Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Sanja Đelatović

Trigonometrijske funkcije i neki trigonometrijski identiteti

Diplomski rad

Osijek, 2012.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Sanja Đelatović

Trigonometrijske funkcije i neki trigonometrijski identiteti

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Darija Marković

Osijek, 2012.

Sadržaj

Uvod

Trigonometrija je grana matematike koja se bavi specifičnim funkcijama kutova i njihovom primjenom. Naziv trigonometrija dolazi od grčkih riječi trigônom što znači trokut, te métron što znači mjera. Možemo ju podijeliti na *ravninsku* (kutovi i udaljenosti u ravnini) i *sfernu* (kutovi i udaljenosti u prostoru). Trigonometrija je nastala pri promatranju neba, mjerenjima zbog navigacije, te rješavanju raznih problema iz zemljomjerstva. Babilonci i Egipćani su znali za Pitagorin teorem te su to znanje koristili za gradnju piramida, mjerenje polja i tako je nastajala trigonometrija. Babilonci su također koristili seksagezimalni brojevni sustav, tj. sustav s bazom 60 kojeg mi danas koristimo za računanje kutova. U astronomiji se koristila sferna trigonometrija koja je danas zamijenjena linearnom algebrom. Iako se prvo koristila sferna trigonometrija, veću primjenu je imala ravninska trigonometrija. Geodeti ju koriste stoljećima, kao i vojni i drugi inženjeri. U fizici, trigonometrija se koristi u područjima optike i statike, te u fizikalnoj kemiji. Trigonometrija se koristi naravno u cijeloj matematici te se kroz nju primjenjuje na sve ostale znanosti. Iako se ne čini tako, trigonometrija ima svoju primjenu i u glazbi, točnije u računalnoj glazbi. Računalo ne može slušati i shvatiti glazbu, pa ju predstavlja matematički pomoću zvučnih valova. To znači da ljudi koji istražuju računalnu glazbu moraju znati osnove trigonometrije. Primjenu trigonometrije nalazimo i u modernoj arhitekturi. Lijepo zakrivljene površine od kamena i stakla bile bi nemoguće bez trigonometrije. Ravnine u zgradi se postavljaju pod određenim kutom da bi se dobila iluzija zakrivljenosti, dakle, arhitekti također moraju znati trigonometriju.

U ovom diplomskom radu obrađene su trigonometrijske funkcije te formule vezane uz njih. U prvom poglavlju opisana je povijest trigonometrije koja počinje jako rano, otprilike u drugom ili trećem tisućljeću prije nove ere. U drugom poglavlju definirane su trigonometrijske funkcije, i to trigonometrijske funkcije kojima je argument realan broj, argument kut, te posebno funkcije kojima je argument šiljasti kut. U istom poglavlju opisana su i neka svojstva trigonometrijskih funkcija kao što su periodičnost i parnost. Također su navedene domene i kodomene trigonometrijskih funkcija, te nacrtani grafovi. Detaljno je opisano crtanje grafa funkcije sinus. U trećem poglavlju su navedeni teoremi i propozicije koji govore o trigonometrijskim identitetima, te dokazi istih. U posljednjem, četvrtom poglavlju dani su primjeri zadataka u kojima se pojavljuju trigonometrijske funkcije i u kojima se koriste identiteti navedeni u radu. Zadaci su se pojavljivali na natjecanjima učenika trećeg i četvrtog razreda srednje škole.

1 Povijesni razvoj trigonometrije

1.1 Povijest trigonometrije

Trigonometrija se javlja još u starom Babilonu, Egiptu, Indiji i Kini. Ovi narodi su imali znanje praktične geometrije, te su poznavali neke pojmove koji su bili uvod u trigonometriju. U Rhindovom papirusu (1800. g. pr. n. e., Egipat) među 84 problema iz algebre, aritmetike i geometrije, javlja se i pet problema u kojima se spominje *seqt*. Seqt ustvari predstavlja kotangens, što znači da su Egipćani poznavali numeričke relacije u trokutu.

Začetnikom moderne trigonometrije smatra se Hiparh iz Grčke (oko 190.−120. g. pr. n. e.). On je prvi izračunao vrijednosti trigonometrijskih funkcija. Svaki trokut je upisivao u kružnicu tako da stranice trokuta predstavljaju tetive kružnice. Kako bi izračunao dijelove trokuta, morao je pronaći duljinu tetive kao funkciju središnjeg kuta. Iako se kao astronom najviše bavio sfernim trokutima, poznavao je formule koje se koriste u ravninskoj trigonometriji (adicijske formule za sinus i kosinus, formule polovičnog i dvostrukog kuta za sinus i kosinus, te sinusov i kosinusov poučak).

