Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Vlatka Čota

Uzorci u kvadratima: Objašnjenje i dokaz

Diplomski rad

Osijek, 2015.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Vlatka Čota

Uzorci u kvadratima: Objašnjenje i dokaz

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2015.

Sadržaj

Uvod

Algebra (ar. al-gabr – 'spajanje polomljenih dijelova') važan je dio matematike i sve se više naglašava njezina važnost u nastavi, čime postaje jedan od temeljnih dijelova kurikuluma nastave matematike.

Algebra je moćan alat za rješavanje problema u stvarnom svijetu, ali uz to ima široku primjenu i u problemskim zadacima, objašnjenju i dokazima u matematici. Većina učenika ne shvaća bit, smisao i korisnost algebre, kao i njenu primjenu u svakodnevnom životu. Zbog toga algebru nastojimo približiti učenicima kroz konkretne primjere, primjere u kojima će vidjeti njenu primjenu. Samim time nastojimo ih motivirati i zadobiti njihovu pozornost. Nakon što usvoje gradivo s razumijevanjem, lakše će svladati i drugi element algebre, tečnost.

U prvom poglavlju ovog rada upoznat ćemo se s nekima od osnovnih algebarskih identiteta. Osim toga, istražit ćemo neke zanimljive pristupe koje bismo predstavili učenicima u svrhu boljeg povezivanja i shvaćanja ideje. U drugom poglavlju upoznat ćemo treći, ali ne i manje važan identitet, razliku kvadrata i tu ćemo također dati neke ključne ideje za ilustriranje identiteta. U trećem poglavlju ćemo se upoznati s proširivanjem i faktoriziranjem, a u četvrtom s objašnjenjem i dokazom, i to pomoću nekoliko primjera. U petom ćemo se poglavlju upoznati s Pascalovim trokutom i binomnim teoremom te njihovim čarima. U zadnjem poglavlju vidjet ćemo neke primjere u kojima se očituje operacija faktoriziranja.

1 Uzorci u kvadratima

Jednostavan numerički zadatak za studente s malo ili nimalo znanja o prikladnim algebarskim identitetima je pitati kako se 21^2 može izračunati iz činjenice da je $20^2 = 400$. Očekivan odgovor slijedio bi iz niza sljedeća tri produkta:

$$20 \cdot 20 = 400 \qquad 21 \cdot 20 = 420 \qquad 21 \cdot 21 = 441.$$

Ispitujući što se dogodilo u svakom koraku vidimo da je prvo dodano 20, a zatim 21. Razlog ovomu je očigledan i ideju možemo primijeniti općenito. Stoga, znajući da je $50^2 = 2500$, slijedi da je $51^2 = 2500 + 50 + 51 = 2601$ i, koristeći isti argument, znamo da je $(n+1)^2 = n^2+n+n+1 = n^2+2n+1$. To je poznat i važan rezultat koji, između ostalog, objašnjava zašto je razlika kvadrata uzastopnih prirodnih brojeva neparan broj.

Ovaj primjer možda i nije najočitiji za uvođenje tog važnog identiteta, ali zasigurno donosi zanimljiv i alternativni način gledanja. Uz to, pravimo korisnu poveznicu između numeričkog rezultata i algebarskog izraza. Algebarske identitete često najbolje predstavljamo pomoću uzoraka u brojevima ili preko slikovitih prikaza. U ovom slučaju, dobar način za započeti bio bi taj da pitamo učenike da izračunaju kvadrate brojeva kao što su 11, 21, 31 uz pomoć kalkulatora, kao što je prikazano na Slici 1., a zatim probaju pronaći neko opće rješenje.

• 11^2	121
• 21^2	441
• 31^2	961
• 41^2	1681

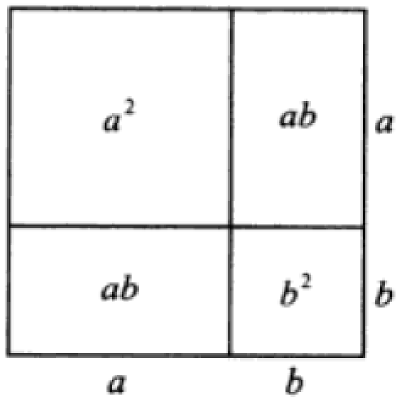
Slika 1: *Uzorak u kvadratima*

Uzorak u znamenkama jedinica, desetica i stotica je jasan i može se uočiti kako nastaviti s brojevima kao što su 2601, 3721, 5041 i tako dalje. To također vodi identitetu u poznatom obliku $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, ili ako je moguće, identitetu $(10n+1)^2 = 100n^2 + 20n + 1$. Slična analiziranja sa 19^2, 29^2, 39^2 i tako dalje daju ili $(n+9)^2 = n^2 + 18n + 81$ ili, puno korisniji rezultat, $(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$.

Dalje, generalizacijom dobivamo dva najvažnija identiteta:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{i} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Slike uvijek imaju veliku vrijednost pri ilustriranju algebarskih identiteta. Uzorci s točkama, kvadratima ili povezane obojene kocke veoma su korisni za ilustriranje kao standardna skica na Slici 2., gdje je kvadrat podijeljen na 4 dijela. Skica navodi na identitet $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Ako desni pravokutnik i kvadrat presavijemo ulijevo i donji dio presavijemo gore, možemo ilustrirati pripadajući rezultat s oduzimanjem, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, ali pritom trebamo biti pažljivi pri obrazloženju člana b^2.



Slika 2: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Drugi zadatak povezan s ovim identitetima je upitati studente da izračunaju niz vrijednosti za 'cijelo-i-pola na kvadrat': ${1\frac{1}{2}}^2$, ${2\frac{1}{2}}^2$, ${3\frac{1}{2}}^2$ i tako dalje. To također može voditi raspravi o greškama i odgovarajućim kognitivnim/mentalnim metodama. Učenici obično prave grešku pri pretpostavljanju, zbog očitih razloga, i kažu da je ${3\frac{1}{2}}^2$ jednako $9\frac{1}{4}$. Umjesto da im odmah kažemo da su u krivu, zatražimo da izračunaju $3 \cdot 3\frac{1}{2}$, što će vjerojatno dobro izračunati te kao rezultat dobiti $10\frac{1}{2}$. To se proturječi s prethodnim odgovorom: sami mogu uočiti da je nešto krivo zato što bi prvi rezultat trebao biti veći od drugog. Dodatnih $\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2}$, što je $1\frac{3}{4}$, potrebno je za točan rezultat; to jest konačno ${3\frac{1}{2}}^2 = 12\frac{1}{4}$. Neki učenici mogu prvo izračunati ${3\frac{1}{2}}^2 = {\frac{7}{2}}^2 = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$, što je u redu kada su brojevi manji, ali to može izazvati poteškoće kada se radi o većim brojevima poput ${8\frac{1}{2}}^2$. Jednom kada stekne pouzdan način računanja, učenik može izračunati vrijednosti na Slici 3. i zapisati bilo koji uzorak koji bi mu pomogao u izračunavanju nečeg ambicioznijeg kao što je $30\frac{1}{2}^2$ ili $100\frac{1}{2}^2$.

