Metodički aspekti abakusa I

Ivan Matić, Domagoj Ševerdija

1 Uvod

Nastavna pomagala su neizostavan dio gotovo svakog sata matematike. Dok neka od njih služe za razvijanje geometrijskog zora ili za lakše memoriranje formula i postupaka, druga se koriste u cilju rasterećivanja učenika od provođenja dugih i kompliciranih računskih postupaka, koji u sebi često ne skrivaju dodatnu interesantnu problematiku, no ipak zahtjevaju punu koncentraciju. Posljednjih godina se primjena računala u nastavi ističe kao jedna od najzastupljenijih tema na skupovima nastavnika matematike. Primjena računala u nastavi ima brojne potencijalne prednosti te izaziva i mnoge polemike o obliku svog konačnog uvođenja u nastavu, a pronašla je i zasluženo mjesto na stranicama MiŠ-a te zainteresirani čitatelj može više o njoj naći u interesantnim člancima [1] i [2]. Za razliku od računala, abakus neće samostalno obaviti račun umjesto vas, neće vam ponuditi sredstva za izradu raznoraznih šarenih prezentacija, no zato ima snažan doprinos razvoju dojma o manipulaciji brojevima, njihovoj veličini i odnosu. Također, dok će korištenje računala u potpunosti rasteretiti učenike od provođenja šablonskih postupaka i dugotrajnih uvježbavanja nemaštovitih makinalnih radnji, abakus će u tome pridonijeti samo djelomično. No, uloga abakusa je u tome da učenicima neinovativnu rutinu pretvori u slikovit i poticajan postupak koji mogu dijelom i sami kreirati. Time predstavlja prijelaz između računanja na papiru i računanja na računalu. Na određen način, taj prijelaz se može smatrati evolucijom svakodnevnog računanja.

Podsjetimo kako je 2009-a godina evolucije. Sakupimo li na jednu hrpu sve poveznice nastave matematike i informatike s evolucijom općenito, na samom vrhu te hrpe će se naći upravo abakus. Iz toga razloga su se autori ovog rada opredijelili da na ovogodišnjem Festivalu znanosti održe radionicu na temu 'Abakus - prvo računalo', u kojoj su zainteresiranim učenicima osnovnih i srednjih škola prezentirali način rada na abakusu, zajedno s njegovim prednostima i manama. Nakon radionice, održane na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa J. Strossmayera u Osijeku, interes za abakusom se proširio među dijelom kolega i još nekim nastavnicima. Također su u međuvremenu nastali i radovi [5] i [6], izgrađeni na temelju problematike koju se pojavljuje u ograničenjima prilikom provođenja računskih postupaka na abakusu. Danas smo i sami iznenađeni koliko ta jednostavna i naizgled primitivna spravica skriva zanimljivosti i izazova.

U ovom radu želimo podijeliti naša iskustva stečena kako tijekom radionice, tako i u samim pripremama za nju. Također nam je namjera iznijeti brojne karakteristike abakusa koje su nam bile motivacija za Festival znanosti i daljnji rad koji je uslijedio. Mnoge od navedenih karakteristika predstavljaju i bitne značajke u nastavi matematike.

Napominjemo kako naš cilj nije potaknuti nužno uvođenje abakusa u svakodnevnu nastavu matematike (ili informatike). No, već i najjednostavniji oblik abakusa može u potpunosti zamijeniti primjenu bojica ili raznobojnih štapića prilikom učenja zbrajanja i oduzimanja u nižim razredima osnovne škole. Osim toga, struktura abakusa i ograničenost prikaza znamenki je pogodna za računanje u različitim brojevnim sustavima. Napose, abakus predstavlja povijesno pomagalo pri računanju i učenju provođenja računskih operacija te možda i ključni korak pri razvoju današnjih računala, pa iz tih razloga zauzima istaknuto mjesto kako u metodici nastave matematike, tako i u njenoj popularizaciji. Time abakus svakako zaslužuje da svaki zaljubljenik u skrivene tajne matematike produbi svoje znanje o njemu.