U 2. st., bitan razvoj trigonometrije načinio je Ptolomej, u svom djelu *Almagest*. Ptolomej je bio astronom i morao je koristiti neke osnove trigonometrije. U poglavljima 10 i 11 prve knjige *Almagesta*, Ptolomej se bavi konstrukcijom tablica tetiva (to je ustvari tablica koja prikazuje vrijednosti funkcije sinus). Promatrao je kutove od $0°$ do $180°$ i to u intervalima od pola stupnja.

Do 16. st., zbog dominacije astronomije među prirodnim znanostima, znanstvenike je uglavnom zanimala sferna trigonometrija. Prva knjiga koja je u cijelosti bila posvećena trigonometriji bila je knjiga *"Na trokutima svake vrste"* (1533. g.). Autor knjige je astronom *Regiomontanus* (1436. − 1476. g.). U knjizi se nalaze svi teoremi potrebni za rješavanje trokuta, bilo ravninskog ili sfernog. Međutim, ti teoremi su pisani u verbalnom obliku.

Posljednji veliki doprinos razvoju trigonometrije je izum logaritama škotskog matematičara *John Napiera* 1614. g. Tablice logaritama su uvelike olakšale numeričko računanje, uključujući sastavljanje tablica trigonometrijskih funkcija.

1.2 Nazivi trigonometrijskih funkcija

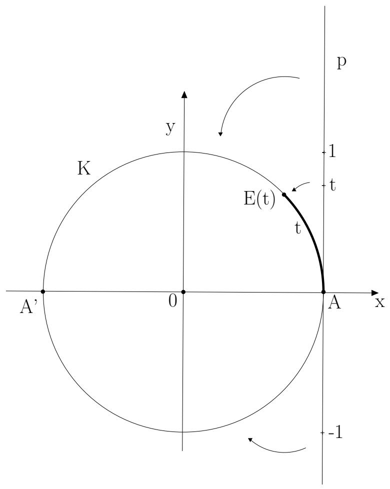
Naziv za trigonometrijsku funkciju sinus u Europu je stigao pomoću "pokvarenog telefona". Indijci prvo koriste naziv *ordhajiva* što znači polovica tetive, a zatim *jiva* što na sanskrtu znači tetiva. Arapi jiva prenose kao *jiba*. Međutim, ta riječ na arapskom nema značenje pa ju zamjenjuju sa riječi džaib (piše se isto kao jiba) koja znači zaljev. Europski prevoditelj *Robert iz Chestera* u srednjem vijeku riječ džaib prevodi doslovno na latinski te tako dolazi do naziva **sinus**.

Naziv **kosinus** nastao je u 17. st. kao kratica od *complementi sinus*, što bi u prijevodu bilo sinus komplementarnog kuta. Naziv **tangens** uvodi *Fincke* 1583. g. zbog veze sa tangentom. **Kotangens** je dobio ime iz istog razloga kao i kosinus.

2 Trigonometrijske funkcije

2.1 Definicija trigonometrijskih funkcija

Eksponencijalno preslikavanje je preslikavanje s pravca (ili skupa $\mathbb{R}$) na jediničnu kružnicu (kružnica sa središtem u ishodištu koordinatne ravnine i polumjera 1) koja je podskup koordinatne ravnine. Neka su dani jedinična kružnica K u koordinatnoj ravnini i pravac p kao na slici 1.



Slika 1. Eksponencijalno preslikavanje

Pravac namatamo na kružnicu tako da polupravac na kojemu su smješteni pozitivni brojevi namatamo suprotno od smjera pomicanja kazaljke na satu, a polupravac na kojemu su smješteni negativni brojevi u smjeru pomicanja kazaljke na satu.
Svakom broju $t \in \mathbb{R}$ pripada jedinstvena točka na brojevnom pravcu p. Nakon opisanog namatanja pravca p, svaka ta točka prelazi u točno određenu točku $E(t)$ na kružnici K. Na ovaj način je definirano preslikavanje $E : \mathbb{R} \to K$ koje nazivamo **eksponencijalno preslikavanje** pravca na kružnicu. Jedinična kružnica na koju su na opisani način smješteni realni brojevi nazivamo **brojevna (trigonometrijska) kružnica**.
Opseg jedinične kružnice je 2π. Preslikavanje E broju 0 pridružuje točku A, broju π točku A', broju 2π ponovno točku A, a broju 3π ponovno točku A' ... Također, E broju $-\pi$ pridružuje točku A', broju -2π točku A ... Općenito, vrijedi

$$E(t) = E(t + 2k\pi),\ \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Funkcija $E : \mathbb{R} \to K$ je surjekcija i original svake točke s kružnice je skup ekvidistantnih točaka na pravcu s razmakom među susjednim točkama 2π. Ako je $T \in K$ i $E(t) = T$ za neki $t \in \mathbb{R}$, tada je $E^{-1}(T) = \{t + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Drugim riječima, sve točke $t + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ pri eksponencijalnom preslikavanju padaju u istu točku T i samo one padaju u tu točku. Ovo svojstvo nazivamo **svojstvo vlakna eksponencijalnog preslikavanja** E.