Učenici obično predlažu dvije alternativne metode za računanje cijelog dijela ovih produkata:

- Pomnoži broj svojim sljedbenikom
- Dodaj cijeli broj svom kvadratu.

$1\frac{1}{2}^2 = 2\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{2}^2 = 30\frac{1}{4}$
$2\frac{1}{2}^2 = 6\frac{1}{4}$	$6\frac{1}{2}^2 = 42\frac{1}{4}$
$3\frac{1}{2}^2 = 12\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{2}^2 = 56\frac{1}{4}$
$4\frac{1}{2}^2 = 20\frac{1}{4}$	$8\frac{1}{2}^2 = 72\frac{1}{4}$

Slika 3: *'cijelo-i-pola na kvadrat'*

To daje dvije alternativne opcije za računanje $30\frac{1}{2}^2$ na Slici 4. koja prikazuje dvije odgovarajuće alternativne algebarske forme za $(n+\frac{1}{2})^2$. Poveznica između ta dva postupka prikazana je identitetom $n(n+1) = n^2 + n$, a desni oblik je direktno povezan sa standardnim identitetom $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Zadnji primjer ilustrira čestu grešku gdje učenici pretpostavljaju da je $(a+b)^2$ jednako $a^2 + b^2$, što može biti izraženo riječima kao: 'kvadrat zbroja dva broja jednako je zbroju dva kvadrata'. To je nevjerojatno uobičajena pogreška koja se, čini se, pojavljuje i mnogo vremena nakon što učenici usvoje vještinu množenja zagrada. Čest je i slučaj u kojemu učenik, kada treba pojednostaviti izraz $(\sin\varphi + \cos\varphi)^2$, napiše da je $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$! Kada učenici naprave takvu grešku, važno je da probaju uvrstiti neke jednostavne brojeve te da shvate da njihov rezultat nije dobar. Sve bi se to trebalo provesti prije nego li ih usmjerimo na pravi postupak.

$$30\tfrac{1}{2}^2 = 30 \cdot 31 + \tfrac{1}{4} = 930\tfrac{1}{4} \qquad 30\tfrac{1}{2}^2 = 30^2 + 30 + \tfrac{1}{4} = 930\tfrac{1}{4}$$

$$(n+\tfrac{1}{2})^2 = n(n+1) + \tfrac{1}{4} \qquad (n+\tfrac{1}{2})^2 = n^2 + n + \tfrac{1}{4}$$

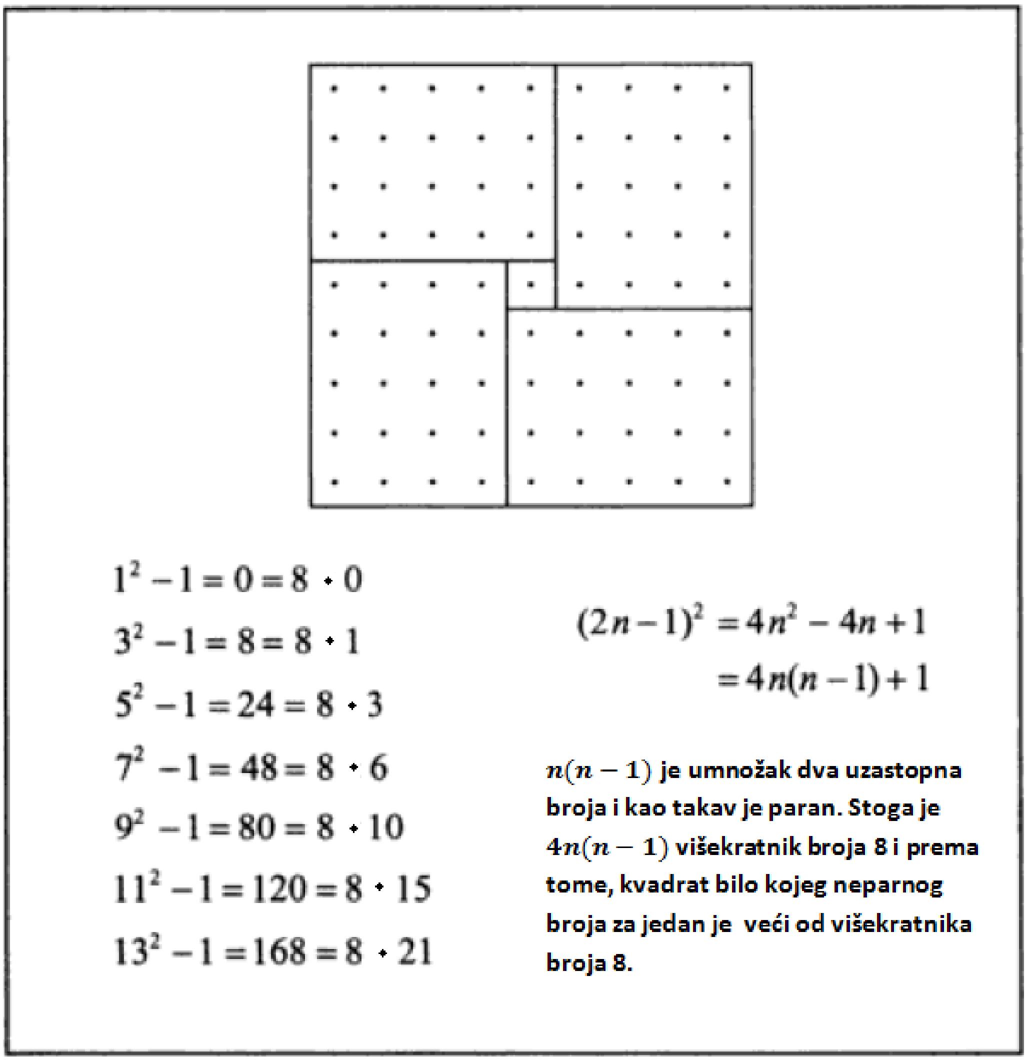
Slika 4: *Povezivanje dvije opcije*

Slika 5. pokazuje kratak zadatak koji ističe ovu jedinstvenu pogrešku. Učenicima je dan zadatak da upišu proizvoljne brojeve u prva dva stupca, izračunaju vrijednosti za treći i četvrti te da izračunaju razliku između ta dva stupca i upišu ju u peti. Nakon toga im je rečeno da daju prikladno zaglavlje zadnjem stupcu, kao drugi način za pojačanje točnog identiteta.

a	b	$(a+b)^2$	a^2+b^2	
2	3	25	13	12
3	5	64	34	30
1	4	25	17	8
3	3	36	18	18
5	7	144	74	70

Slika 5: *Dodaj pa kvadriraj ili kvadriraj pa zbroji*

Prethodna rasprava bavila se načinima uvođenja identiteta $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ i $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ i čestim zabludama koje su povezane s prvim. U udžbenicima se prvi put spominju u sklopu množenja binoma. Međutim, postoje neke prednosti u potrazi za ovim dvama identitetima, i razlici kvadrata, što ćemo detaljnije opisati kasnije, prije navođenja općenitijeg postupka. Identiteti mogu biti usko povezani s aritmetičkim postupkom, kao što smo prethodno vidjeli, i to pruža zanimljiv prijedlog kako uvesti identitete kao i neke korisne postupke za obavljanje računanja napamet. Dodatno, svaki identitet možemo primijeniti u velikom broju problema tako da algebarske ideje mogu nastati pored ove primjene. Na primjer, raščlanjivanje kvadratnog područja točaka na Slici 6. sugerira da je kvadrat neparnog broja za 1 veći od višekratnika broja 8. Uzastopni numerički slučajevi daju uzorak te je uz to dan i algebarski dokaz za kvadrat neparnog broja. Dodatno, važno je napomenuti da su višekratnici broja 8 zapravo višekratnici trokutnih brojeva; brojeva koji su oblika $T_n = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Tu činjenicu lako ilustriramo dodajući linije i dijeleći uzorak točaka na četiri pravokutnika.



