2. Konvergencija nizova

Niz u skupu X je svaka funkcija $x : \mathbb{N} \to X$. Vrijednost $x(k)$, $k \in \mathbb{N}$, se zove opći ili k-ti član niza i obično se označava s x_k. U skladu s tim, niz $x : \mathbb{N} \to X$ se najčešće označava na jedan od sljedeća dva načina:

$$(x_k) \qquad \text{ili} \qquad x_1, x_2, \dots, x_k \dots$$

Podniz niza $x : \mathbb{N} \to X$ je svaki niz oblika $x \circ u : \mathbb{N} \to X$, gdje je $u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neka strogo rastuća funkcija (niz u $\mathbb{N}$). U skladu s našim dogovorom o označavanju nizova imamo

$$(x \circ u)(k) = x(u(k)) = x(u_k) = x_{u_k}$$

pa stoga podniz $x \circ u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kraće označavamo s (x_{u_k}). Nadalje, kako je funkcija u strogo rastuća, to je

$$\begin{aligned}
&u_1 = u(1) \geq 1\\
&u_2 = u(2) > u(1) \geq 1 \Rightarrow u_2 \geq 2\\
&u_3 = u(3) > u(2) \geq 2 \Rightarrow u_3 \geq 3\\
&\vdots
\end{aligned}$$

odakle zaključujemo da je

$$u_k \geq k, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Najvažnije svojstvo nizova je konvergencija. No, o tome je moguće govoriti jedino ako na skupu X imamo metriku ili topološku strukturu.

Nas će najviše zanimati nizovi u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$. Prvo ćemo za motivaciju ponoviti osnovne činjenice o nizovima realnih brojeva, a zatim ćemo napraviti odgovarajuća poopćenja za metričke i topološke prostore.

2.1. Nizovi u $\mathbb{R}$

Kao što smo već rekli, najvažnije svojstvo nizova je konvergencija. Prisjetimo se definicije:

Definicija 2.1. *Niz realnih brojeva (x_k) je* konvergentan *ako postoji realan broj $x_0 \in \mathbb{R}$ sa svojstvom da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi $|x_k - x_0| < \varepsilon$, tj.*

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists k_0 \in \mathbb{N})\ k \geq k_0 \Longrightarrow |x_k - x_0| < \varepsilon.$$

Pri tome realan broj x_0 zovemo limes *ili* granična vrijednost *niza (x_k).*

Da je x_0 limes niza (x_k) označavamo na jedan od sljedećih načina:

$$x_0 = \lim_{k \to \infty} x_k, \qquad x_0 = \lim x_k \qquad \text{ili kratko} \qquad x_k \to x_0.$$

Svaki konvergentan niz ima samo jedan limes. Za niz koji nije konvergentan kažemo da je divergentan.

Kako je $|x_k - x_0| = d(x_k, x_0)$, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$, definicja 2.1. se može iskazati na sljedeći ekvivalentan način:

Definicija 2.2. *Niz realnih brojeva (x_k) konvergira prema $x_0 \in \mathbb{R}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi $d(x_k, x_0) < \varepsilon$, tj.*

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists k_0 \in \mathbb{N})\ k \geq k_0 \Longrightarrow d(x_k, x_0) < \varepsilon.$$

Formalno na isti način se definira konvergencija niza u metričkom prostoru (X, d), što ćemo napraviti u sljedećoj točki.

U topološkom prostoru $(X,\mathcal{U})$ nemamo metriku. Ako Definiciju 2.1. želimo poopćiti na topološke prostore, moramo je iskazati pomoću otvorenih skupova. Prvo uočimo da je interval $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ otvorena okolina od x_0. Nadalje, prema definiciji otvorenog skupa za svaku otvorenu okolinu U od x_0 postoji interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ takav da je $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq U$. Zato, kako je $|x_k - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow x_k \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, dobivamo ekvivalentan iskaz definicije 2.1. pomoću otvorenih skupova:

Definicija 2.3. *Niz realnih brojeva (x_k) konvergira prema $x_0 \in \mathbb{R}$ ako za svaku otvorenu okolinu $U \in \mathcal{U}$ točke x_0 postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi $x_k \in U$.*

Za niz realnih brojeva (x_k) kažemo da monotono raste ako postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x_k \leq x_{k+1} \qquad (\forall k \geq k_0).$$

Niz (x_k) monotono pada ako niz $(-x_k)$ monotono raste.

Propozicija 2.4. *Svaki niz (x_k) realnih brojeva ima monoton podniz*

Dokaz. Neka je

$$A := \{k \in \mathbb{N} : x_m \geq x_k \text{ za svaki } m \geq k\}.$$

Tada je (a) A konačan skup ili je (b) A beskonačan.

(a) Odaberimo bilo koji prirodan broj $u_1 > \max A$. Kako je A konačan, takav u_1 postoji. Kako $u_1 \notin A$, prema definiciji skupa A postoji $u_2 > u_1$ takav da je $x_{u_2} < x_{u_1}$. Očito da $u_2 \notin A$ i zato postoji $u_3 > u_2$ takav da je $x_{u_3} < x_{u_2}$. Nastavljajući ovu konstrukciju dobivamo strogo rastući niz (u_k) i odgovarajući strogo padajući podniz (x_{u_k}).

(b) Neka je u_1 bilo koji element skupa A. Kako je A beskonačan skup, postoji $u_2 \in A$ takav da je $u_1 < u_2$. Prema definiciji skupa A je $x_{u_1} \leq x_{u_2}$. Odaberimo sada $u_3 \in A$ takav da je $u_2 < u_3$ i $x_{u_2} \leq x_{u_3}$. Nastavljajući ovaj postupak indukcijom dobivamo strogo rastući niz (u_k) i odgovarajući monotono rastući podniz (x_{u_k}). □

Niz realnih brojeva (x_k) je omeđen ili ograničen ako postoji realan broj $M > 0$ takav da je $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq (-M, M)$.

Propozicija 2.5. *Svaki monoton i omeđen niz realnih brojeva (x_k) je konvergentan.*

Dokaz. Radi određenosti pretpostavimo da (x_k) monotono raste. Bez smanjenja općenitosti, neka je $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k \leq \ldots$ Niz (x_k) je omeđen pa postoji $x_0 := \sup\{x_k : x \in \mathbb{N}\}$. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je supremum nekog skupa njegova najmanja gornja međa, broj $x_0 - \varepsilon$ nije gornja međa skupa $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Zato postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x_0 - \varepsilon < x_{k_0} \leq x_0 < x_0 + \varepsilon.$$

Kako (x_k) monotono raste, za svaki $k \geq k_0$ vrijedi

$$x_0 - \varepsilon < x_{k_0} \leq x_k \leq x_0 < x_0 + \varepsilon,$$

tj. $|x_k - x_0| < \varepsilon$. □

2.2. Nizovi u metričkom prostoru

Za realnu analizu najvažniji su nizovi u $\mathbb{R}^n$. Skup $\mathbb{R}^n$ s euklidskom metrikom je metrički prostor. Zato ćemo nadalje konvergenciju nizova izučavati na razini metričkih i topoloških prostora.

