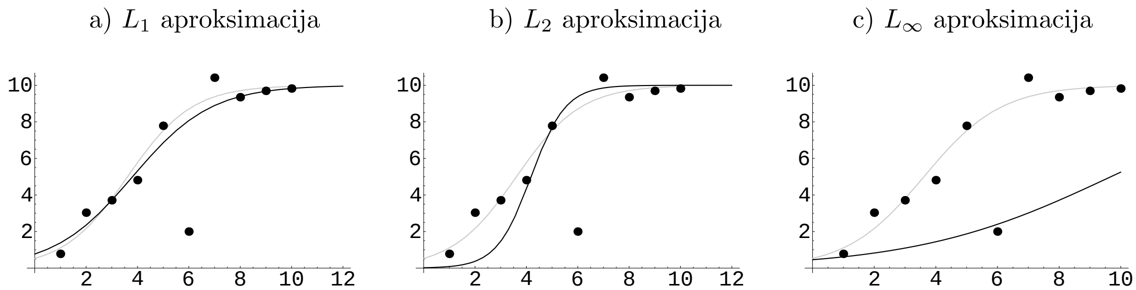
a) L_1 aproksimacija b) L_2 aproksimacija c) L_∞ aproksimacija



Slika 4. TL_1, TL_2 i TL_∞ aproksimacija eksponencijalne funcije-modela

Primjer 3 *Neka je zadana logistička funkcja* $f(t) = \frac{10}{1+18e^{-0.8t}}$ *i podaci generirani na prethodno opisan način.*

Na *Slici 5.* prikazan je graf dobivene logističke funkcije-modela (tamnija linija), generirani podaci (tamne točkice) i graf logističke funkcije $f(t) = \frac{10}{1+18e^{-0.8t}}$ pomoću koje su generirani podaci. Primijetimo da L_1 aproksimacija ignorira jako stršeće podatke - tzv. "outliers" (*Slika 5.a*), L_2 aproksimacija je osjetljiva na njih (*Slika 5.b*), a L_∞ je jako osjetljiva na njih (*Slika 5.c*).



Slika 5. TL_1, TL_2 i TL_∞ aproksimacija logističke funcije-modela

Uz svaki primjer priređena je animacija prilagođavanja L_p aproksimacije zadanim podacima. To je također jedan od načina grafičkog praćenja iterativnog procesa.

Literatura

[1] Å. Björck, *Numerical Methods for Least Squares Problems*, SIAM, Philadelphia, 1996.

[2] P. T. Boggs, R. H.Byrd, R. B. Schnabel, *A stable and efficient algorithm for nonlinear orthogonal distance regression*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., **8**(1987), 1052–1078.

[3] D. Dasgupta, Z. Michalewicz, *Evolutionary Algorithms in Engineering Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1997

[4] J. E. Dennis, R. B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, SIAM, Philadelphia, 1996.

[5] P. E. Gill, W. Murray, M. H. Wright, *Practical Optimization*, Academic Press, London, 1981.

[6] S. Van Huffel, H. Zha, *The total least squares problem*, Elsevier, North–Holland, Amsterdam, 1993.

[7] S. Van Huffel, J. Vandewalle, *The Total Least squares Problem: Computation Aspects and Analysis*, Frontiers in Appl. Math. Ser., Vol. 9., SIAM, Philadelphia, 1991.

[8] R. C. Jain, R. Agrawal, K. N. Singh, *A within year growth model for crop yield forecarting*, Biom. J. **34**(1992), 501–511.

[9] D. Jukić, R. Scitovski, *The least squares solution for logistic function*, J. Computational and Applied Mathematics **156**(2003), 159-177

[10] D. Jukić, R. Scitovski, H. Späth, *Partial linearization of one class of the nonlinear total least squares problem by using the inverse model function*, Computing **62**(1999) 163-178

[11] D. Jukić, T. Marošević, R. Scitovski, *Discrete Total L_p-norm approximation problem for exponential function*, Applied Mathematics and Computation, **94**(1998) 137-143

[12] D.Jukić, R. Scitovski, *Existence results for special nonlinear total least squares problem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **226**(1998) 384-363

[13] D. Jukić, M. Crnjac, R. Scitovski, *Primjena metode potpunih najmanjih kvadrata za procjenu parametara u matematičkom modelu*, u: T. Hunjak, Lj. Martić, L. Neralić, Zbornik radova V. konferencija iz operacijskih istraživanja, Zagreb, 1995, 99-110.

[14] C. T. Kelley, *Iterative Methods for Optimization*, SIAM, Philadelphia, 1999.

[15] R. Lewandowsky, *Prognose und Informationssysteme und ihre Anwendungen*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1980.

[16] J. A. Nelder, *The fitting of a generalization of the logistic curve*, Biometrics, (1961), 89–100.

[17] J. A. Nelder, R. Mead, *A simplex method for function minimization*, The Computer Journal **7**(1965), 308-313

[18] Y. Neivergelt, *Total least squares: state-of-the-art regression in numerical analysis*, SIAM Review **36**(1994), 258–264.

[19] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[20] D. A. Ratkowsky, *Handbook of Nonlinear Regression Models*, Marcel Dekker, New York, 1990.

[21] H. Schwetlick, V. Tiller, *Numerical methods for estimating parameters in nonlinear models with errors in the variables*, Technometrics, **27**(1985), 17–24.

[22] R. Scitovski, M. Meler, *Solving Parameter Estimation Problem in New Product Diffusion Models*, Applied Mathematics and Computation **127**(2002) 45-63

[23] R. Scitovski, D. Jukić, K, Sabo, A. Baumgartner, *The best total L_p spline*, 2^{nd} Croatian Congres of Mathematics, Zagreb, June 15-17, 2000.

[24] R. Scitovski, D. Jukić, *Analysis of solution of the least squares problem*, Mathematical Communications **4**(1999) 53-61

[25] R. Scitovski, D. Jukić, *Total least squares problem for exponential function*, Inverse Problems - An international journal of Inverse Problems, Inverse Methods and Computerized Inversion of Data **12**(1996) 341–349

[26] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000.

[27] I.Soldo, K. Sabo, *Računanje udaljenosti točke do krivulje*, `PrimMath[2003]`, 2003.

[28] T. A. Stukel, *Generalized logistic models*, J. Amer. Stat. Assoc., **83**(1980), 426–431.

[29] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, Wolfram Media, Champaign, 1999.