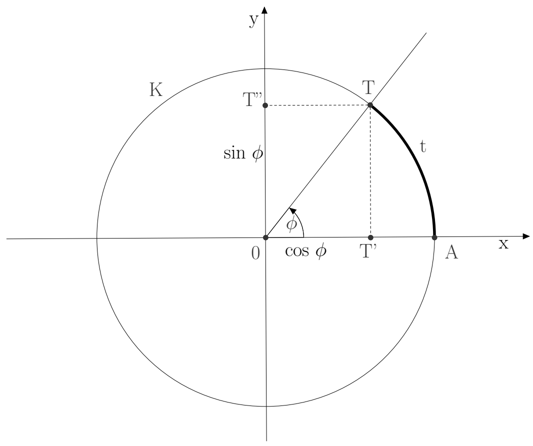
Definirajmo sada trigonometrijske funkcije. Preslikavanje koje broju $t \in \mathbb{R}$ pridružuje apscisu točke $E(t)$ nazivamo **kosinus** (označavamo ga s $\cos t$), a preslikavanje koje broju $t \in \mathbb{R}$ pridružuje ordinatu točke $E(t)$ nazivamo **sinus** (označavamo ga sa $\sin t$). Na ovaj način su dakle definirane funkcije $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pomoću funkcija sinus i kosinus definiramo funkcije **tangens** ($\mathrm{tg}\, t$) i **kotangens** ($\mathrm{ctg}\, t$)

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\, t &= \frac{\sin t}{\cos t} \\ \mathrm{ctg}\, t &= \frac{\cos t}{\sin t} \end{aligned}$$

Primijetimo da funkcija tangens nije definirana za realne brojeve t takve da je $\cos t = 0$, tj. domena funkcije tangens je $\mathcal{D}(\mathrm{tg}) = \{t \in \mathbb{R} : \cos t \neq 0\}$. Analogno, funkcija kotangens nije definirana za realne brojeve t takve da je $\sin t = 0$, odnosno domena funkcije kotangens je $\mathcal{D}(\mathrm{ctg}) = \{t \in \mathbb{R} : \sin t \neq 0\}$. Više o domenama trigonometrijskih funkcija može se pročitati u 2.5.

2.2 Trigonometrijske funkcije kuta

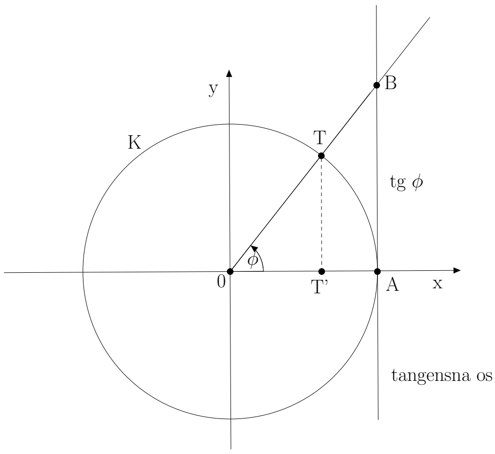
Trigonometrijske funkcije su, kao što smo vidjeli, realne funkcije realne varijable. Uz njih su često vezane trigonometrijske funkcije kuta čije su vrijednosti opet iz $\mathbb{R}$.
Neka je dana jedinična kružnica u koordinatnom sustavu kao na slici 2, te neka je dan kut ϕ.



Slika 2. Trigonometrijske funkcije kuta

S OA je označen prvi krak kuta ϕ. Neka drugi krak kuta ϕ siječe kružnicu u točki T. Apscisa točke T je kosinus kuta ϕ, odnosno $\cos\,\phi = |OT'|$, a ordinata točke T sinus kuta ϕ, odnosno $\sin\,\phi = |OT''|$.

Funkciju tangens intepretiramo na slijedeći način. U točki $(1,0)$ povučemo tangentu na kružnicu (*tangensna os*) i neka drugi krak kuta siječe tangentu u točki B kao na slici 3.



Slika 3. Funkcija tangens

Tada je ordinata točke B tangens kuta ϕ.
Pokažimo da se ova definicija funkcije tangens podudara sa prijašnjom. Trokuti $\triangle OTT'$ i $\triangle OAB$ su slični jer imaju jedan zajednički kut ($\angle TOT' = \angle BOA$), te svaki od njih ima pravi kut ($\angle TT'O$, odnosno $\angle BAO$). Iz sličnosti slijedi

$$|TT'| : |OT'| = |AB| : |OA|,$$

odnosno

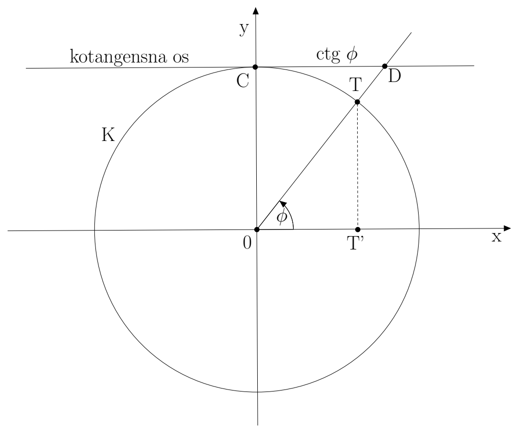
$$\sin\,\phi : \cos\,\phi = \operatorname{tg}\phi : 1.$$

Rješavanjem omjera konačno dobivamo

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{\sin\,\phi}{\cos\,\phi}.$$

Sve ovo smo promatrali za kutove kojima je vrijednost funkcije kosinus različita od 0.