Definicija 2.6. *Neka je (x_k) niz u metričkom prostoru (X, d). Kažemo da niz (x_k)* konvergira *prema točki $x_0 \in X$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi $d(x_k, x_0) < \varepsilon$, tj. ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists k_0 \in \mathbb{N})\; k \geq k_0 \Longrightarrow d(x_k, x_0) < \varepsilon.$$

Pri tome točku x_0 zovemo limes *ili* granična vrijednost *niza (x_k).*

Da niz (x_k) konvergira prema x_0, označavamo na jedan od sljedećih načina:

$$x_0 = \lim_{k \to \infty} x_k, \qquad x_0 = \lim x_k \qquad \text{ili kratko} \qquad x_k \to x_0.$$

Primjedba 2.7. *(Dokaz na vježbama)*

(a) Uočimo da niz (x_k) konvergira prema točki $x_0 \in X$ onda i samo onda ako niz realnih brojeva $d(x_k, x_0)$ konvergira k nuli.

(b) Uočimo da niz (x_k) konvergira prema $x_0 \in X$ onda i samo onda ako se u svakoj otvorenoj kugli $K(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, nalaze svi članovi toga niza osim eventualno konačno mnogo prvih nekoliko članova.

Primjedba 2.8. *U topološkom prostoru konvergencija niza se definira na sljedeći način:*

Neka je (x_k) niz u topološkom prostoru $(X, \mathcal{U})$. Niz (x_k) konvergira *prema točki $x_0 \in X$ ako za svak otvorenu okolinu $U \in \mathcal{U}$ od x_0 postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi $x_k \in U$.*

Teorem 2.9. *Neka je (x_k) niz u metričkom prostoru (X, d). Ako (x_k) konvergira, onda mu je limes jedinstven.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$ limes niza (x_k). Treba pokazati da ni jedna druga točka $\hat{x}_0 \in X \backslash \{x_0\}$ ne može biti limes. U tu svrhu neka je $\varepsilon := \frac{1}{2} d(x_0, \hat{x}_0)$.

Prvo ćemo pokazati da se otvorene kugle $K(x_0, \varepsilon)$ i $K(\hat{x}_0, \varepsilon)$ ne sijeku. Neka je $x \in K(x_0, \varepsilon)$. Tada je $d(x, x_0) < \varepsilon$. Prema nejednakosti trokuta je $d(x_0, \hat{x}_0) \leq d(x_0, x) + d(x, \hat{x}_0)$, odakle slijedi

$$d(x, \hat{x}_0) \geq d(x_0, \hat{x}_0) - d(x_0, x) > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

Time smo pokazali da je $K(x_0, \varepsilon) \cap K(\hat{x}_0, \varepsilon) = \emptyset$.

Prema definiciji 2.6. postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_k, x_0) < \varepsilon$ za svaki $k \geq k_0$. Drugim riječima, za svaki $k \geq k_0$ je $x_k \in K(x_0, \varepsilon)$. Zbog toga se u otvorenoj kugli $K(\hat{x}_0, \varepsilon)$ može nalaziti najviše konačno mnogo članova niza (x_k). To znači da $\hat{x}_0$ nije limes niza (x_k) (Primjedba 2.7.(b)). □

Primjedba 2.10.

(a) *U topološkom prostoru limes ne mora biti jedinstven. Za primjer možemo uzeti topološki prostor $(\mathbb{R}^2, \mathcal{U})$ iz Primjera 1.19., gdje su otvorene kugle i otvoreni skupovi definirani pomoću pseudometrike $\varrho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2|$. U ovom topološkom prostoru svaka točka $(1, y)$, $y \in \mathbb{R}$, je limes niza $\mathbf{x}_k = \left(1, \frac{1}{k}\right)$.*

(b) *U dokazu prethodnog teorema metrika je iskorištena jedino za konstrukciju disjunktnih otvorenih skupova $K(x_0, \varepsilon)$ i $K(\hat{x}_0, \varepsilon)$. Zato je lako pokazati da će limes (ukoliko postoji) biti jedinstven i u topološkim prostorima koji imaju svojstvo da se svake dvije različite točke mogu separirati disjunktnim otvorenim skupovima. Takvi topološki prostori se zovu* Hausdorffovi *ili* T_2-prostori.

Sljedeći teorem nam govori da se zatvoreni skupovi u metričkom prostoru mogu karakterizirati pomoću konvergentnih nizova. Kako je otvoren skup komplement zatvorenog skupa, to znači da konvergentni nizovi u potpunosti opisuju topološku strukturu metričkog prostora.

Teorem 2.11. *Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $F \subseteq X$ je zatvoren onda i samo onda ako svaki niz (x_k) iz F koji konvergira u X ima limes u F.*

Dokaz. Neka je $F \subseteq X$ zatvoren skup, a (x_k) niz iz F (tj. $x_k \in F$ za svaki $k \in \mathbb{N}$) koji konvergira prema $x_0 \in X$. Treba pokazati da je $x_0 \in F$. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom. Pretpostavimo da je $x_0 \in X \backslash F$. Skup $X \backslash F$ je otvoren pa zato postoji $\varepsilon > 0$ takav da je$K(x_0, \varepsilon) \subseteq X \backslash F$. Nadalje, kako (x_k) konvergira prema x_0, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_k \in K(x_0, \varepsilon) \subseteq X \backslash F$ za svaki $k \geq k_0$, što je u suprotnosti s pretpostavkom da je (x_k) niz u F.

Obratno, pretpostavimo da $F \subseteq X$ sadrži limese svih konvergentnih nizova iz F i pokažimo da je F zatvoren. Pretpostavimo da F nije zatvoren, tj. da $X \backslash F$ nije otvoren. Tada postoji točka $x_0 \in X \backslash F$ takva da ni za jedan $r > 0$ otvorena kugla

$K(x_0, r)$ nije cijela sadržana u $X \backslash F$, tj. $K(x_0, r) \cap F \neq \emptyset$. Zamjenjujući r redom s $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, dolazimo do točaka $x_k \in K(x_0, r) \cap F$. Očito da je (x_k) niz u F. Kako je $d(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$, to $x_k \to x_0 \in X \backslash F$, što je u suprotnosti s pretpostavkom da F sadrži limese svih svojih konvergentnih nizova. Dakle, F je zatvoren skup. □

Definicija 2.12. *Za niz (x_k) u metričkom prostoru (X, d) kažemo da je* omeđen *ako postoje točka x_0 i realan broj $M > 0$ takav da je $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq K(x_0, M)$.*

Propozicija 2.13. *Svaki konvergentan niz u metričkom prostoru (X, d) je* omeđen.

Dokaz. Neka (x_k) konvergira prema x_0. Prema Definiciji 2.6. za $\varepsilon = 1$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\{x_k : k \geq k_0\} \subseteq K(x_0, 1)$. Neka je

$$r := \max\{1, d(x_1, x_0), d(x_2, x_0), \ldots, d(x_{k_0-1}, x_0)\} + 1.$$

Tada je $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq K(x_0, r)$. □

Propozicija 2.14. *Neka je (x_k) niz u metričkom prostoru (X, d). Ako niz (x_k) konvergira prema točki $x_0 \in X$, onda i svaki njegov podniz konvergira prema x_0.*

Dokaz. Neka je (x_{u_k}) podniz niza (x_k). Prema definiciji limesa za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi $d(x_k, x_0) < \varepsilon$. Prema (2.1) je $u_k \geq k$, i zato je

$$d(x_{u_k}, x_0) < \varepsilon, \qquad k \geq k_0.$$

Time smo pokazali da podniz (x_{u_k}) konvergira prema x_0. □

Svaki niz $(\mathbf{x}_k)$ iz euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{x}_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n),$$

gdje su (x_k^i), $i = 1, \ldots, n$, tzv. koordinatni nizovi realnih brojeva.

Nizovi u $\mathbb{R}^n$ se najčešće zadaju pomoću općeg člana.