Slika 6: *Kvadriranje neparnog broja*

Uvježbavanjem primjera učenici primjenjuju identitete i time se podsjećaju na njihovu važnost. Uz to, bitno je nadodati još načina uz pomoć kojih bi se omogućilo uvježbavanje.

Često postavljanje kratkih, jednostavnih pitanja, često usmenim putem, vrijedan je način razvijanja tečnosti i korisna je nadopuna tradicionalnim zadacima u udžbenicima. U ovom konkretnom slučaju, postoji uska poveznica između mentalne aritmetike i mentalne algebre zato što identiteti pružaju koristan način računanja kvadrata napamet. Slika 7. pokazuje raznovrsnost problema koji uključuju dva identiteta i pružaju praksu potrebnu učenicima da svladaju ovo gradivo.

Izračunaj $4\frac{1}{2}^2$.

Uz pomoć toga izračunaj 45^2.

Izračunaj 21^2 iz podatka $20^2 = 400$.

Uz pomoć toga izračunaj 2.1^2.

Izračunaj 19^2 iz podatka $20^2 = 400$.

Izračunaj 26^2 iz podatka $25^2 = 625$.

Izračunaj $(p+3)^2$ s $p = 3$ i $q = 5$.

Izračunaj $p^2 + q^2$ s $p = 3$ i $q = 5$.

Proširi $(p+3)^2$ -

Proširi $(2n+1)^2$.

Proširi $(x-y)^2$.

Pojednostavi $(x+y)^2 + (x-y)^2$.

Slika 7: *Tečnost pri kvadriranju u aritmetici i algebrli*

2 Razlika kvadrata

Razlika kvadrata još je jedan važan i sveprisutan identitet s kojim se učenici susreću pri izvođenju numeričkih računa. Slika 8. prikazuje koristan uvodni zadatak koji omogućuje učenicima da sami daju rješenje.

Izračunaj sljedeće:

$2^2 - 1^2$	$3^2 - 1^2$	$4^2 - 1^2$
$3^2 - 2^2$	$4^2 - 2^2$	$5^2 - 2^2$
$4^2 - 3^2$	$5^2 - 3^2$	$6^2 - 3^2$
$5^2 - 4^2$	$6^2 - 4^2$	$7^2 - 4^2$
$6^2 - 5^2$	$7^2 - 5^2$	$8^2 - 5^2$

Zatim, proširi svaki stupac.

Koji uzorak u rješenjima uočavaš?

Iskoristi uzorak pri računanju:

$21^2 - 20^2$	$31^2 - 29^2$	$22^2 - 19^2$

Proširi ideju pri računanju:

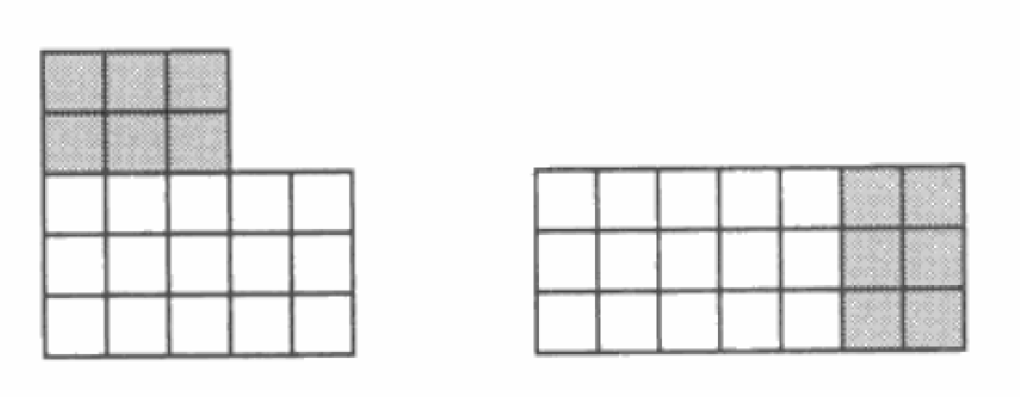
$18^2 - 14^2$	$7.5^2 - 2.5^2$	$37^2 - 27^2$
$32^2 - 28^2$	$1.7^2 - 1.5^2$	$55^2 - 45^2$

Možeš li dati neku općenitu formulu?

Slika 8: *Ispitivanje razlike kvadrata*

Rezultati u prvom stupcu (3, 5, 7, 9, 11) neparni su brojevi, ali su očigledno i zbroj brojeva koje smo kvadrirali. U drugom stupcu je zbroj udvostručen, dok je u trećem stupcu zbroj utrostručen. Koristeći ove šablone, učenici mogu izračunati i druge primjere te, ukoliko je potrebno, provjeriti rješenja na kalkulatoru. Učenicima nije teško izreći pravilo u obliku 'zbroji dva broja, zatim ih oduzmi te dobivena rješenja pomnoži', ali bi im možda zatrebala pomoć pri zapisivanju u algebarskom obliku: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

U određenom trenutku identitet moramo povezati s operacijama proširivanja i faktoriziranja izraza, i naravno, pružiti formalno objašnjenje zašto je rješenje točno. Međutim, u uvodnoj fazi slikoviti prikaz kao na Slici 9. je osobito poučan i nezaboravan način na koji možemo gledati rezultat. Obojene su kocke prilično dobro sredstvo uz pomoć kojeg bi mogli konstruirati sliku.



Slika 9: *Prikaz razlike kvadrata:* $5^2 - 2^2 = (5 - 2)(5 + 2)$

Važni matematički rezultati i postupci zahtijevaju konstantno pojačanje u toj raznovrsnosti metoda i sadržaja ako učenik želi steći prikladan stupanj poznavanja i tečnosti da bi učinkovito mogao koristiti te ideje. Primjer na Slici 10. prikazuje razliku kvadrata na različitim razinama u svrhu ilustracije opsega formi koje bi s vremenom trebale postati poznate i ukazivanja na raznovrsnost sadržaja u kojima se pojavljuje.

Mnoga pitanja poput prikazanih na Slici 10., osim što pružaju potrebnu praksu u algebarskim vještinama, nude i druge mogućnosti. Neki od njih su:

- $(2n + 1)^2 – (2n - 1)^2 = 8n$ pokazuje da je razlika kvadrata dva uzastopna neparna broja višekratnik broja 8, činjenica koja je također posljedica rezultata spomenutog ranije koji kaže da je kvadrat bilo kojeg neparnog broja za jedan veći od višekratnika broja 8.