Analogno možemo interpretirati funkciju kotangens. U točki $(0,1)$ povučemo tangentu (*kotangensna os*) i s D označimo sjecište drugog kraka kuta ϕ i tangente. Tada je apscisa točke D kotangens kuta ϕ.



Slika 4. Funkcija kotangens

Sa slike 4 vidimo da su trokuti $\triangle TT'O$ i $\triangle CDO$ slični, jer se podudaraju u dva kuta. Prvi od tih kutova je pravi kut $\angle DCO$ odnosno $\angle TT'O$. Također, kutovi $\angle TOT'$ i $\angle CDO$ su jednaki jer su to kutovi uz transverzalu. Nadalje, iz sličnosti navedenih trokuta slijedi omjer

$$|OT'| : |TT'| = |CD| : |CO|,$$

tj.

$$\cos\,\phi : \sin\,\phi = \operatorname{ctg} \phi : 1.$$

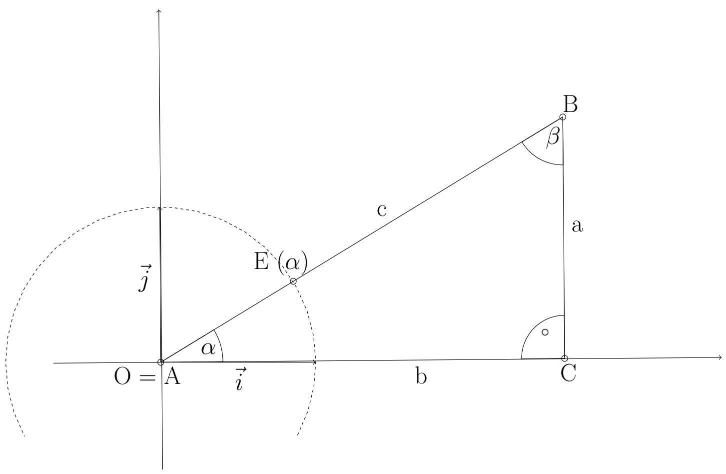
Na kraju dobivamo

$$\operatorname{ctg} \phi = \frac{\cos\,\phi}{\sin\,\phi},$$

što se podudara s ranijom definicijom. I ovdje smo promatrali dopustive kutove, tj. one u kojima je vrijednost funkcije sinus različita od 0.

2.3 Interpretacija pomoću pravokutnog trokuta

Povijesno prva interpretacija trigonometrijskih funkcija bila je interpretacija trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta. U mnogim primjenama dovoljno je promatrati navedene funkcije samo za šiljaste kutove. Svaki šiljasti kut je kut nekog pravokutnog trokuta, te ćemo stoga definirati trigonometrijske funkcije pomoću njega.
Neka je dan pravokutni trokut $\triangle ABC$ s pravim kutom kod vrha C u koordinatnom sustavu Oxy kao na slici 5.



Slika 5. Interpretacija pomoću pravokutnog trokuta

Tada je $\overrightarrow{AB} = c\,\overrightarrow{OE(\alpha)}$, gdje je $\overrightarrow{OE(\alpha)} = cos\,\alpha\,\vec{i} + \sin\,\alpha\,\vec{j}$. S druge strane, vrijedi $\overrightarrow{AB} = b\,\vec{i} + a\,\vec{j}$, pa možemo izjednačiti desne strane danih jednakosti:

$$b\,\vec{i} + a\,\vec{j} = c\,(cos\,\alpha\,\vec{i} + \sin\,\alpha\,\vec{j}).$$

Izjednačavajući komponente uz jedinične vektore, dobivamo da je $b = c\cos\,\alpha, a = c\sin\,\alpha$, odnosno

$$\cos\,\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\sin\,\alpha = \frac{a}{c}.$$

Iz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\,\alpha}{\cos\,\alpha}$ slijedi

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},$$

te iz $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\,\alpha}{\sin\,\alpha}$ slijedi

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

2.4 Periodičnost trigonometrijskih funkcija

Prije nego pokažemo da su trigonometrijske funkcije periodične funkcije, definirat ćemo kakve su to uopće periodične funkcije. Definicija preuzeta iz [3]

Definicija 2.1 *Neka je $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je f* ***periodična funkcija*** *s periodom $\tau \neq 0$ ako vrijedi:*