Primjer 2.15. *Navedimo nekoliko primjera nizova zadanih općim članom:*

1. $\mathbf{x}_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$ *i* $\mathbf{y}_k = \left((-1)^k, (1 + 1/k)^k\right)$ *su nizovi u* $\mathbb{R}^2$.
2. $\mathbf{x}_k = \left(\frac{k+1}{k}, \frac{1}{2^k}, \sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$ *je niz u* $\mathbb{R}^3$.
3. $\mathbf{x}_k = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \ldots, \frac{1}{k+n}\right)$ *je niz u* $\mathbb{R}^n$.

Sljedeći teorem nam govori da niz u $\mathbb{R}^n$ konvergira onda i samo onda ako konvergira svaki njegov koordinatni niz. Čak više, on nam kaže da se računanje limesa niza iz $\mathbb{R}^n$ svodi na računanje n limesa nizova realnih brojeva, što nam je dobro poznato.

Teorem 2.16. *U euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ niz $(\mathbf{x}_k)$, $\mathbf{x}_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n)$, konvergira prema točki $\mathbf{x}_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ onda i samo onda ako $x_k^i \to x_0^i$ za svaki $i = 1, \ldots, n$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0$. Treba pokazati da $x_k^i \to x_0^i$ za svaki $i = 1, \dots, n$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada po Definiciji 2.6. postoji $k_0 \in \mathbf{N}$ takav da je $d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \varepsilon$ za svaki $k \geq k_0$. Kako je

$$|x_k^i - x_0^i| \leq d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0), \qquad i = 1, \dots, n,$$

za svaki $k \geq k_0$ dobivamo

$$|x_k^i - x_0^i| < \varepsilon, \qquad i = 1, \dots, n.$$

To znači da $x_k^i \to x_0^i$ za svaki $i = 1, \dots, n$.

Obratno, pretpostavimo da $x_k^i \to x_0^i$ za svaki $i = 1, \dots, n$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoje brojevi $k_0^i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$, takvi da za sve $k \geq k_0^i$ vrijedi:

$$|x_k^i - x_0^i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Neka je $k_0 := \max\{k_0^1, \dots, k_0^n\}$. Tada za svaki $k \geq k_0$ dobivamo

$$d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_k^i - x_0^i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \varepsilon,$$

pa je $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$. □

Primjer 2.17. *Za nizove iz Primjera 2.15. dobivamo:*

1. $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) = (0, 0)$. *Niz* $(\mathbf{y}_k)$ *nije konvergentan jer njegov prvi koordinatni niz* (y_k^1), $y_k^1 = (-1)^k$, *ne konvergira.*
2. $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}, \frac{1}{2^k}, \sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = (1, 0, 0)$.
3. $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \dots, \frac{1}{k+n}\right) = (0, 0, \dots, 0)$.

Kako je $\mathbb{R}^n$ realan vektorski prostor, znamo zbrajati vektore i množiti ih skalarom. Osim toga, znamo ih i skalarno množiti. Kao i u slučaju $n = 1$ potrebno je istražiti odnos konvergencije niza i tih operacija. O tome nam govori sljedeći teorem:

Korolar 2.18. *Neka su* $(\mathbf{x}_k)$ *i* $(\mathbf{y}_k)$ *konvergentni nizovi u* $\mathbb{R}^n$, (α_k) *konvergentan niz realnih brojeva i* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Nadalje, neka* $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_k \to \mathbf{y}_0$ *i* $\alpha_k \to \alpha$. *Tada vrijedi:*

(a) Niz $(\mathbf{x}_k \pm \mathbf{y}_k)$ *je konvergentan i vrijedi:*

$$\lim_{k\to\infty} (\mathbf{x}_k \pm \mathbf{y}_k) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k \pm \lim_{k\to\infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{x}_0 \pm \mathbf{y}_0.$$

(b) *Niz* $(\lambda \mathbf{x}_k)$ *je konvergentan i vrijedi:*

$$\lim_{k\to\infty} (\lambda \mathbf{x}_k) = \lambda \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \lambda \mathbf{x}_0.$$

(c) *Niz* $(\alpha_k \mathbf{x}_k)$ *je konvergentan i vrijedi:*

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha_k \mathbf{x}_k) = \lim_{k\to\infty} \alpha_k \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \alpha \mathbf{x}_0.$$

(d) *Ako je* $\alpha_k \neq 0$ *za svaki* $k \in \mathbb{N}$ *i* $\alpha \neq 0$*, niz* $\left(\frac{1}{\alpha_k}\mathbf{x}_k\right)$ *je konvergentan i vrijedi:*

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\alpha_k}\mathbf{x}_k\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\alpha_k} \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \frac{1}{\alpha}\mathbf{x}_0.$$

(e) *Niz* $(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_k)$ *je konvergentan i vrijedi:*

$$\lim_{k\to\infty} (\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_k) = (\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k | \lim_{k\to\infty} \mathbf{y}_k) = (\mathbf{x}_0|\mathbf{y}_0).$$

Dokaz. Dokaz slijedi iz teorema 2.16. i odgovarajućih pravila za računanje limesa nizova realnih brojeva. □

Definicija 2.19. *Neka je* (x_k) *niz u metričkom prostoru* (X, d)*. Za točku* $x_0 \in X$ *kažemo da je* gomilište *ili* točka gomilanja *niza* (x_k) *ako svaka otvorena okolina točke* x_0 *sadrži beskonačno mnogo članova niza* (x_k)*.*

Primjedba 2.20. *(Dokaz na vježbama!)*

(a) *Primjetimo da je gomilište podniza* (x_{u_k}) *ujedno i gomilište niza* (x_k)*. Pokažite primjerom da obrat ne vrijedi.*

(b) *Konvergentan niz u metričkom prostoru ima samo jedno gomilište. To je njegov limes. Za dokaz ove tvrdnje dovoljno je oponašati dokaz Teorema 2.9.*

(c) *Nije teško pokazati da je* x_0 *gomilište niza* (x_k) *onda i samo onda ako za svaku otvorenu okolinu* U *oko* x_0 *i za svaki* $k \in \mathbb{N}$ *postoji barem jedan* $k' \in \mathbb{N}$, $k' > k$, *takav da je* $x_{k'} \in U$.

(d) *Primjetimo da jednočlani skup* $A = \{a\}$ *nema gomilište, dok stacionaran niz* $x_k = a$, $k \in \mathbb{N}$, *ima gomilište.*

Primjer 2.21.

1. *Niz realnih brojeva* $x_k = (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$, *ima dva gomilišta:* -1 *i* 1.
2. *Niz* $\mathbf{x}_k = \left((-1)^k, \frac{1}{k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, *ima dva gomilišta:* $(-1, 0)$ *i* $(1, 0)$.
3. *Niz* $\mathbf{x}_k = \left(\frac{1}{k}, k\right)$, $k \in \mathbb{N}$, *nema gomilište.*

Teorem 2.22. *Neka je (X, d) metrički prostor. Točka $x_0 \in X$ je gomilište niza (x_k) onda i samo onda ako postoji podniz (x_{u_k}) koji konvergira prema x_0.*

Dokaz. Neka je x_0 gomilište niza (x_k). Definirat ćemo indukcijom strogo rastući niz prirodnih brojeva (u_k) takav da je $x_{u_k} \in K\left(x_0, \frac{1}{k}\right)$. To će značiti da podniz (x_{u_k}) konvergira prema x_0 jer $d(x_{u_k}, x_0) \to 0$, što slijedi iz nejednakosti $0 \leq d(x_{u_k}, x_0) < \frac{1}{k}$.