- $(2 + \frac{1}{2})(2 - \frac{1}{2})$ pokazuje da je $2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} = 4 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$, dajući time jasan način množenja dva broja koji su za isti razlomak veći i manji od danog broja.

Faktoriziraj:

$101^2 - 99^2$

$a^2 - 4$

$2.8^2 - 2.2^2$

$9x^2 - 4y^2$

$1\frac{3^2}{4} - \frac{3^2}{4}$

$(2n+1)^2 - (2n-1)^2$

Proširi:

$(p+1)(p-1)$

$(2a+b)(2a-b)$

$29 \cdot 31 = (30+1)(30-1)$

$\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)$

$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)$

Slika 10: *Tečnost kod razlike kvadrata*

- $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1$ je uočljivo točan rezultat, posebno kada učenici vide da njihovi kalkulatori pokazuju rješenje koje je približno jednako 1. Istražujući i radeći na sličnim primjerima korisno je i učenici bi trebali vidjeti i cijeniti povezane rezultate:
$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$
i
$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

Kao dodatak ovomu, dobro je zadati učenicima da istim pristupom istraže sumu i razliku kubova:
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
i
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2).$$

3 Proširivanje i faktoriziranje

Množenjem para binoma, ili proširivanje, i inverzni proces tomu traženje faktora, faktoriziranje, su dvije najosnovnije metode korištene u konstruiranju algebarskih razmatranja. Učenici bi trebali razumjeti ekvivalentnost dva oblika i razviti neke vještine da bi mogli izvršiti ove dvije procedure. Očigledno je da množenje algebarskih izraza ima veze s metodom množenja brojeva. Slika 11. uspoređuje dva slična pristupa u udžbeniku s numeričkom ilustracijom koju prati odgovarajući algebarski pristup. Jedna metoda koristi tablicu, a druga na formalniji način proširuje izraz u redu. Učenici trebaju razviti dovoljne vještine u množenju takvih izraza tako da mogu izreći proširenja jednostavnijih izraza bez zapisivanja tablica ili dužih redova rada.

	30	2
30	900	60
3	90	6

$$\begin{aligned} 32 \cdot 33 &= 30 \cdot 33 + 2 \cdot 33 \\ &= 990 + 66 \\ &= 1056 \end{aligned}$$

	x	2
x	x^2	$2x$
3	$3x$	6

$$\begin{aligned} (x+2)(x+3) &= x(x+3) + 2(x+3) \\ &= x^2 + 3x + 2x + 6 \\ &= x^2 + 5x + 6 \end{aligned}$$

Slika 11: *Proširivanje algebarkog izraza*

Jedna od prepreka koja se javlja pri proširivanju, kao i pri faktoriziranju (što će biti spomenuto u daljnjem radu), često je poteškoća koja se javlja pri izvođenju operacija s negativnim brojevima. Kao i s drugim identitetima u ovom radu, napor koji ulažemo pri stvaranju poveznice s brojevima je koristan u ranoj fazi razvijanja vještine traženja faktora. Jednostavnu kvadratnu funkciju $x^2 + 4x + 3$, prikazanu na Slici 12., možemo ocijeniti za neke uzastopne vrijednosti za x i zatim učenicima reći da promotre uzorak u rezultatima.

Koristan dodatni zadatak za učenike je da na isti način analiziraju funkciju $x^2 + 4x + 4$, $x^2 + 4x$ i $x^2 + 4x + 2$. Svaki izraz daje pomak prema daljnjim točkama rasprave, ne zaboravivši pritom činjenicu da kvadratna funkcija nema uvijek faktore.

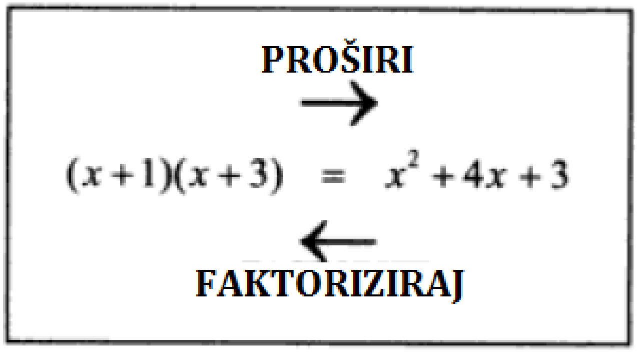
P: Što primjećuješ kod brojeva u desnom stupcu?
U1: Rastu za 7, 9, 11, 13, ...
P: Stoga, što je s $x = 7$?
U2: Bit će za 17 više, znači 80.
P: A što s $x = 19$?
U1: To je teško!
P: Primjećujete li još nešto kod brojeva?
U1: Za 4 je 35 i to je $5 \cdot 7$.
U2: A za 5 je 48 što je $6 \cdot 8$.
P: Možete li izračunati za $x = 19$?
U1: $20 \cdot 22 = 440$.
P: Zašto je to tako?
U1: Zato što je jedan faktor za 1 veći, a drugi za 3 veći.
P: Kako onda možemo zapisati $x^2 + 4x + 3$ kao umnožak dva faktora?
U1: $(x + 1)(x + 3)$
P: I kako možete provjeriti je li to istina?
U2: Jednostavno pomnožimo zagrade.

x	$x^2 + 4x + 3$
1	8
2	15
3	24
4	35
5	48
6	63

Slika 12: *Vrednovanje kvadratne funckije*

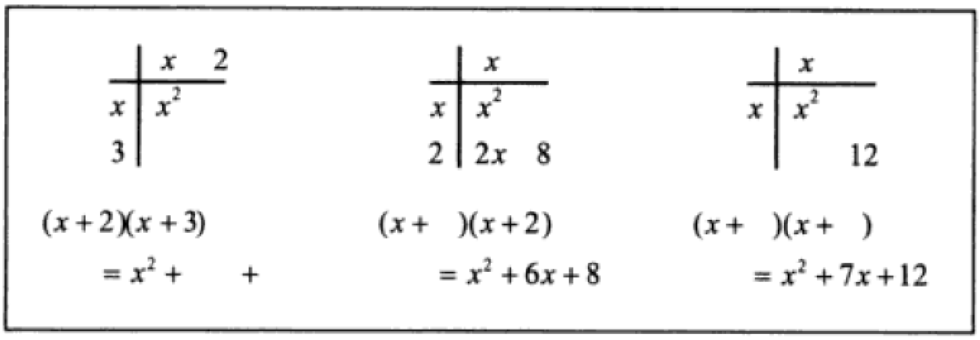
Dijalog prikazan na Slici 12. iznosi vezu između algebarskih i numeričkih faktora te inverznost proširivanja i faktoriziranja koja je objašnjena na Slici 13.