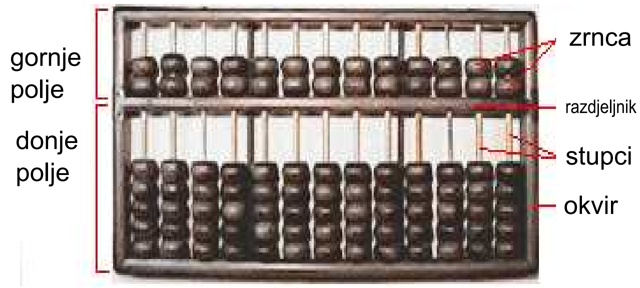
2 Kako abakus izgleda i kako na njemu raditi

Prije nego što krenemo s iznošenjem metodičkih značajki abakusa, smatramo kako ipak treba opisati njegove tehničke značajke. Naime, zasigurno ste vidjeli abakus na nekoj slici, a vjerojatno su mnogi od vas imali i prigodu vidjeti abakus uživo ili raditi na nekoj od njegovih inačica, no za razumijevanje njegovih prednosti je ipak potrebno pobliže ga poznavati.

Ovisno o primjeni i lokaciji, postoje mnoge vrste abakusa - preko običnog školskog (sa šarenim kuglicama koje doprinose živosti računanja), rimskog, ruskog (možda nama zemljopisno i najbližeg), sve do japanskog i kineskog. Opredjelili smo se za opis rada na kineskom abakusu, zbog njegove raspostranjenosti, pogodnosti za računanje u drugim brojevnim sustavima, ali i zbog dostupnosti internetskih programa koji simuliraju računanje na njemu [7] (dakle, i iz praktičnih razloga).

Kineski abakus se sastoji od drvenog ili metalnog okvira pravokutnog oblika, koji jedna poprečna letvica (razdjelnik) dijeli na gornje i donje polje. Kroz razdjelnik je paralelno nanizano nekoliko vertikalnih stupaca (obično drvenih) na svakom od kojih se nalaze zrnca (kuglice) - po dva u gornjem i pet u donjem polju. Stupci su glatki, tako da se zrnca mogu nesmetano pomicati po njima. Broj stupaca varira ovisno o veličini abakusa, standardni kineski abakus ima 13 stupaca, no postoje abakusi i s čak njih 30. Ponekad su neki stupci drugačije boje, čime se obično naglašava mjesto decimalne točke.

Zrnca sa smatraju uračunatima ukoliko su pomaknuta prema razdjelniku, dakle zrnca iz gornjeg polja su uračunata ukoliko su pomaknuta prema dolje i obratno. Svako zrnce iz



Slika 1: Kineski abakus

gornjeg polja ima vrijednost 5, dok svako zrnce iz donjeg polja vrijedi 1. Na primjer, broj 8 se na određenom stupcu zapisuje spuštanjem jednog zrnca iz gornjeg polja i podizanjem triju zrnaca iz donjeg polja (naravno, radi se o zrncima koja se nalaze na tom stupcu). Redovi zrnaca najbližih okviru abakusa predstavljaju takozvana *kontrolna* zrnca, te se oni ne koriste prilikom rada u dekadskom brojevnom sustavu (no osnova su rada u brojevnim sustavima s bazom različitom od 10). Kao i inače, broj se zapisuje kao niz znamenki - nakon odabira stupca na kojem će biti zapisana bilo znamenka jedinica bilo vodeća znamenka tog broja, preostale znamenke se zapisuju na susjednim stupcima, na svakom po jedna. Korisnik može svojevoljno odabrati mjesta za zapis promatranog broja, tj. uzastopne stupce na kojima će zapisati broj, ovisno o veličini promatranog broja, broju stupaca abakusa i potrebama računa. Spomenuta sloboda odabira također pozitivno utječe na kreativnost korisnika. U slučaju zapisa decimalnog broja, ponovno korisnik sam odabire poziciju decimalne točke.

U radu [5] je detaljno opisano provođenje osnovnih računskih operacija na kineskom abakusu. Slične upute se mogu naći i u radu [3]. Svejedno, ovo je sjajno mjesto da ukratko opišemo kako prenijeti postupke računanja s papira na abakus. Ljubiteljima računanja na ruskom abakusu i svima koji su ga vidjeli u trgovinama nekadašnjeg Sovjetskog Saveza preporučamo rad [4].

2.1 Operacije na abakusu

Predstaviti ćemo osnovne aritmetičke operacije na abakusu na primjeru brojeva 463 i 29. Tijekom opisa zbrajanja i oduzimanje ćemo smatrati da za decimalna mjesta služe dva krajnja desna stupca abakusa.

2.1.1 Operacija zbrajanja

Operacija zbrajanja prati postupak vrlo sličan zbrajanju na papiru, kao što je uostalom slučaj i kod svih računskih operacija. Prvi pribrojnik (u ovom slučaju 473) se zapiše prvi na abakus na odgovarajuće stupce. Drugi broj (29) se pridodaje prvom s desna na lijevo, bez prethodnog zapisivanja na abakus (u praksi se postupak može promatrati i s lijeva na desno). Postupak je objašnjen na sljedećim slikama.