Prema definiciji gomilišta postoji $u_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_{u_1} \in K(x_0, 1)$. Sada odaberimo $u_2 \in \mathbb{N}$ takav da je $u_2 > u_1$ i $x_{u_2} \in K\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$. Takav u_2 postoji (vidi Primjedbu 2.20.). Nastavljajući ovaj postupak dolazimo do traženog podniza (x_{u_k}).

Obratno, pretpostavimo da podniz (x_{u_k}) konvergira prema x_0. Neka je U bilo koja otvorena okolina točke x_0. Prema definiciji otvorenog skupa tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $K(x_0, \varepsilon) \subseteq U$. Kako $x_{u_k} \to x_0$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi

$$x_{u_k} \in K(x_0, \varepsilon) \subseteq U.$$

Time smo pokazali da U sadrži beskonačno mnogo članova niza (x_k). Prema tome, x_0 je gomilište niza (x_k). □

Sada možemo dokazati sljedeći važan teorem za nizove u $\mathbb{R}^n$:

Teorem 2.23. (Bolzano-Weierstrassov teorem za nizove) *Svaki omeđen niz u $\mathbb{R}^n$ ima konvergentan podniz.*

Dokaz. Dokaz ćemo napraviti matematičkom indukcijom po dimenziji n prostora $\mathbb{R}^n$. Za $n = 1$ prema Propoziciji 2.4. niz (x_k) ima monoton podniz (x_{u_k}), koji je prema prema Propoziciji 2.5. konvergentan.

Pretpostavimo da teorem vrijedi u $\mathbb{R}^n$ i dokažimo da tada vrijedi i u $\mathbb{R}^{n+1}$. Neka je $\mathbf{x}_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n, x_k^{n+1})$, $k \in \mathbb{N}$, omeđen niz u $\mathbb{R}^{n+1}$. Tada je $\hat{\mathbf{x}}_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$, $k \in \mathbb{N}$, omeđen niz u $\mathbb{R}^n$, pa po induktivnoj pretpostavci ima konvergentan podniz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $(\hat{\mathbf{x}}_k)$ konvergentan niz. Na taj način ništa ne gubimo, a daljnji zapisi postaju jednostavniji. Nadalje, niz (x_k^{n+1}) je omeđen, ali on ne mora biti konvergentan. Prema već dokazanom slučaju $n = 1$ on ima konvergentan podniz $(x_{u_k}^{n+1})$. Kako je prema Propoziciji 2.14. podniz konvergentnog niza i sâm konvergentan, to je $(\hat{\mathbf{x}}_{u_k})$ konvergentan niz u $\mathbb{R}^n$. Prema teoremu 2.16. tada je konvergentan i podniz $(\mathbf{x}_{u_k})$. □

2.3. Potpuni metrički prostori

Definicija 2.24. *Za niz (x_k) u metričkom prostoru (X, d) kažemo da je* Cauchyjev *ili* fundamentalan *ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je $d(x_m, x_k) < \varepsilon$ za sve $m, k \geq k_0$, tj.*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists k_0 \in \mathbb{N})\ \ m, k \geq k_0 \Longrightarrow d(x_m, x_k) < \varepsilon.$$

Primjer 2.25. *Neka je $x_k = \frac{1}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, niz u $X = (0,1)$.*

Neka su $m, k \in \mathbb{N}$. Bez smanjnja općenitosti, pretpostavimo da je $m > k$. Tada je

$$|x_m - x_k| = \left|\frac{1}{m+1} - \frac{1}{k+1}\right| = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{k+1}.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Tada za sve $m, k \geq k_0$ vrijedi $|x_m - x_k| < \varepsilon$. Time smo pokazali da je $\left(\frac{1}{k+1}\right)$ Cauchyjev niz.

Kako je $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0$, ovaj niz ne konvergira u prostoru $X = (0,1)$.

Kao što smo vidjeli u prethodnom primjeru, Cauchyjev niz u metričkom prostoru općenito ne mora biti konvergentan. Ipak vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 2.26. *U metričkom prostoru (X, d) vrijedi:*

(a) Svaki konvergentan niz je Cauchyjev.

(b) Svaki Cauchyjev niz je omeđen.

(c) Ako neki podniz Cauchyjeva niza konvergira prema x_0, onda i cijeli niz konvergira prema x_0.

Dokaz. (a) Neka je $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$. Po definiciji limesa tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_k, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ za svaki $k \geq k_0$. Zato za sve $m, k \geq k_0$ pomoću nejednakosti trokuta dobivamo:

$$d(x_m, x_k) \leq d(x_m, x_0) + d(x_0, x_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dakle, (x_k) je Cauchyjev niz.

(b) Niz (x_k) je Cauchyjev pa specijalno za $\varepsilon = 1$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je $d(x_k, x_{k_0}) < 1$ za sve $k \geq k_0$. Neka je

$$M := \max\{1, d(x_1, x_{k_0}), d(x_2, x_{k_0}), \ldots, d(x_{k_0-1}, x_{k_0})\} + 1.$$

Tada su svi članovi niza (x_k) sadržani u otvorenoj kugli $K(x_{k_0}, M)$, što znači da je niz omeđen.

(c) Pretpostavimo da podniz (x_{u_k}) konvergira prema x_0. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Niz (x_k) je Cauchyjev, pa zato postoji $k_1 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_m, x_k) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{za sve } m, k \geq k_1. \tag{2.2}$$

Nadalje, kako je $\lim_{k\to\infty} x_{u_k} = x_0$, postoji $k_2 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_{u_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{za svaki } k \geq k_2. \tag{2.3}$$

Neka je $k_0 := \max\{k_1, k_2\}$. Tada za svaki $k \geq k_0$ vrijede nejednakosti (2.2) i (2.3). Nadalje, prema (2.1) je $u_k \geq k$ i zato je

$$d(x_k, x_0) \leq d(x_k, x_{u_k}) + d(x_{u_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Primjedba 2.27. *Prema prethodnom teoremu, kod Cauchyjeva niza konvergencija nekog podniza povlači konvergenciju cijelog niza. Da to općenito ne vrijedi pokazuje nam niz* $0, 1, 0, 1, \ldots$.

Teorem 2.28. *U n-dimenzionalnom euklidskom prostoru* $(\mathbb{R}^n, d)$ *svaki Cauchyjev niz je konvergentan.*

Dokaz. Neka je $(\mathbf{x}_k)$ Cauchyjev niz u $(\mathbb{R}^n, d)$. Prema tvrdnji (b) Teorema 2.26. $(\mathbf{x}_k)$ je omeđen, pa prema teorem 2.23. ima konvergentan podniz $(\mathbf{x}_{u_k})$ koji konvergira prema nekoj točki $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Sada prema tvrdnji (c) Teorema 2.26. slijedi da i niz $(\mathbf{x}_k)$ konvergira prema $\mathbf{x}_0$. □

Teoremi 2.26. i 2.28. daju sljedeći korolar:

Korolar 2.29. *Niz* $(\mathbf{x}_k)$ *u euklidskom prostoru* $(\mathbb{R}^n, d)$ *je konvergentan onda i samo onda ako je on Cauchyjev niz.*

Definicija 2.30. *Za metrički prostor* (X, d) *kažemo da je* potpun *ako svaki Cauchyjev niz iz* X *konvergira prema nekoj točki iz* X*.*

Primjer 2.31.

(a) *$X = (0, 1)$ s euklidskom metrikom nije potpun prostor (vidi Primjer 2.25.).*

(b) *Euklidski prostor $(\mathbb{R}^n, d)$ je potpun.*

Potpun normiran vektorski prostor zove se Banachov prostor, a za potpun unitaran vektorski prostor kažemo da je Hilbertov prostor.

