Vježbe 10

Limes funkcije

Za realni broj a kažemo da je gomilište ili točka gomilanja skupa $D \subseteq \mathbb{R}$ ako postoji niz (a_n), takav da je
$$a_n \in D, \quad a_n \neq a \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$
Skup svih točaka gomilanja skupa D označavamo s D'. Točku $a \in D$ nazivamo izoliranom točkom skupa D, ako nije točka gomilanja skupa D.

Primjer 1. Odredite D' ako je

a) $D = \langle 1, 2\rangle$

b) $D = \langle 2, 3\rangle \cup \{5, 7\}$

Primjer 2. Funkcija f zadana je formulom
$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}.$$
Odredite domenu funkcije D, te odgovarajući D'.

Primjer 3. Funkcija f zadana je formulom
$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$
Odredite domenu funkcije D, te odgovarajući D'.

Heineova definicija limesa funkcije: Realni broj L je limes ili granična vrijednost funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ u točki $a \in D'$, ako za svaki niz (a_n) iz D, $a_n \neq a$, za koji je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ vrijedi:
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L.$$
Ako je a izolirana točka skupa D onda za limes funkcije f u točki a uzimamo broj $f(a)$. Pišemo
$$L = \lim_{x\to a} f(x).$$

Cauchyjeva definicija limesa funkcije: Realni broj L je limes ili granična vrijednost funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ u točki $a \in D'$, ako za svaki realni broj $\varepsilon > 0$ postoji realni broj $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takav da
$$(x \in D \setminus \{a\}; |x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon).$$
Ako je a izolirana točka skupa D onda za limes funkcije f u točki a uzimamo broj $f(a)$.

Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ realna funkcija jedne varijable i $a \in D'$. Kažemo da funkcija f ima limes L slijeva [limes L zdesna] u točki a i pišemo
$$L = \lim_{x\to a^-} f(x) \quad [L = \lim_{x\to a^+} f(x)]$$

Heine: ako za svaki niz (a_n) iz D takav da je $a_n < a$ $[a_n > a]$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L.$$

Cauchy: ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in D$ sa svojstvom $a - \delta < x < a$ $[a < x < a + \delta]$ vrijedi

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$ odozgo neomeđen skup i $f : D \to \mathbb{R}$ bilo koja funkcija. Kažemo da je realan broj L limes ili granična vrijednost funkcije f u ∞ i pišemo

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Heine: ako za svaki niz (a_n) iz D za koji je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L.$$

Cauchy: ako za svaki realni broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $M = M(\varepsilon)$ takav da

$$(x \in D; x > M) \Rightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon).$$

Pravila za računanje s limesima

Neka su $f, g : D \to \mathbb{R}$ dvije funkcije i $a \in D'$. Ako postoje realni brojevi L_1 i L_2 takvi da je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ i $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$, onda vrijedi

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2,$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2,$
- $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = |L_2|$
- $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{L_1}{L_2}$, $g(x) \neq 0$ u nekoj ε okolini broja a i $L_2 \neq 0$
- Ako je $f(x) > 0$ za svaki $x \in D$ i $\alpha > 0$ bilo koji realan broj, onda je $\lim\limits_{x\to a}(f(x)^\alpha) = L_1^\alpha$.

Poznati limesi

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

- $\lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{\beta}{x}} = e^{\alpha\beta}$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

1. Izračunajte sljedeće limese:

   a) $\lim_{x\to 1}(2x+1)$,

   b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$,

   c) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x-1}{2x^2-x+1}$,

   d) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$,

   e) $\lim_{x\to 11}\frac{3-\sqrt{x-2}}{x^2-121}$,

   f) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$,

   g) $\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$,

   h) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$,

   i) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)$,

   j) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{4}}{x-4}$,

   k) $\lim_{x\to \infty}\frac{2x+3}{x-\sqrt[3]{x}}$,

   l) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$,

   m) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2006x}{\sin 2007x}$,

   n) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$,

   o) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{4x}$,