Stjecanje vještine faktoriziranja kvadratnih funkcija je potpuno ovisno o tečnosti pri inverznom postupku proširivanja. U tome nam zasigurno pomaže i ako se usmjerimo na jednostavnije primjere gdje je koeficijent uz x^2 jednak 1. Primjere koje ne



Slika 13: *Proširivanje i faktoriziranje*

možemo faktorizirati treba uvrstiti u zadatke za vježbu kako bi učenici prepoznali kada ne mogu do kraja faktorizirati. Dobar alternativni pristup koristi postepeni postupak spomenut kod proširivanja, a to je da učenici započnu od sigurnog podatka pri proširivanju i nastave s traženjem brojeva koji nedostaju u određenim ćelijama tablice što je prikazano na slici 14. Međutim, važno je da ne izgubimo pojam o krajnjem cilju. To nam daje mogućnost da napamet faktoriziramo jednostavnije izraze bez ikakvog pomoćnog sredstva kao što su tablice, ili posredni redovi rada, da prepoznamo jednostavne slučajeve povezane sa standardnim identitetima i da prepoznamo one slučajeve gdje faktorizacija nije moguća. Kada učenici shvate načelo rada i steknu tečnost na jednostavnijim primjerima, nije teško raditi i s kompliciranijim izrazima.



Slika 14: *Faktoriziranje uz pomoć tablice*

4 Objašnjenje i dokaz

Nakon što usvoje tehničke vještine, učenici bi trebali biti u mogućnosti iskoristiti ih pri rješavanju problema na način da formuliraju jednadžbu. Isto tako, trebali bi ih koristiti i kao alat za stvaranje dokaza pretpostavkama koje proizlaze iz uzoraka brojeva. U tom slučaju, kvadratne funkcije nude raznoliko područje. U sljedećim primjerima vidljivo je algebarsko objašnjenje i proširivanje ideja koje proizlaze iz numeričkih situacija.

P: Zamislite četiri uzastopna broja. Pomnožite srednji, zatim vanjski par brojeva i oduzmite rješenja. Što ste dobili?
A: 2.
B: Ja sam dobio također 2!
C: I ja isto!
P: Koje ste brojeve zamislili?
A: 5, 6, 7 i 8.
B: 2, 3, 4 i 5.
C: 1, 2, 3 i 4.
P: Čudno! Započeli ste s različitim skupom brojeva, ali ste svi dobili isti rezultat. Kako to možemo objasniti? Ako prvi broj označimo sa n, kako ćemo označiti ostale?
A: $n+1$, $n+2$, $n+3$.
P: Kako označavamo produkt srednjeg para brojeva?
B: $(n+1)(n+2)$.
P: Sada razmislite možete li dokazati zašto rezultat mora biti 2.

To direktno vodi nizu objašnjenja koji koristi vještine proširenja i pojednostavljuje dokaz da je odgovor uvijek 2:

$$(n+1)(n+2) - n(n+3) = (n^2 + 3n + 2) - (n^2 + 3n) = 2.$$

Možemo stvoriti skupinu sličnih zadataka ako uzmemo u obzir skup uzastopnih parnih ili neparnih brojeva. Osim toga, postoje i drugi skupovi brojeva koji formiraju nekakav aritmetički niz. Druge mogućnosti uključuju oduzimanje različitih faktora produkta uzetih iz skupa od četiri broja ili stvaranje primjera istog tipa koristeći skupove od tri ili pet uzastopna broja. Trebamo reći učenicima da razmisle vrijedi li isti rezultat i za skupove negativnih brojeva ili brojeva koji uključuju i razlomke. Zasigurno im nije uvijek očito da je rezultat koji je proizašao iz pozitivnih cijelih brojeva također točan i za širi skup brojeva, iako su vidjeli algebarski dokaz koji se općenito primjenjuje. Sljedeći kratki dijalog predstavlja situaciju gdje faktoriziranje pruža ključ objašnjenju zanimljivog rezultata.

P: Zamislite neki mali broj i izračunajte kub tog broja. Zatim oduzmite broj od svog kuba. Što ste dobili?
A: 60.
B: 24.
C: 120.
D: 6.

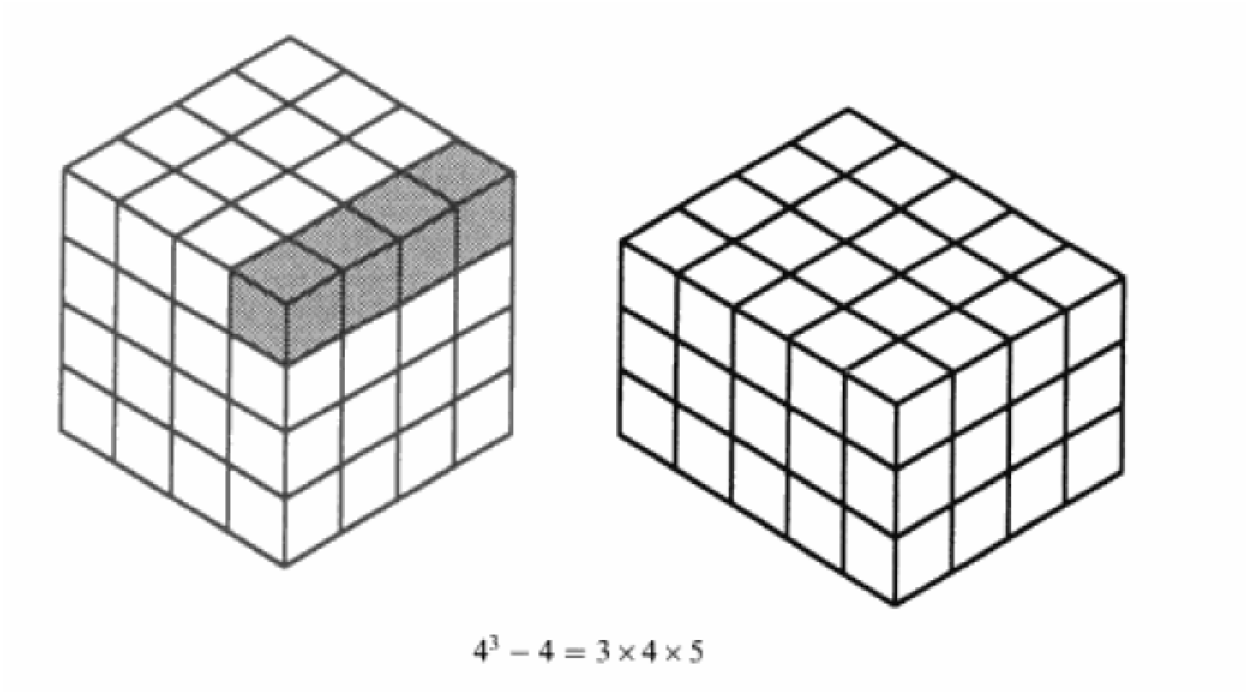
Nakon što napišemo učeničke odgovore te ih njima i predstavimo, upitat ćemo ih što primjećuju. Očekivani odgovori su da su svi brojevi višekratnici broja 6. Ukoliko neko rješenje odskače, to jest nije točno, može se lako ponovno izračunati i dobiti višekratnik broja 6. Stoga se postavlja pitanje zašto su sva rješenja višekratnici broja 6. Jednostavna algebarska manipulacija daje objašnjenje:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1).$$

Razlika broja i njegovog kuba ekvivalentna je produktu tri uzastopna broja pa su i 2 i 3, stoga i 6, faktori ovog umnoška.