Teorem 2.32. *Neka je* (X, d) *potpun metrički prostor. Skup* $F \subseteq X$ *je zatvoren onda i samo onda ako je* (F, d) *potpun metrički prostor.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Pretpostavimo da je $F \subseteq X$ zatvoren skup. Neka je (x_k) Cauchyjev niz iz F. Tada je (x_k) ujedno i Cauchyjev niz iz X, pa zbog potpunosti prostora (X, d) postoji točka $x_0 \in X$ prema kojoj (x_k) konvergira. Zbog zatvorenosti skupa F, prema teoremu 2.11. je $x_0 \in F$, što pokazuje da (x_k) konvergira u (F, d).

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da je (F, d) potpun metrički prostor. Prema teoremu 2.11. dovoljno je pokazati da svaki niz (x_k) iz F koji konvergira u X ima limes u F. Neka je (x_k) niz u F koji konvergira prema $x_0 \in X$. Tada je (x_k) ujedno i niz u X koji konvergira prema x_0. Prema teoremu 2.26. (x_k) je Cauchyjev niz, pa zbog potpunosti prostora (F, d) postoji točka $f_0 \in F$ prema kojoj on konvergira. Zbog jedinstvenosti limesa je $f_0 = x_0$. □

Primjer 2.33.

(a) *Segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je potpun metrički prostor.*

(b) *Prostor racionalnih brojeva $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ nije zatvoren, pa nije ni potpun.*

2.4. Kompaktnost u $\mathbb{R}^n$

Kompaktni skupovi imaju važnu ulogu u matematičkoj analizi jer omogućuju da se u određenim situacijama beskonačno zamijeni konačnim.

Definicija 2.34. *Skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je* kompaktan *ako svaki niz u K ima konvergentan podniz čiji je limes u K.*

Ova definicija se prirodno proširuje na metričke prostore:

Definicija 2.35. *Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $K \subseteq X$ je* kompaktan *ako svaki niz u K ima konvergentan podniz čiji je limes u K.*

Sljedeći teorem nam govori da se kompaktnost prenosi na zatvorene skupove.

Teorem 2.36. *Neka je K kompaktan skup iz metričkog prostora, a $F \subseteq K$ zatvoren podskup. Tada je i F kompaktan.*

Dokaz. Neka je (x_k) niz u F. Kako je $F \subseteq K$, to je (x_k) ujedno i niz u K, pa zbog kompaktnosti skupa K on ima konvergentan podniz (x_{u_k}) koji konvergira prema $x_0 \in K$. Zbog zatvorenosti skupa F je $x_0 \in F$ (Teorem 2.11.). □

Definicija 2.37. *Neka je (X, d) metrički prostor. Za skup $K \subseteq X$ kažemo da je* potpuno omeđen *ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačno mnogo točaka $x_1, \ldots, x_k \in K$ takvih da je $K \subseteq \bigcup_{i=1}^k K(x_i, \varepsilon)$.*

Primjetimo da je svaki potpuno omeđen skup ujedno i omeđen.

Teorem 2.38. *Neka je K kompaktan skup iz metričkog prostora (X, d). Tada je K potpuno omeđen.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom. Pretpostavimo da K nije potpuno omeđen. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da se K ne može prekriti sa konačno mnogo ε-kugala. Neka je $x_1 \in K$ proizvoljna točka. Kako $K \not\subseteq K(x_1, \varepsilon)$, to postoji točka $x_2 \in K \backslash K(x_1, \varepsilon)$. Budući da $K \not\subseteq K(x_1, \varepsilon) \cup K(x_2, \varepsilon)$, postoji točka $x_3 \in K \backslash \Big(K(x_1, \varepsilon) \cup K(x_2, \varepsilon) \Big)$. Nastavljajući ovaj postupak dolazimo do niza (x_k) u K sa svojstvom

$$d(x_m, x_k) \geq \varepsilon, \qquad \forall k, m \in \mathbb{N}.$$

Zbog toga ni jedan podniz od (x_k) nije Cauchyjev, pa stoga (x_k) nema konvergentnog podniza. To je u kontradikciji s pretpostavkom da je K kompaktan. □

Korolar 2.39. *Kompaktan skup K iz metričkog prostora (X, d) je omeđen i zatvoren*

Dokaz. Prema prethodnom teoremu skup K je potpuno omeđen, tj. sadržan je u uniji konačno mnogo otvorenih kugala. Prema propoziciji 1.38. K je omeđen.

Preostaje pokazati da je K zatvoren skup. Prema teoremu 2.11. dovoljno je pokazati da svaki konvergentan niz (x_k) iz K ima limes u K. Neka je (x_k) niz u K koji konvergira prema $x_0 \in X$. Kako je K kompaktan skup, niz (x_k) ima konvergentan podniz (x_{u_k}) čiji je limes u K. Kako je prema Propoziciji 2.14. $\lim_{k\to\infty} x_{u_k} = x_0$, zaključujemo da je $x_0 \in K$. □

U euklidskim prostorima imamo sljedeći važnu karakterizaciju kompaktnosti:

Korolar 2.40. *Skup* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *je kompaktan onda i samo onda ako je on omeđen i zatvoren.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Tvrdnja slijedi iz Koralara 2.39.

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da je K omeđen i zatvoren skup. Neka je (x_k) niz u K. Taj niz je omeđen pa prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu (Teorem 2.23.) ima konvergentan podniz. Zbog zatvorenosti skupa K taj limes leži u K. □

Primjer 2.41.

(a) *Skup* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ *nije kompaktan.*

(b) *Skup* $[1, 3] \cup [7, 9]$ *je kompaktan.*

(c) *Otvorena kugla* $K(x_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ *nije kompaktan skup. Zatvorena kugla* $\bar{K}(x_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ *je kompaktan skup.*

(d) *Sfera* $S^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ *je kompaktan skup.*

(e) *Skup* $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ *je kompaktan.*

Sada ćemo pokazati da se kompaktnost može opisati bez nizova i metrike, samo pomoću otvorenih skupova. To će nas dovesti do definicije kompaktnosti u topološkim prostorima. Prvo ćemo uvesti neke pojmove.

Definicija 2.42. *Neka je* $(X, \mathcal{U})$ *topološki prostor, a* $S \subseteq X$.

(i) *Familija* $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ *podskupova* V_α *skupa* X *je* pokrivač *skupa* S *ako je* $S \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$.

(ii) *Pokrivač* $\mathcal{V}$ *je* konačan *(*prebrojiv*) ako je* A *konačan (prebrojiv) skup.*

(iii) *Za pokrivač* $\mathcal{V}$ *kažemo da je* otvoren pokrivač *ako su svi članovi* $V_\alpha \in \mathcal{V}$ *otvoreni skupovi.*

(iv) Potpokrivač *pokrivača* $\mathcal{V}$ *je svaka potfamilija* $\mathcal{V}' = \{V_\alpha : \alpha \in A'\}$, $A' \subseteq A$, *koja je i sama pokrivač skupa* S.