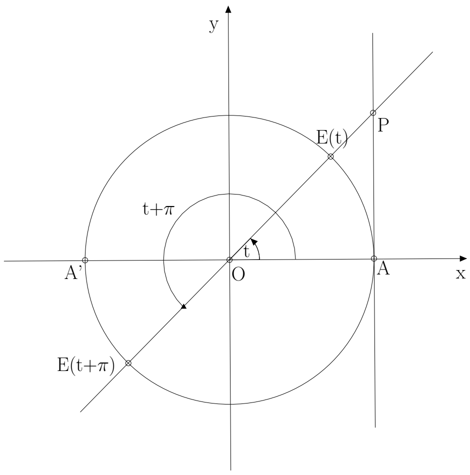
1. $x \in \mathcal{D}(f) \Rightarrow x + \tau \in \mathcal{D}(f)$
2. $f(x + \tau) = f(x)$, $x \in \mathcal{D}(f)$.

Broj τ nazivamo ***period*** *funkcije f, a najmanji pozitivni period funkcije f nazivamo* ***temeljni period*** *funkcije f.*

Ako je neka funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična, dovoljno je promatrati ju samo na segmentu $[0, \tau]$, odnosno na bilo kojem segmentu duljine temeljnog perioda. Ako želimo nacrtati graf periodične funkcije na segmentu $[a, a + \tau]$, gdje je a realan broj i višekratnik temeljnog perioda, to ćemo napraviti tako da graf te funkcije translatiramo (pomaknemo ulijevo ili udesno ovisno o tome je li a pozitivan ili negativan) sa segmenta $[0, \tau]$ za a.
Slijedeći teorem govori da su trigonometrijske funkcije periodične funkcije. Teorem i dokaz preuzeti iz [6] (str. 16)

Teorem 2.1 *Trigonometrijske funkcije su periodične funkcije. Temeljni period funkcija sinus i kosinus je 2π, a funkcija tangens i kotangens π.*

Dokaz.
Pokazali smo da vrijedi $E(t+2k\pi) = E(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. Zbog toga točke $E(t+2k\pi)$ i $E(t)$ imaju iste koordinate. Ako točka t pripada domeni neke trigonometrijske funkcije, onda joj pripada i točka $t + 2k\pi$ te su im vrijednosti u tim točkama jednake. Dakle, 2π (pa zbog toga i $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) je period svih trigonometrijskih funkcija. Ovime smo dokazali da su trigonometrijske funkcije periodične.
Neka je $\tau > 0$ temeljni period kosinusa, tj. $\cos(t + \tau) = \cos t$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Za $t = 0$ slijedi $\cos(\tau) = \cos(0) = 1$. Zbog svojstva vlakna eksponencijalne funkcije slijedi da je $\tau \in \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots\}$. Najmanji pozitivan broj ovog skupa je 2π koji je, kako smo već dokazali, period kosinusa, pa je i temeljni period.
Za sinus postupamo analogno. $\sin(t + \tau) = \sin t$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, pa za $t = \frac{\pi}{2}$ slijedi $\sin(\frac{\pi}{2} + \tau) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Kao i kod kosinusa, zbog svojstva eksponencijalnog vlakna je $\tau = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, odnosno, najmanji pozitivan period je 2π.
Sada ćemo dokazati da je π temeljni period za tangens (analogno se dokaže i za kotangens). Pretpostavimo da je $\operatorname{tg}(t + \tau) = \operatorname{tg} t$, za sve dopustive t. Prvo, $\tau = \pi$ je period.



Slika 6. Periodičnost funkcije tangens

Točke $E(t)$ i $E(t+\pi)$ su dijametralne, pa pravci $OE(t)$ i $OE(t+\pi)$ sijeku tangensnu os u istoj točki P i stoga su ordinate jednake, tj. $\operatorname{tg}(t+\pi) = \operatorname{tg} t$. Stavimo li $t = 0$ u $\operatorname{tg}(t+\tau) = \operatorname{tg} t$, dobivamo $\operatorname{tg}(\tau) = 0$, pa dužina $\overline{AP}$ degenerira u točku, odnosno, točka P se podudara sa točkom A. Zbog toga su jedina dva moguća položaja točke $E(\tau)$ točke A i A'. Najmanji pozitivan broj τ za koji je $|PA| = 0$ jest $\tau = \pi$. ■

2.5 Domene i kodomene trigonometrijskih funkcija

Funkcije sinus i kosinus su definirane na cijelom skupu $\mathbb{R}$, odnosno za sve kutove (pozitivne, negativne i nul-kut) ako su shvaćene kao funkcije kuta. Dakle, $\mathcal{D}(\sin) = \mathcal{D}(\cos) = \mathbb{R}$. Međutim, problem nastaje kod funkcija tangens i kotangens. Kako je tangens definiran s $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, on nije definiran za $t \in \mathbb{R}$ takav da je $\cos t = 0$. Vrijednost funkcije kosinus je 0 za $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pa slijedi

$$\mathcal{D}(\operatorname{tg}) = \left\{ t \in \mathbb{R} : t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle.$$