Na slici (a) postavljamo prvi pribrojnik na odgovarajuće stupce abakusa. Promotrimo postupak po stupcima:

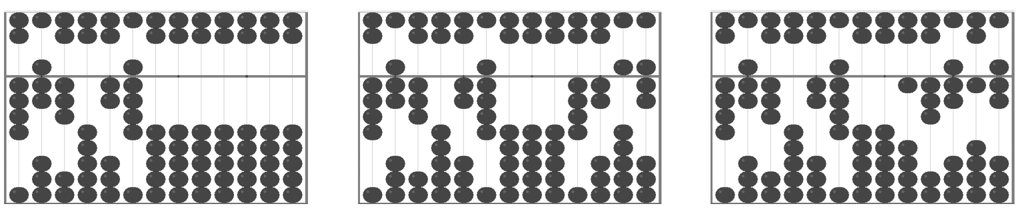
- *stupci jedinica*: $3 + 9 = 3 + (10 - 1)$ što znači da dodajemo na stupac desetica 1, a sa stupca jedinicama oduzimamo 1 (slika (b)).
- *stupci desetica*: Na trenutno stanje dodajemo 2: $8 + 2 = 0 + 10$, što znači da stupac desetica ostavljamo prazan, dok 10 zapisujemo na stupac stotica, dodajući 1 (slika (c)).
- *stupci stotica*: Na trenutno stanje dodajemo 0, no kako smo u prethodnom koraku dodali jedno zrnce te time dobili njih $4 + 1 = 5$, spuštamo donja zrnca i postavljamo jedno gornje zrnce. Slika (c) predstavlja ovaj postupak i rezultat zbrajanja: 502.

2.1.2 Operacija oduzimanja

Sljedeće slike ilustriraju postupak oduzimanja. Postavljamo prvo umanjenik 473 (slika (a)) na abakus i računamo s desna na lijevo:

2.1.3 Operacija množenja

Postupak množenja je složeniji od zbrajanja i oduzimanja. Kod množenja moramo zapisivati na abakus oba faktora (slika (a)). Pristup slijedi princip množenja na papiru, pa je potrebno omogućiti zapis parcijalnih produkata prilikom množenja.



(a) (b) (c)

- *Prvi parcijalni produkt:* Postavljamo prvi i drugi faktor slijeva na abakusu, s tim da ostavimo jedan stupac prazan između faktora i jedan stupac prazan iza faktora (slika (a)). Iza zadnjeg rezerviranog praznog stupca, upisivati ćemo parcijalne produkte te ih odmah zbrajati.

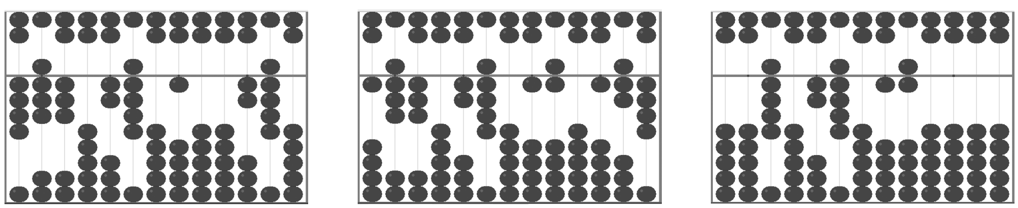
Na slici (b) zapisani su faktori 473|29 i sljedeći broj je parcijalni produkt $473 \times 9 = 27 + 630 + 3600 = 4257$. Parcijalni produkt računamo tako da redom direktno zbrajamo $9 \times 3 + 9 \times 70 + 9 \times 400$.

- *Drugi parcijalni produkt:* Množimo 473 s 2(0) i parcijalni produkt $473 \times 2(0) = 946(0)$ pomaknut za jedan stupac ulijevo dodajemo prvom parcijalnom produktu: $4257 + 9460 = 13717$ (slika (c)).

- *Rezultat:* Kako smo prošli svim znamenkama drugog faktora, trenutno stanje (slika (c)) na desnoj strani abakusa predstavlja produkt faktora 473 i 29, koji je jednak 13717.