Identitet je lijepo ilustriran Slikom 15. Kada velikoj kocki uklonimo zatamnjeni red kocaka, preostale kocke se mogu presložiti u kvadar, čije su dimenzije tri uzastopna broja.[1] Ilustriranje algebarskih ideja ovakvim slikama i odgovarajućim numeričkim uzorcima povećava značenje koje učenik pridodaje algebarskim izrazima i operacijama proširivanja i faktoriziranja, Svladavanje ovih važnih operacija čini njihovo učenje zanimljivijima i uspješnijima.

[1] Više detalja može se naći u [2].



Slika 15: *Razlika između broja i njegova kuba*

5 Pascalov trokut i binomni teorem

Za početak, ponovit ćemo što su binomni koeficijenti, izreći binomni teorem te iskazati definiciju Pascalovog trokuta.

Neka je n prirodan broj i k prirodan broj ili 0, $k \leq n$. Binomni koeficijent označavamo izrazom

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

za $k \geq 1$, dok za $k = 0$ po definiciji stavljamo:

$$\binom{n}{0} := 1.$$

Važan teorem vezan uz binomne koeficijente je binomni teorem.

Za svaki $x, y \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + ... + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n.$$

Binomni koeficijenti mogu se složiti u Pascalov trokut, matematičku shemu iz koje se lagano očitaju pripadajuće relacije. Koeficijente slažemo na slijedeći način:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

Izračunavanjem vrijednosti binomnih koeficijenata Pascalov trokut poprima svoj prepoznatljivi oblik kojeg vidimo za Slici 16.

Faktoriziranje polinoma stupnja većeg od dva nije uvijek očito, ali množenje više od dva, ponekad komplicirana izraza nije pretjerano teško. Međutim, ono nudi neke zanimljive mogućnosti i to zahvaljujući koeficijentima u Pascalovom trokutu koji su prikazani na Slici 16. Koeficijenti imaju mnogo zanimljivih dodataka i proširenja.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Slika 16: Pascalov trokut

Dodatno svojstvo kaže da je svaki koeficijent zbroj dva uzastopna para koeficijenata u redu iznad, jednostavno je za uočiti i pruža očigledno značenje stvaranju uzastopnih redova trokuta. Kada množenje prikažemo na formalan način, kao na Slici 17., postaje jasno kako nastaje ovo svojstvo.

$$
\begin{array}{rl}
 & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
\cdot & \hfill a+b \\
\hline
 & a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+ab^4 \\
+ & \quad a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+b^5 \\
\hline
 & a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5
\end{array}
$$

Slika 17: Objašnjenje adicijskog svojstva

Možemo istražiti i objasniti nekoliko zanimljivih svojstava:

- Zašto potencije broja 11 do 11^4 stvaraju red u Pascalovu trokutu, i u čemu je problem s 11^5?
- Zašto zbroj svakog reda daje uzastopne potencije broja 2?

- Što je pripadajući razvoj kod izraza $(a-b)$ i kako se odnose kada je $a=10$ i $b=1$, a kako kada je $a=b$?
- Kako rezultat možemo generalizirati?

Da bismo generalizirali rezultat, trebamo naći način pronalaska bilo kojeg reda u Pascalovom trokutu neovisno o redu iznad. Zanimljiv izazov za učenike predstavlja pronalazak primjerice 80. reda. Očito je da je prvi i zadnji član 1 i 80, ali nije odmah uočljivo kako izračunati sljedeće članove. Međutim, tražeći multiplikativnu poveznicu među uzastopnim članovima u redovima prije donosi jednostavan i fascinantan uzorak. Slučaj kada tražimo četvrti red prikazan je na Slici 18., gdje vidimo i kako postupati pri računanju 80. reda. Također vidimo i općeniti postupak.

Kada smo ustvrdili općeniti postupak za pronalaženje n-tog reda, možemo izvesti i formulu za r-ti član.

$$^{n}C_{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

To jednostavno može postati još jedna formula za zapamtiti. Ako ju jasno povežemo s Pascalovim trokutom i pridružimo zajedničke poteškoće koje učenici imaju, formula postaje značajnija:

- Formula će učenicima biti smislenija ako joj pristupimo preko konkretnog numeričkog zadatka kao što je

$$^{5}C_{2}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}$$

  gdje je $\frac{5!}{3!}$ prikladan način izražavanja $5\cdot 4$ što vodi prema velikim brojevima.

- Važno je da učenici budu svjesni da su i redovi i koeficijenti numerirani te da započinju s nulom, a ne jedinicom. Tada je broj reda jednak n u odgovarajućem binomnom izrazu $(a+b)^n$, a broj člana odgovara pripadnoj potenciji od b.
- S obzirom da je $^{n}C_{r}$ jednak 1 kada je $r=0$ i kada je $r=n$, vrijednost od 0! mora biti definirana kao 1. To je učenicima malo zbunjujuće, jer 0! naizgled daje vrijednost 0. Međutim, uzorak u faktorijelima prikazan ispod objašnjava zašto je to tako.

$$1 \xrightarrow{\cdot\frac{4}{1}} 4 \xrightarrow{\cdot\frac{3}{2}} 6 \xrightarrow{\cdot\frac{2}{3}} 4 \xrightarrow{\cdot\frac{1}{4}} 1$$

$$1 \xrightarrow{\cdot\frac{80}{1}} 80 \xrightarrow{\cdot\frac{79}{2}} 3160 \xrightarrow{\cdot\frac{78}{3}} 82160 \xrightarrow{\cdot\frac{77}{4}} \ldots$$

$$1 \xrightarrow{\cdot\frac{n}{1}} n \xrightarrow{\cdot\frac{n-1}{2}} \frac{n(n-1)}{2} \xrightarrow{\cdot\frac{n-2}{3}} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \xrightarrow{\cdot\frac{n-3}{4}} \ldots$$

Slika 18: Iznenađujući uzorak u redovima Pascalovog trokuta

$$4! = 24 \xrightarrow{\div 4} 3! = 6 \xrightarrow{\div 3} 2! = 2 \xrightarrow{\div 2} 1! = 1 \xrightarrow{\div 1} 0! = 1$$

- Simetričnost u svakom redu osigurava

$$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}^nC_{n-r}$$

- Formula za ^nC_r također govori na koliko načina možemo odabrati r predmeta iz skupa od n i tu interpretaciju također primjenjujemo kod binomnih koeficijenata. $^5C_2$ je koeficijent člana b^2 u razvijanju izraza $(a+b)^5$ zato što je to broj načina na koji možemo odabrati varijablu b iz 2 od 5 ponavljanja izraza $a+b$ u produktu.