Primjer 2.43. *Familija* $\mathcal{V} = \Big\{K\big((x, 0), 1\big) : x \in \mathbb{R}\Big\}$ *je otvoreni pokrivač* x*-osi u* $\mathbb{R}^2$. *Ona ima prebrojiv potpokrivač* $\Big\{K\big((n, 0), 1\big) : n \in \mathbb{Z}\Big\}$, *no nema konačan potpokrivač.*

Definicija 2.44. *Neka je (X,d) metrički prostor, a $\mathcal{V}$ pokrivač skupa $S \subseteq X$. Ako postoji broj $\lambda > 0$ takav da za svaki podskup $A \subseteq S$ za koji je $\operatorname{diam} A \leq \lambda$ postoji $V \in \mathcal{V}$ takav da je $A \subseteq V$, onda λ zovemo* Lebesgueov broj *pokrivača $\mathcal{V}$.*

Teorem 2.45. (O Lebesgueovom broju) *Neka je (X,d) metrički prostor, a $K \subseteq X$ kompaktan skup. Tada za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{V}$ od K postoji Lebesgueov broj.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom. Zato pretpostavimo da postoji otvoreni pokrivač $\mathcal{V}$ od K za koji ne postoji Lebesgueov broj. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k}$ nije Lebesgueov broj pokrivača $\mathcal{V}$. To znači da postoji skup $A_k \subseteq K$ takav da je $\operatorname{diam} A_k \leq \frac{1}{k}$ i da A_k nije sadržan ni u jednom članu pokrivača $\mathcal{V}$.

U svakom A_k odaberimo jednu točku $x_k \in A_k$. Budući da je K kompakt, niz (x_k) ima konvergentan podniz (x_{u_k}) s limesom $x_0 \in K$. Kako je $\mathcal{V}$ pokrivač od K, postoji $V \in \mathcal{V}$ takav da je $x_0 \in V$. Zbog otvorenosti skupa V postoji $r > 0$ takav da je $x_0 \in K(x_0, r) \subseteq V$. Kako $x_{u_k} \to x_0$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_{u_k}, x_0) < \frac{r}{2} \qquad \text{za svaki } k \geq k_0.$$

Neka je $k \geq \max\{k_0, 2/r\}$. Tada za svaku točku $x \in A_{u_k}$ vrijedi

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_{u_k}) + d(x_{u_k}, x_0) < \operatorname{diam} A_{u_k} + \frac{r}{2}.$$

Kako je $\operatorname{diam} A_{u_k} \leq \frac{1}{u_k}$ i $u_k \geq k$, dobivamo

$$d(x, x_0) \leq \frac{1}{u_k} + \frac{r}{2} \leq \frac{1}{k} + \frac{r}{2} \leq r$$

pa je $A_{u_k} \subseteq K(x_0, r) \subseteq V \in \mathcal{V}$, što je u kontradikciji s izborom skupova A_k (A_k nije sadržan ni u jednom članu pokrivača $\mathcal{V}$). □

Primjedba 2.46. *Nekompaktni skupovi mogu imati pokrivače koji nemaju Lebesgueov broj. U tu svrhu promotrimo sljedeći pokrivač skupa $\mathbb{R}^+$:*

$$\mathcal{V} = \{K(2n-1, 1) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{K(2n, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Za svaki $\lambda > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $2/n < \lambda$, pa je $K(2n, \lambda/2)$ skup dijametra λ koji nije sadržan ni u jednom članu od $\mathcal{V}$.

Sada ćemo okarakterizirati kompaktnost pomoću pokrivača. Osim što je važna u dokazima, ta se karakterizacija koristi za definiciju kompaktnosti u topološkim prostorima.

Teorem 2.47. (Heine-Borelov teorem) *Neka je (X,d) metrički prostor. Skup $K \subseteq X$ je kompaktan onda i samo onda ako svaki otvoreni pokrivač ima konačan potpokrivač.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Neka je K kompaktan skup i neka je $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ njegov otvoreni pokrivač. Prema teoremu 2.45. postoji Lebesgueov broj $\lambda > 0$ tog pokrivača. Nadalje, zbog potpune omeđenosti skupa K (Teorem 2.38.) postoji konačno mnogo točaka $x_1, \ldots, x_k \in K$ takvih da je $\Big\{K(x_i, \lambda/2) : i = 1, \ldots, k\Big\}$ otvoren pokrivač za K. Kako je $\operatorname{diam}(K \cap K(x_i, \lambda/2)) \leq \lambda$, slijedi da je $K \cap K(x_i, \lambda/2)$ sadržan u nekom V_{α_i}. Zato je $\{V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_k}\}$ konačan potpokrivač od K.

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da svaki otvoreni pokrivač od K ima konačan potpokrivač. Neka je (x_k) niz u K. Treba pokazati da taj niz ima konvergentan podniz čiji je limes u K. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom. Pretpostavimo suprotno. Tada oko svake točke $x \in K$ postoji otvorena okolina V_x koja sadrži najviše konačno mnogo članova niza (x_k) (u suprotnom možemo konstruirati podniz od (x_k) koji će konvergirati prema x). Familija $\{V_x : x \in K\}$ je očito otvoreni pokrivač od K. Po pretpostavci postoji konačan potpokrivač $\{V_{x_1}, \ldots, V_{x_k}\}$. Dakle,

$$\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Kako svaki od skupova V_{x_i}, $i = 1, \ldots, k$, sadrži konačno mnogo članova niza (x_k), dolazi se do kontradikcije s činjenicom da je skup $\mathbb{N}$ beskonačan. $\square$

Definicija 2.48. *Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor. Za skup $K \subseteq X$ kažemo da je* kompaktan *ako svaki otvoreni pokrivač od K ima konačan potpokrivač.*

Zadaci

1. Odredite gomilišta nizova: (a) $\mathbf{x}_k = \left(((-1)^k + 1)2^k, \frac{1-2k^2}{k^2+3}\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

2. Neka je $(\mathbf{x}_k)$ niz u $\mathbb{R}^n$ takav da je $\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k\| \to 0$. Pokažite da je tada $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$.

   (Uputa: $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{x}_k\| = |\|\mathbf{x}_k\| - 0|$.)

3. Neka su $(\mathbf{x}_k)$ i $(\mathbf{y}_k)$ nizovi u $\mathbb{R}^n$, takvi da niz $(\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k)$ konvergira. Da li tada konvergiraju nizovi $(\mathbf{x}_k)$ i $(\mathbf{y}_k)$?

   (Uputa: Promotrite nizove $x_k = (-1)^k$ i $y_k = -(-1)^k$.)

4. Neka su $(\mathbf{x}_k)$ i $(\mathbf{y}_k)$ nizovi u $\mathbb{R}^n$. Definirajmo niz $(\mathbf{z}_k)$ na sljedeći način:

   $$\mathbf{z}_{2k} = \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{z}_{2k-1} = \mathbf{y}_k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

   Pokažite da je niz $(\mathbf{z}_k)$ konvergentan onda i samo onda ako su konvergentni nizovi $(\mathbf{x}_k)$ i $(\mathbf{y}_k)$ i ako pri tome vrijedi $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \lim_{k\to\infty} \mathbf{y}_k$.

   (Uputa: $\Rightarrow$ Neka $(\mathbf{z}_k)$ konvergira prema $\mathbf{z}_0$. Kako su $(\mathbf{x}_k)$ i $(\mathbf{y}_k)$ podnizovi od $(\mathbf{y}_k)$, oni također konvergiraju prema $\mathbf{z}_0$.

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da je $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \lim_{k\to\infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{x}_0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoje $k_0^x, k_0^y \in \mathbb{N}$ takvi da

$$\begin{aligned} k \geq k_0^x &\Rightarrow d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \varepsilon \\ k \geq k_0^y &\Rightarrow d(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_0) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Neka je $k_0 := \max\{2k_0^x, 2k_0^y - 1\}$ i $k \geq k_0$. Ako je $k = 2m$, tada je $m \geq k_0^x$ i zato je $\|\mathbf{z}_k - \mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$. Ako je $k = 2m-1$, tada je $m \geq k_0^y$ i zato je $\|\mathbf{z}_k - \mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{y}_m - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$.)