Analogno se postupa i sa funkcijom kotangens. Kako je $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$, slijedi da nije definiran za $t \in \mathbb{R}$ takve da je $\sin t = 0$, a to je $t = k\pi$. Dakle,

$$\mathcal{D}(\operatorname{ctg}) = \left\{ t \in \mathbb{R} : t \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle k\pi, (k+1)\pi \right\rangle.$$

Nekada je korisno znati kakvog je predznaka vrijednost neke trigonometrijske funkcije određenog kuta ovisno o tome u kojem se kvadarantu koordinatne ravnine kut nalazi. Predznake nam prikazuje slijedeća tablica:

	I	II	III	IV
sin	$+$	$+$	$-$	$-$
cos	$+$	$-$	$-$	$+$
tg	$+$	$-$	$+$	$-$
ctg	$+$	$-$	$+$	$-$

2.6 Parnost i neparnost trigonometrijskih funkcija

Kao što smo kod periodičnosti prvo definirali općenito, tako ćemo i ovdje na početku definirati što znači da je funkcija parna, odnosno neparna. Definicije preuzete iz [4] (str. 64, 66)

Definicija 2.2 *Kažemo da je funkcija f* ***parna*** *ako*

1. $x \in \mathcal{D}(f) \Rightarrow -x \in \mathcal{D}(f)$
2. $f(-x) = f(x), \forall\, x \in \mathcal{D}(f)$

Graf Γ parne funkcije $f(x)$ je simetričan obzirom na os y. Ako je $(x,\, f(x)) \in \Gamma$, onda je zbog parnosti i $(-x,\, f(x)) \in \Gamma$, a te dvije točke su simetrične obzirom na os y.

Definicija 2.3 *Kažemo da je funkcija f* ***neparna*** *ako*

1. $x \in \mathcal{D}(f) \Rightarrow -x \in \mathcal{D}(f)$
2. $f(-x) = -f(x), \forall\, x \in \mathcal{D}(f)$

Graf Γ neparne funkcije $f(x)$ prolazi ishodištem koordinatne ravnine i centralno je simetričan obzirom na isto. Za $x = 0$ slijedi $f(0) = -f(0)$, odnosno $2f(0) = 0$ iz čega slijedi $f(0) = 0$. Točke $(x,\, f(x))$ i $(-x,\, -f(x))$ su centralno simetrične obzirom na ishodište.

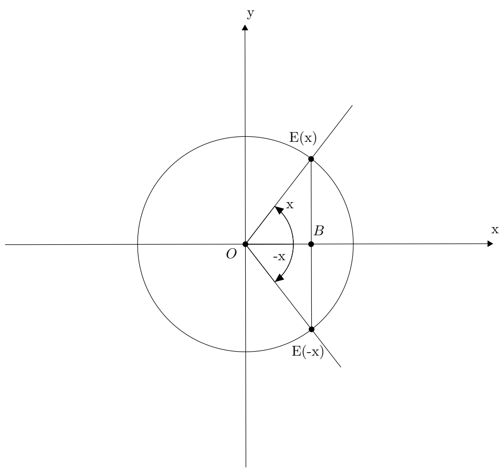
Slijedeća propozicija ([6], str. 12) govori o tome kakve su trigonometrijske funkcije obzirom na (ne)parnost.

Propozicija 2.1 *Funkcija* cos *je parna, a* sin, tg *i* ctg *su neparne funkcije, odnosno*

$$\cos(-t) = \cos t$$

$$\sin(-t) = -\sin t$$
$$\mathrm{tg}(-t) = -\,\mathrm{tg}\, t$$
$$\mathrm{ctg}(-t) = -\,\mathrm{ctg}\, t.$$

Dokaz.
Za $t \in \mathbb{R}$, apscisa točke $E(t)$ je $\cos t$, a ordinata $\sin t$. Trokuti $\triangle OBE(t)$ i $\triangle OBE(-t)$ su sukladni (S-K-S). Naime, imaju zajedničku stranicu ($\overline{BO}$), duljine stranica $\overline{OE(t)}$ i $\overline{OE(-t)}$ su jednake (obje su polumjeri jedinične kružnice), te su im kutovi između navedenih stranica sukladni.