Binomni teorem sažima ovakav način ocjenjivanja proširivanja binomnog izraza. Često je dan jednostavnije kao proširenje izraza $(1+x)^n$ sa svakim koeficijentom čija je pripadajuća vrijednost izvedena iz ^nC_r i dan je sa

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-3)}{3!}x^3 + \ldots$$

Newton je imao fascinantan uvid da binomni teorem ne vrijedi samo za pozitivne cijele brojeve, nego i za negativne racionalne vrijednosti za n, pod pretpostavkom da je numerička vrijednost od x manja od 1. Nastali niz je beskonačan i pretpostavka je nepotrebna ukoliko niz konvergira. Pascalov trokut nije toliko koristan u promatranju proširenja izraza kada je n racionalan broj, ali je zato veoma učinkovit kada je n negativan cijeli broj. Dodajući u svaki red nulu koja odgovara pozitivnom cijelom broju i koristeći adicijsko svojstvo, možemo izvesti redove koji odgovaraju negativnim cijelim brojevima i pripadna proširenja, kao što je prikazano na Slici 19.

1	$^{-}2$	3	$^{-}4$	5	$^{-}6$
1	$^{-}1$	1	$^{-}1$	1	$^{-}1$
1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0
1	3	3	1	0	0
1	4	6	4	1	0
1	5	10	10	5	1

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \ldots$$

Slika 19: Prošireni Pascalov trokut

Podsjećanje da numerički uzorak leži u simboličkom rezultatu je moćan način kojim pomažemo učenicima da shvate. Također je važno skretati im pažnju i na male detalje koji mogu izazvati poteškoće. Nula može biti izvor nerazumijevanja kod razmišljanja o ^nC_r. Moramo 0! dati nekakvu intuitivnu definiciju te brojati svaki red i član počevši od nule. Ipak, te male stvari povećavaju njihovu unutarnju motivaciju.

6 Primjena

Pravljenje poveznice između različitih matematičkih područja važan je dio u davanju značaja algebri. Pascalov trokut je dobar primjer matematičke ideje koja ima široku primjenu. Međutim, kvadratne funkcije obuhvaćaju još veći opseg primjena u matematici, od kojih se neke odnose na rješavanje kvadratnih jednadžbi i interpretiranje grafova.

6.1 Interpretacija grafova

Graf predstavlja jedan od načina povezivanja algebarske ideje i simbola. Pruža jasnu poveznicu između brojeva, simbola i slike. Jednadžba daje način na koji sažimamo uzorak u koordinatama točaka koje leže na grafu. Graf je apstraktni pojam, ali izgleda zanimljivo, posebno kada se promatra skup sličnih grafova.

Učenike prvo upoznajemo s grafovima linearne funkcije, pravcima. Sljedeći prirodni korak je upoznavanje učenika s grafom kvadratne funkcije.

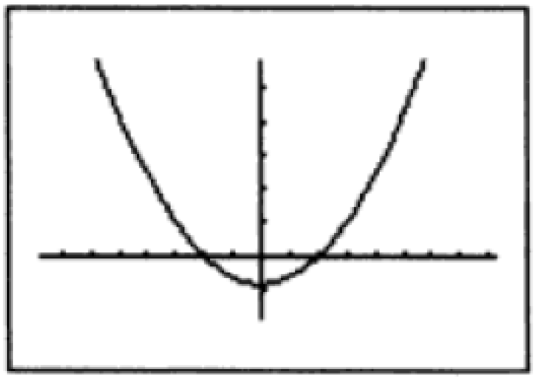
Za početak, graf funkcije $y = x^2$ je vrijedan rasprave kada uvedemo kvadratni korijen brojeva koji nisu potpuni kvadrati. Razlog tomu je taj što graf pruža jednostavan primjer korištenja grafa da bi dobili približno rješenje neke jednadžbe.

Graf kvadratne funkcije bismo trebali predstaviti zajedno s faktoriziranjem kvadratnih izraza i povezati s rješavanjem kvadratnih jednadžbi. Poveznice između faktoriziranog oblika kvadratne funkcije, rješenja pripadajuće jednadžbe i presjeka krivulje sa x osi su prilično jednostavne ideje iako učenici ne shvate odmah zašto par naizgled različitih funkcija kao $y = x^2 - 4x + 3$ i $y = (x-1)(x-3)$ mora imati identične grafove.

Jednostavan primjer $y = x^2 - 4$, prikazan na Slici 20., možemo povezati s faktoriziranim oblikom $y = (x-2)(x+2)$, kao i sa presjekom grafa s x osi u 2 i -2 i sa y osi u -4. Iz njega se lagano očita rješenje pripadne kvadratne jednadžbe.

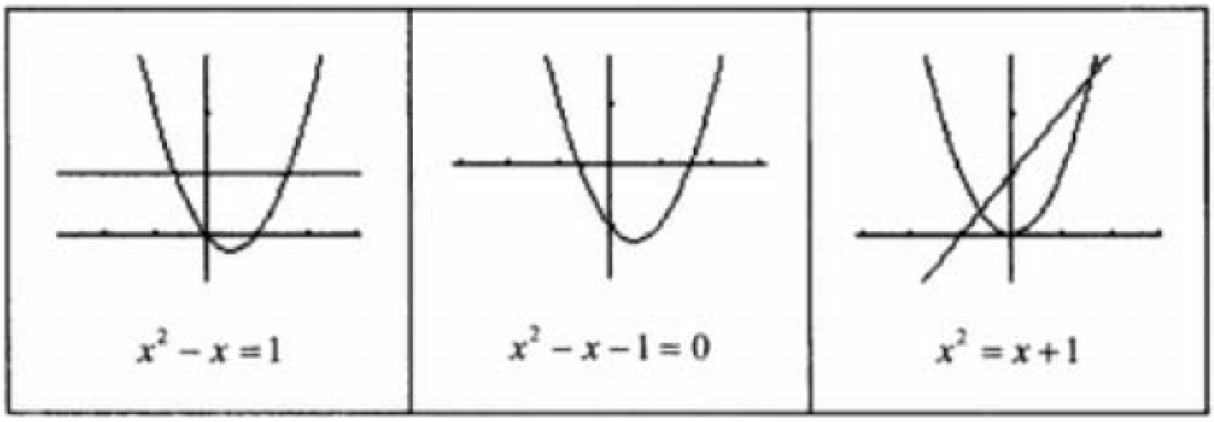
6.2 Kvadratne jednadžbe

Grafičke metode daju vrijedan uvid u rješavanje jednadžbi tako što naglašavaju broj rješenja. Skica grafa nacrtana prostoručno može biti dovoljna da identificiramo broj rješenja, ali uvećavanjem rješenja, to jest točke presjeka možemo dobiti samo približan odgovor. Međutim, grafički pristup rješavanju jednadžbi ima vrijednost u



Slika 20: Graf funkcije $y = x^2 - 4$

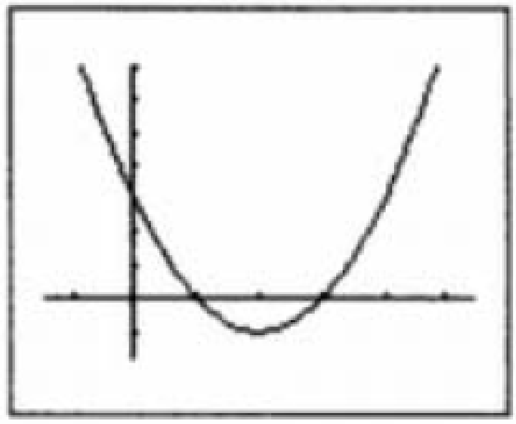
razvijanju osnovnog razumijevanja grafova, posebno kada razmatramo i alternativne načine rješavanja iste jednadžbe. Pronalaženje presjeka grafa $y = x^2 - x$ i $y = 1$ jedan je od načina rješavanja kvadratne jednadžbe $x^2 - x = 1$ grafičkom metodom. Druge mogućnosti uključuju presjek krivulje $y = x^2 - x - 1$ sa osi x i presjek krivulje $y = x^2$ sa ravnom linijom $y = x + 1$. Te tri alternative su ilustrirane na Slici 21.