5. Neka su (x_k) i (y_k) nizovi u metričkom prostoru (X, d) i neka (x_k) konvergira prema x_0. Pokažite da (y_k) konvergira prema x_0 onda i samo onda ako $d(x_k, y_k) \to 0$.

   (Rješenje: Kako $x_k \to x_0$, postoji $k_0^x \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_k, x_0) < \varepsilon/2$ za svaki $k \geq k_0^x$.
   ($\Rightarrow$) Ako $y_k \to x_0$, onda postoji $k_0^y \in \mathbb{N}$ takav da je $d(y_k, x_0) < \varepsilon/2$ za svaki $k \geq k_0^y$. Neka je $k_0 := \max\{k_0^x, k_0^y\}$. Tada za svaki $k \geq k_0$ pomoću nejednakosti trokuta dobivamo $d(x_k, y_k) \leq d(x_k, x_0) + d(x_0, y_k) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. To znači da niz $d(x_k, y_k)$, $k \in \mathbb{N}$, konvergira prema nuli.
   ($\Leftarrow$) Neka $d(x_k, y_k) \to 0$. Tada postoji $k_0^{xy} \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_k, y_k) < \varepsilon/2$ za svaki $k \geq k_0^{xy}$. Neka je $k_0 := \max\{k_0^x, k_0^{xy}\}$. Tada za svaki $k \geq k_0$ pomoću nejednakosti trokuta dobivamo $d(y_k, x_0) \leq d(y_k, x_k) + d(x_k, x_0) < \varepsilon$.)

6. Neka su (x_k) i (y_k) nizovi u metričkom prostoru (X, d) takvi da $x_k \to x_0$, a $y_k \to y_0$. Pokažite da $d(x_k, y_k) \to d(x_0, y_0)$.

   (Uputa: Iskoristite nejednakost $|d(x_k, y_k) - d(x_0, y_0)| \leq d(x_k, x_0) + d(y_k, y_0)$ iz zadatka 12 sa str. 15)

7. U metričkom prostoru (X, d) definira se udaljenost točke x_0 od skupa $A \subseteq X$ formulom
   $$d(x_0, A) = \inf\{d(x_0, a) : a \in A\}.$$

   Dokažite da je $d(x_0, A) = 0$ onda i samo onda ako je $x_0 \in \operatorname{Cl} A$.

   (Uputa: U dokazu ćemo koristiti Korolar 1.35., prema kome je $\operatorname{Cl} A = A \cup A'$. $\Rightarrow$ Neka je $d(x_0, A) = 0$. Po definiciji infimuma, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $a \in A$ takav da je $d(x_0, a) < d(x_0, A) + \varepsilon = \varepsilon$. Uzimajući za ε redom $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, dolazimo do niza (a_k) iz A sa svojstvom $d(x_0, a_k) < \frac{1}{k}$. To znači da $a_k \to x_0$, i zato je x_0 gomilište skupa A. Prema Korolaru 1.35. je $x_0 \in \operatorname{Cl} A$. $\Leftarrow$ Ako je $x_0 \in \operatorname{Cl} A$, onda postoji niz (a_k) iz A takav da je $d(a_k, x_0) \to 0$ i zato je $\inf\{d(x_0, a) : a \in A\} = 0$.)

8. Pokažite direktno iz definicije da su sljedeći nizovi Cauchyjevi: (a) $x_k = \frac{1}{k}$. (b) $x_k = \frac{k+1}{k}$. (c) $x_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}$

   (Uputa: (a) Ako je $m > k$, onda je $|x_m - x_k| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{k}\right| = \frac{1}{k} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{k}$. Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberite $k_0 > 1/\varepsilon$. Tada za sve $m, k \geq k_0$ vrijedi $|x_m - x_k| < \varepsilon$.

(b) Ako je $m > k$, onda je $|x_m - x_k| = \frac{m-k}{km} \le \frac{1}{k}$. Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberite $k_0 > 1/\varepsilon$. Tada za sve $m, k \ge k_0$ vrijedi $|x_m - x_k| < \varepsilon$. (c) Ako je $m > k$, onda je

$$|x_m - x_k| = \sum_{i=k+1}^{m} \frac{1}{i!} < \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i!} \le \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Odaberite $k_0 > 1 + \log_2(1/\varepsilon)$. Tada za sve $m, k \ge k_0$ vrijedi

$$|x_m - x_k| < 2^{-k+1} \le 2^{-k_0+1} < 2^{-\log_2(1/\varepsilon)} = \varepsilon.\ )$$

9. Neka je $s_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$ k-ta parcijalna suma harmonijskog reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Pokažite da (s_k) nije Cauchyjev niz, što će značiti da harmonijski red ne konvergira.

   (Uputa: $s_{2k+1} - s_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k+1} \ge \frac{k+1}{2k+1} > \frac{1}{2}$.)

10. Neka je (X, d) potpun metrički prostor. Pretpostavimo da je (A_n) niz zatvorenih podskupova od X sa sljedeća dva svojstva:

    (i) niz (A_n) je silazan, tj. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$.

    (ii) $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam} A_k = 0$.

    (a) Dokažite da je $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$. (b) Navedite primjer silaznog niza (B_k) podskupova u potpunom metričkom prostoru X, tako da bude $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset$.

    (Uputa: Konstruirajte niz (x_k) na sljedeći način: Neka je $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2 \backslash A_1, \ldots, x_k \in A_k \backslash A_{k-1}, \ldots$. Kako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\operatorname{diam} A_k < \varepsilon$ za svaki $k \ge k_0$, to je $d(x_m, x_k) < \varepsilon$ za sve $m, k \ge k_0$. Dakle, (x_k) je Cauchyjev niz. Neka je x_0 njegov limes. Kako je $\{x_k : k \ge 1\} \subseteq A_1$ i A_1 zatvoren skup, to je $x_0 \in A_1$. Kako je A_2 zatvoren skup i $\{x_k : k \ge 2\} \subseteq A_2$, to je $x_0 \in A_2$, itd. Dakle, $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. (b) $B_k = (-\infty, -k]$, $k \in \mathbb{N}$.)

11. Dokazati da je diskretan metrički prostor (X, d) potpun.

    (Uputa: Treba pokazati da svaki Cauchyjev niz (x_k) iz X konvergira prema nekoj točki $x_0 \in X$. Prisjetimo se da je diskretna metrika definirana formulom

$$d(x, y) := \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

    Neka je (x_k) Cauchyjev niz, tj. neka za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_m, x_k) < \varepsilon$ za sve $m, k \ge k_0$. Tada specijalno za $\varepsilon = 1/2$ postoji $K_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_m, x_k) < 1/2$ za sve $m, k \ge K_0$, odakle slijedi da je (x_k) stacionaran niz pa je i konvergentan.)

12. Neka su $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ ekvivalentne norme na realnom vektorskom prostoru $(X, +, \cdot)$. Dokažite da je prostor $(X, \|\cdot\|)$ potpun onda i samo onda ako je $(X, \|\cdot\|')$ potpun.