Iz sukladnosti trokuta slijedi da su apscise od $E(t)$ i $E(-t)$ jednake, a ordinate suprotne. Dakle,

$$\cos(-t) = \cos\, t \qquad \text{i} \qquad \sin(-t) = -\sin\, t.$$

Za tangens i kotangens se također može dokazati pomoću slike, a može i na slijedeći način:

$$\text{tg}(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin\, t}{\cos t} = -\,\text{tg}t$$

$$\text{ctg}(-t) = \frac{\cos(-t)}{\sin(-t)} = \frac{\cos\, t}{-\sin t} = -\,\text{tg}t$$

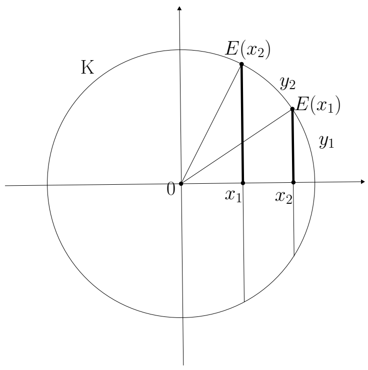
■

2.7 Grafovi trigonometrijskih funkcija

Prije same konstrukcije grafova trigonometrijskih funkcija, reći ćemo nešto o njihovim intervalima monotonosti i neprekidnosti. O tome nam govore slijedeća dva teorema ([6], str. 25, 28).

Teorem 2.2 *Restrikcija funkcije sinus na segment* $\left[-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right]$ *strogo je monotono rastuća funkcija, a restrikcija funkcije kosinus na segment* $\left[0,\, \pi\right]$ *strogo je monotono padajuća funkcija. Restrikcija funkcije tangens na interval* $\left\langle -\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ *strogo je monotono rastuća, a funkcije kotangens na interval* $\left\langle 0,\, \pi\right\rangle$ *strogo je monotono padajuća.*

Dokaz. Da funkcija $t \to \sin\, t$ raste na $\left[0,\, \frac{\pi}{2}\right]$ pokazat ćemo geometrijski (slika7).



Slika 7. Rast funkcije sinus

Sa slike vidimo da su $2y_1 = 2\sin t_1$ i $2y_2 = 2\sin t_2$ duljine tetiva koje pripadaju lukovima t_1 i t_2. Budući da većem luku pripada veća tetiva, slijedi da za $0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2}$ vrijedi

$$2y_1 = 2\sin t_1 < 2y_2 = 2\sin t_2,$$

odnosno

$$\sin t_1 < \sin t_2.$$

Za segment $\left[-\frac{\pi}{2},\, 0\right]$ koristimo neparnost funkcije sinus.

Iz $-\frac{\pi}{2} \leq t_1 < t_2 \leq 0$ slijedi

$$0 \leq -t_2 < -t_1 \leq \frac{\pi}{2},$$

odnosno

$$\sin(-t_2) < \sin(-t_1).$$

Sada iskoristimo svojstvo parnosti (poglavlje 2.1) i dobivamo

$$-\sin t_2 < -\sin t_1,$$

odnosno

$$\sin t_1 < \sin t_2.$$

Ovime smo dokazali da je restrikcija sinusa na segment $\left[-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right]$ strogo rastuća funkcija.

Za funkciju kosinus postupamo na slijedeći način. Na $\left[0,\, \frac{\pi}{2}\right]$ vrijedi da je $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$. Funkcija sinus na navedenom segmentu raste, pa raste i $\sin^2 t$, a $1-\sin^2 t$, pa onda i $\sqrt{1-\sin^2 t}$ padaju. Slijedi da funkcija kosinus na $\left[0,\, \frac{\pi}{2}\right]$ (strogo) pada. Na segmentu $\left[\frac{\pi}{2},\, \pi\right]$ koristimo formulu redukcije (vidi 3.2), $\cos(\frac{\pi}{2}+t) = -\sin t$, odakle slijedi da kosinus i ovdje (strogo) pada. Dakle, restrikcija funkcije kosinus na segment $[0, \pi]$ je strogo monotono padajuća funkcija.

Funkciju kotangens promatramo prvo na $\big[0, \frac{\pi}{2}\big\rangle$. Po definiciji je $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, pa zbog činjenice da je brojnik pozitivan i rastući, a nazivnik pozitivan i padajući slijedi da je

$$0 \leq \sin t_1 < \sin t_2 \qquad \text{i} \qquad \cos t_1 > \cos t_2 > 0,$$

za

$$t_1, t_2 \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big\rangle.$$

Odavde dobivamo

$$\frac{\sin t_1}{\cos t_1} < \frac{\sin t_2}{\cos t_2},$$

odnosno

$$\operatorname{tg} t_1 < \operatorname{tg} t_2.$$

Ako je

$$-\frac{\pi}{2} < t_1 < t_2 \leq 0,$$

tada je

$$0 \leq -t_2 < -t_1 < \frac{\pi}{2}.$$

Slijedi

$$\operatorname{tg}(-t_2) < \operatorname{tg}(-t_1),$$

odakle zbog neparnosti dobivamo

$$-\operatorname{tg} t_2 < -\operatorname{tg} t_1,$$

odnosno

$$\operatorname{tg} t_1 < \operatorname{tg} t_2.$$

U dokazu za funkciju kotangens postupa se analogno kao i za tangens, te ćemo ga zbog toga ovdje izostaviti. Rast funkcije tangens može se i geometrijski pokazati koristeći činjenicu da većem kutu (odnosno većem lûku) odgovara veća stranica. Taj dokaz se može pogledati u [6], str. 26. ∎