2.1.4 Operacija dijeljenja

Dijeljenje je operacija koja predstavlja spoj dosad spomenutih operacija te možemo reći da predstavlja najsloženiju osnovnu računsku operaciju. Kao i kod množenja, potrebno je zapisati djeljenik i djelitelj na abakus (na lijevoj strani) te ih ograditi po jednim praznim stupcem. Sljedeći korak prati postupak dijeljenja kakav se uobičajeno provodi na papiru: dijelimo početni dio djeljenika s djeliteljem i parcijalni kvocijent zapisujemo na predviđeno mjesto. Računamo parcijalni produkt na desnoj strani abakusa, kojeg oduzmemo od djeljenika. Postupak ponavljamo dok razlika djeljenika i parcijalnog produkta ne postane manja od djelitelja. Konkretno u našem primjeru opisani postupak izgleda ovako:



(a) (b) (c)

- *Zapis djeljenika i djelitelja, prvi parcijalni kvocijent*: Na lijevoj strani abakusa zapisujemo 473|29| nakon čega slijedi parcijalni kvocijent $47(0)/29 = 1(0)$. U desnom dijelu abakusa množimo parcijalni kvocijent s djeliteljem $1(0) \times 29 = 290$ (slika (a)) što oduzimamo od djeljenika $473 - 290 = 183$ (slika (b)). Poništimo parcijalni produkt na desnoj strani abakusa, kako bi mogli zapisati idući.

- *Drugi parcijalni kvocijent*: Postupak sada ponavljamo, 183 dijelimo sa 29, kao rezultat cjelobrojnog dijeljenja dobivamo 6 što zapisujemo na sljedeće mjesto znamenke kvocijenta (iza 1). Množimo sada 29 s novim parcijalnim kvocijentom i rezultat

$29 \times 6 = 164$ oduzimamo od stanja na djeljeniku: $183 - 174 = 9$ (Slika (c)). Trenutno stanje na abakusu govori: 19 na mjestu djeljenika je ostatak pri dijeljenju, 29 je djelitelj, a 16 je kvocijent.

Ovim primjerom želimo ilustrirati kako aritmetičke operacije na abakusu prate artimetičke operacije s potpisivanjem, i dobrim razumijevanjem računanja 'na papiru' vrlo lako se mogu razumijeti postupci na abakusu. Detaljnije o operacijama na abakusu se može pogledati u spomenutim referencama.

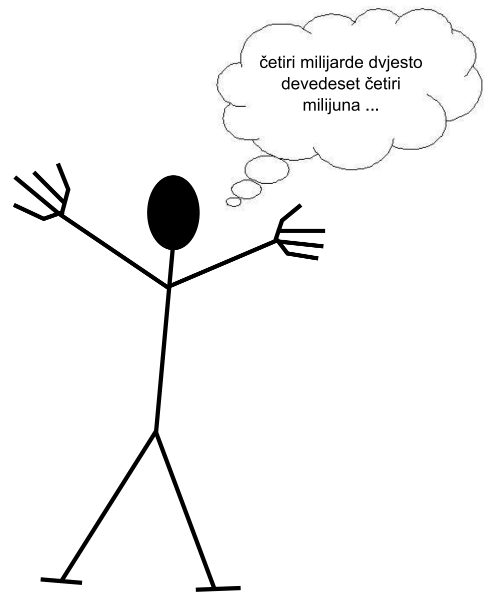
Dakle, ideja abakusa je prenijeti poznate tehnike računanja na jednostavno pomagalo, ne više od toga i ne na bitno drugačiji način, ali zato pridonijeti brzini i intuitivnosti rada.

3 Prednosti prikazivanja brojeva na abakusu

Iako učenici prilično lako usvajaju osnove zapisa brojeva na abakusu, shvaćajući broj kao niz znamenki, vrlo brzo i tu može doći do poteškoća. Razlog leži u tome što djeca zapisujući brojeve isključivo na papiru (ili školskoj ploči) ne razmišljaju o veličini tih brojeva niti o broju znamenki koji trebaju zapisati. Damo li djeci unaprijed zapisan broj, u principu će ga svi početi na abakusu zapisivati krenuvši od znamenke jedinica te se zatim pomičući za po jedno mjesto lijevo. Naravno, takav pristup nije pogrešan, no problem nastaje u slučaju da učenici nemaju ispred sebe već zapisan broj. Tijekom radionice održane na ovogodišnjem Festivalu znanosti, učenici i osnovnoškolskog i srednjoškolskog uzrasta su automatski prihvatili prikazivanje brojeva na kineskom abakusu. Prikazivanje brojeva na abakusu im je bilo i novo i interesantno te su se ubrzo i sami ukljucivali u zadavanje primjera. Sve je išlo glatko dok se radilo o brojevima s najvise četiri znamenke ili brojevima koji su projicirani pred njima u svom decimalnom zapisu. No, svi se redom ustuknuli pred brojem od desetak znamenaka iskazanom riječima - npr. dvanaest milijardi tristo četrdeset i pet milijuna šestopedeset i četiri tisuće tristo dvadeset i jedan. Zašto je najednom broj 12345654321 takav bauk? Da li bi to bio i da djeca nemaju abakus pred sobom, već list papira i olovku? Zasigurno ne bi, jer prilikom zapisivanja broja na abakusu morate unaprijed znati točno odrediti gdje započeti zapis broja.