(Uputa: Kako su norme ekvivalentne, postoje $m, M > 0$ takvi da je

$$m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|, \qquad x \in X.$$

$\Rightarrow$ Pretpostavimo da je $(X, \|\cdot\|)$ potpun. Neka je (x_k) Cauchyjev niz u $(X, \|\cdot\|')$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\|x_l - x_k\|' < \varepsilon m, \quad \forall k, l \geq k_0 \Longrightarrow \|x_l - x_k\| < \varepsilon.$$

Dakle, pokazali smo da je (x_k) Cauchyjev niz u $(X, \|\cdot\|)$. Neka $x_k \to x_0$. Tada postji $K_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$\|x_k - x_0\| < \varepsilon/M, \quad \forall k \geq K_0 \Longrightarrow \|x_k - x_0\|' < \varepsilon, \forall k \geq K_0.$$

Dakle, (x_k) konvergira prema x_0 u $(X, \|\cdot\|')$. $\Leftarrow$ Postupite na sličan način.)

13. Pretpostavimo da skup $A \subseteq \mathbb{R}$ nije kompaktan. Pokažite da postoji neomeđena neprekidna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$.

    (Uputa: Ako je A neomeđen skup, stavite $f(x) = x$. Ako A nije zatvoren, onda postoji niz (x_k) u A koji konvergira prema $x_0 \notin A$, , i zato je funkcija $f(x) = 1/(x - x_0)$ neomeđena.) .

14. Neka je $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}$. Dokažite: (a) Skup A nije kompaktan. (b) Skup $A \cup \{0\}$ je kompaktan.

    (Uputa: U euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ skup je kompaktan onda i samo onda ako je on omeđen i zatvoren. (a) Skup A nije zatvoren jer $(1/k)$ je niz u A čiji je limes $0 \notin A$ (vidi Teorem 2.11..)

15. Dokažite da je skup $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 = 1\}$ kompaktan.

    (Uputa: Za $(x, y) \in A$ vrijedi $x^4 + y^2 = 1$, pa je $x^4, y^2 \leq 1$ odakle slijedi $|x|, |y| \leq 1$. Zato je $(x, y) \in K((0, 0), \sqrt{2})$, što nam govori da je A omeđen skup. Sada ćemo pokazati da je A zatvoren skup. Neka je (x_k, y_k) bilo koji niz u A koji konvergira prema $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Treba pokazati da je $(x_0, y_0) \in A$. Kako $(x_k, y_k) \to (x_0, y_0)$, to $x_k \to x_0$ i $y_k \to y_0$. Sada iz jednaksoti $x_k^4 + y_k^2 = 1$ dobivamo $x_0^4 + y_0^2 = 1$, tj. $(x_0, y_0) \in A$.)

16. Dokažite da je kompaktan svaki konačan podskup metričkog prostora.

    (Uputa: Svaki niz iz konačnog podskupa sadrži stacionaran podniz, koji je konvergentan.)

17. Kompaktan skup K iz metričkog prostora (X, d) je omeđen i zatvoren. Ilustrirajte primjerom da obrat ne mora vrijediti.

    (Uputa: Neka je X beskonačan skup s diskretnom metrikom. Svaka točka $x_0 \in X$ je otvoren skup jer za $\varepsilon < 1$ je $K(x_0, \varepsilon) = \{x_0\}$. Skup X je očito omeđen i zatvoren. Kako je $X = \bigcup_{x \in X}\{x\}$, te kako otvoreni pokrivač $(\{x\}, x \in X)$ nema konačan potpokrivač, skup X nije kompaktan.)

18. Neka su A i B kompaktni podskupovi iz prostora X. Dokažite: (a) Ako je X topološki prostor, onda je $A \cup B$ kompakt. (b) Ako je X metrički prostor, onda je $A \cap B$ kompakt.

19. Pokažite da sljedeći skupovi nisu kompaktni i to nalazeći otvoreni pokrivač koji nema konačan potpokrivač (vidi Definicju 2.48.): (a) $\mathbb{R}^n$. (b) $K(\mathbf{0}, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$. (c) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

    (Uputa: (a) Neka je $U_k := K(\mathbf{0}, k) \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada je $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ otvoreni pokrivač skupa $\mathbb{R}^n$ koji nema konačan potpokrivač. (b) Postupite slično kao pod (a). (c) Otvoreni pokrivač $K(m, 1/4) \subseteq \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, nema konačan potpokrivač.)

20. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ kompaktni skupovi. Dokažite da je kompaktan i skup $C := A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

    (Uputa: Neka je (x_k, y_k) bilo koj niz u C. Kako je A kompaktan, niz (x_k) ima konvergentan podniz (x_{u_k}) koji konvergira prema nekoj točki $x_0 \in A$. Podniz (y_{u_k}) je niz u B, a B kompaktan, pa zato postoji konvergentan podniz $(y_{v_{u_k}})$ koji konvergira prema nekoj točki $y_0 \in B$. Budući da podniz konvergentnog niza konvergira istoj vrijednosti kao i niz, imamo $x_{v_{u_k}} \to x_0$. Dakle, $(x_{v_{u_k}}, y_{v_{u_k}}) \to (x_0, y_0) \in C$.)

21. Neka je X bilo koji skup, a (Y, d) metrički prostor. Za niz (f_k) funkcija sa X u Y kažemo da uniformno konvergira prema funkciji $f : X \to \mathbb{R}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k \geq k_0$ i za sve $x \in X$ vrijedi $d(f_k(x), f(x)) < \varepsilon$.

    Očito je da uniformna konvergencija povlači običnu (ili po točkama) konvergenciju, tj. da svaki $x \in X$ niz $(f_k(x))$ konvergira prema $f(x)$.

    Neka je $X = [0, 1]$ i neka je niz funkcija (f_k) definiran formulom $f_k(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1]$. Ovaj niz konvergira obično prema funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ 0 \leq x < 1 \\ 1, \ x = 1. \end{cases}$$

    Dokažite da konvergencija nije uniformna.

    (Uputa: Za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $x \in [0, 1)$ takav da je $|f_k(x) - f(x)| = x^k \geq 1/2$, pa konvergencija nije uniformna. Zaista, za svaki $x \in \left[1 - \frac{1}{2k}, 1\right)$ pomoću Bernoullijeve nejednakosti se dobiva $x^k = \Big(1 + (x-1)\Big)^k \geq 1 + k(x-1) \geq \frac{1}{2}$.)

22. Pokažite da niz funkcija $f_k(x) = \frac{1+2\cos^2(kx)}{\sqrt{k}}$, $k \in \mathbb{N}$, uniformno konvergira na $\mathbb{R}$ prema 0.

    (Uputa: $|f_k(x) - 0| = \left|\frac{1+2\cos^2(kx)}{\sqrt{k}}\right| \leq \frac{3}{\sqrt{k}}$. Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{3}{\sqrt{k_0}} < \varepsilon$. Tada za svaki $k \geq k_0$ i za sve $x \in \mathbb{R}$ dobivamo $|f_k(x) - 0| < \varepsilon$.)

23. Neka je $f_k(x) = \frac{x}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, niz funkcija. (a) Pokažite da niz funkcija (f_k) uniformno konvergira na $[0,1)$. (b) Pokažite da niz funkcija (f_k) ne konvergira uniformno na $[0,\infty)$.

    (Uputa: Očito niz funkcija (f_k) konvergira obično prema 0. (a) Dokaz je jednostavan. (b) Treba pokazati da postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $k_0 \in \mathbb{N}$ postoje $k \geq k_0$ i $x \in [0,\infty)$ takvi da je $|f_k(x) - 0| \geq \varepsilon$, što se dobiva negiranjem definicije uniformne konvergencije niza funkcija Neka je $\varepsilon = 1$ i $k_0 \in \mathbb{N}$. Za svaki $k \geq k_0$ možemo odabrati $x > k$, pa je tada $|f_k(x) - 0| = \frac{x}{k} > 1$.)