Slika 21: Tri grafičke metode za rješavanje jednadžbe $x^2 - x = 1$

Crtanjem grafa kvadratne funkcije kao što je $y = x^2 - 4x + 3$, prikazane na Slici 22., odmah se pitamo gdje graf siječe os x. Upravo to daje svrhu izražavanju funkcije u obliku produkta faktora $(x - 1)(x - 3)$.

Rješavanje jednadžbe izražavanjem u obliku produkta faktora važna je ideja sa



Slika 22: Graf funkcije $y = x^2 - 4x + 3$

širokim spektrom primjene. Osnovna ideja je da jedan ili više faktora mora biti jednak nuli ako je produkt nula: $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ili $b = 0$. To vodi standardnom načinu rješavanja kvadratnih jednadžbi:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{ili} \quad x - 3 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{ili} \quad x = 3.$$

Prilikom korištenja ove metode rješavanja kvadratne jednadžbe kod učenika se javljaju sljedeće poteškoće:

- Jednadžbu kao što je $x^2 - 4x = 0$ često zapišu kao $x^2 = 4x$ i zajednički faktor je x. Kada ga pokrate, dobiju rješenje $x = 4$ i time izgube drugo rješenje $x = 0$. Važno je upozoriti učenike na opasnost ovakvog neprikladnog kraćenja i poticati ih da izraze jednadžbu u obliku $x(x-4) = 0$ tako da time ne izgube jedno od rješenja.

- Jednadžbu kao $x^2 - 3x - 4 = 0$ često zapišu kao $x^2 - 3x = 4$, faktoriziraju i dobiju $x(x-3) = 4$ i zatim riješe na način $x = 4$ ili $x-3 = 4$, koristeći zabunom postupak koji su koristili sa nulom. O takvim greškama moramo raspravljati. Najprije trebamo razjasniti da oba rješenja moraju zadovoljiti jednadžbu, a zatim pomoći učenicima da vide da ovakav princip odgovara samo nuli.

- Jednom kada uvedemo općenitu formulu za rješavanje kvadratne jednadžbe, učenici su skloni korištenju formule iako se jednadžba možda može riješiti na neki jednostavniji način, što je upravo faktoriziranje. Privlačnost formule je da 'uvijek radi' i kada ju svladaju, učenici su sigurni da će dobiti točno rješenje. Međutim, trebamo im pomoći da postanu tečni u faktoriziranju jednostavnih kvadratnih izraza. Time faktoriziranje postaje njihov prvi izbor, radije nego korištenje formule kada se radi o jednostavnim primjerima.

Zaključak

Kvadratni izrazi, zajedno s operacijama proširivanja i faktoriziranja, od fundamentalne su važnosti jer se u algebri konstantno pojavljuju u različitim formama i brojnim primjenama. Zbog svega toga je bitno da učenici razviju tečnost i razumijevanje. Važna je tečnost pri obavljanju osnovnih algebarskih operacija, kao i razumijevanje ideja koje se nalaze u pozadini. Razumijevanje ideja vodi ka uspješnosti u procesu dokazivanja i rješavanja zadataka, kasnije i pronalaženja rješenja kvadratnih jednadžbi, a time je učenikova motivacija veća. Učenicima treba prezentirati što više zadataka u kojima će moći koristiti identitete gdje naglasak treba biti na jednostavnosti, ali i učestalosti. Mnogo kratkih susreta s identitetima je djelotvornije od dugog razdoblja posvećenog prakticiranju određenih vještina. Kako većina učenika ima potrebu povezivati naučene ideje sa stvarnim svijetom, tako i korištenje dijagrama i modela s kubovima ima veliku ulogu, ne samo u uvodnoj fazi, nego i kasnije kada budemo ponovno naglašavali osnovno značenje izraza i operacija. Učenicima je jednostavno doseći trenutak kada algebru smatraju skupom besmislenih navika koji nemaju nikakvu svrhu, pa upravo zato nastavnici trebaju razvijati ideje kojima bi pojasnili značenje i matematičku svrhu te time ujedno i poticali znatiželju i interes učenika. To svakako nije lagan posao, međutim ono što dobijemo kao rezultat je neprocjenjivo i zapanjujuće.

Literatura

[1] Branimir Dakić, Neven Elezović, *Matematika 4, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije (1. dio)*, Element, Zagreb, 2009.

[2] Doug French, *Teaching and learning algebra*, Bookcraft (Bath) Ltd, Great Britain, 2002.

Sažetak

U radu smo se najprije upoznali s dva najosnovnija algebarska identiteta, a zatim i s razlikom kvadrata te smo vidjeli neke zanimljive primjere koje bismo mogli predstaviti učenicima kao motivaciju. Uz to, ponudili smo i slikovito značenje identiteta te istaknuli uobičajene pogreške koje se javljaju kod učenika. Dali smo neke primjere u kojima se ti identiteti očituju i mogućnosti koje nude. Istaknuli smo zanimljive primjere uz koje smo ponudili i algebarsko objašnjenje te dokaz. Povezali smo Pascalov trokut s faktoriziranjem i proširivanjem, te naveli neka svojstva i mogućnosti koje nudi. Na kraju rada smo vidjeli gdje se još očituje i primjenjuje faktoriziranje izraza.

Ključne riječi: identitet, binom, uzorak, kvadrati, razlika kvadrata, faktoriziranje izraza, proširivanje izraza, dokaz, Pascalov trokut, binomni teorem, graf funkcije, kvadratna jednadžba

Summary

In this work we learned more about two identities in algebra and further we learned more about difference of two squares. Some interesting examples were given which could be used to present to students and motivate them. We also explained the meaning of identities and stressed common mistakes students make. This work also includes examples of usage of identities and possibilities they offer. We stressed interesting examples where we included algebraic explanation and proof. We linked Pascal's triangle with factorizing and expanding and prompted some characteristics and possibilities it offers. At the end of this work factorizing was explained along with examples and usage.

Keywords: identity, binomial, pattern, square, difference of two squares, factorizing, expanding, proof, Pascal's triangle, binomial theorem, function, quadratic equation

Životopis

Moje ime je Vlatka Čota. Rođena sam 4. veljače 1992. godine u Slavonskom Brodu. Živim u Đakovu gdje sam pohađala Osnovnu školu J.A. Ćolnića. Nakon završetka, u Đakovu sam upisala Gimnaziju A.G. Matoša, opći smjer. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja, 2010., upisujem Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.