Takvi problemi ne nastupaju prilikom zapisivanja brojeva na papiru, jer u tom slučaju nema potrebe za razmišljanjem o broju znamenki, već se one samo zapisuju u niz (ali počevši s lijeva). No takav pristup ne razvija svijest o veličini brojeva te će samo rijetki time bez posebnog razmišljanja usvojiti koliko znamenki ima 10 milijardi, a koliko 17 milijuna.

Za razliku od zapisivanja na papiru, računalu ili kalkulatoru, prilikom zapisivanja brojeva na abakusu ne postoji tolika fleksibilnost određivanja mjesta decimalne točke, preciznije određivanja položaja znamenke jedinica danog broja. Naravno da korisnik abakusa sam odabire s koliko će decimalnih mjesta raditi, a u slučaju da nije siguran u točan broj znamenaka zapis može početi od krajnjeg lijevog stupca. No, takav pristup ne prolazi u slučaju rada sa slijedno zadanim brojevima. Tada će prvi broj možda i biti 10-eroznamenkast te će se korisnik opredijeliti da ga zapiše na lijevih 10 stupaca, ali što ako se nakon njega u računu pojavi 12-eroznamenkast broj?



U svakom slučaju, za efikasno korištenje abakusa nužno je precizno prikazivati korištene brojeve, za što je opet nužno biti u mogućnosti unaprijed odrediti njihov broj znamenaka te položaj danih znamenaka na stupcima abakusa. Prisiljeni da unaprijed odrede položaje znamenaka, korisnici abakusa će vrlo brzo usvojiti ispravan dojam o veličini prirodnih i decimalnih brojeva. Osim toga, razviti će i sposobnost preciznog uspoređivanja danih brojeva, ne samo na način da će biti sigurni kako je 112 milijardi veće od 10 milijuna, već i na način da prvi broj ima 4 znamenke više od drugog te je veći za otprilike 10000 puta.

Jasno, u standardnom školskom računanju ne prevladava potreba za posebnim znanjem baratanja s brojevima od 10-ak i više znamenki, jer se prilikom toga koriste iste metode kao i u slučaju mnogo manjih brojeva te se je na njima dovoljno i ispraksirati. No veličine kojima smo danas bombardirani sa svih strana su upravo multiznamenkaste - svakodnevno možemo čuti za dug od 40 milijardi eura, 1000 hektopaskala, desetke milijuna potraga za radnim mjestima, brzinu od $3 \cdot 10^8$ metara u sekundi, broja byte-ova u 16 gigabyte-a, gomile telefonskih brojeva s kojima se susrećemo...

Ne usadi li se učenicima svijest o veličini brojeva, oni se svode upravo na telefonske brojeve - niz znamenki koji se najjednostavnije čita po dvije ili tri, tj. po slogovima. Radom na abakusu se potrebno znanje stječe brzo i, što je možda i važnije, na interesantan i zabavan način.

Literatura

[1] D. Glasnović Gracin: *Računalo u nastavi matematike, 1. dio*, Matematika i škola 46 (2008.), 10 - 15

[2] D. Glasnović Gracin: *Računalo u nastavi matematike, 2. dio*, Matematika i škola 47 (2008.), 81 - 84

[3] Ž. Hanjš: *Kako se nekad računalo. Kineski abak*, Matka, br. 10, 67 - 70

[4] A. Ivir: *Kako se nekad računalo. Ruski abak*, Matka, br. 9, 5 - 7

[5] I. Matić, D. Ševerdija, S. Škorvaga: *Numerička ograničenja kineskog abakusa*, Osječki matematički list (prihvaćeno za objavljivanje)

[6] I. Matić, D. Ševerdija: *Grčko - kineski stil u teoriji brojeva*, Osječki matematički list (prihvaćeno za objavljivanje)

[7] http://www.mathos.hr/˜dseverdi/Abacus_web/