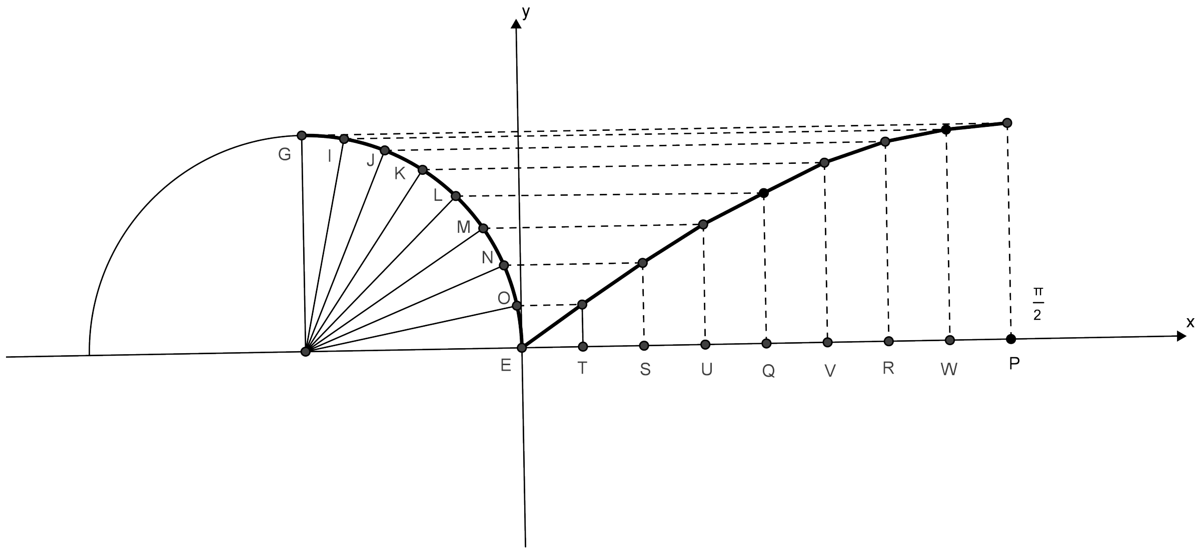
Neprekidnost trigonometrijskih funkcija slijedi iz tvrdnje slijedećeg teorema.

Teorem 2.3 *Neka je* $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ *otvoreni interval, a* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *monotona funkcija takva da je slika* $\mathrm{I}' = f(\mathrm{I}) \subseteq \mathbb{R}$ *također otvoreni interval. Tada je* f *neprekidna funkcija.*

Dakle, iz teorema slijedi da su $\sin_{|\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}$ i $\cos_{|\langle 0, \pi\rangle}$ neprekidne funkcije. Iz navedenoga i formula redukcije (poglavlje 3.2), lako se zaključi da su $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije. Kako je kvocijent neprekidnih funkcija opet neprekidna funkcija, slijedi da su i funkcije tangens i kotangens neprekidne na svom području definicije.

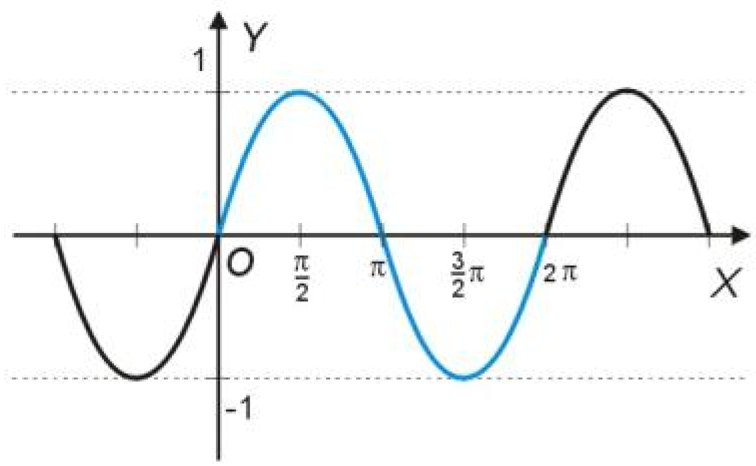
Sada ćemo pokazati kako konstruirati graf funkcije $t \to \sin t$, te kako izgledaju grafovi svih trigonometrijskih funkcija.

Graf funkcije $t \to \sin t$ nazivamo **sinusoida**. Zbog svojstava funkcije sinus (neparnost, formule komplementiranja), dovoljno je gledati funkciju na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Da bi što detaljnije nacrtali prvu četvrtinu sinusoide, prvu četvrtinu brojevne kružnice podijelimo na $m = 2^n, n \in \mathbb{N}$ dijelova, te kroz diobene točke povučemo paralele s x osi. Što je veći broj m, sinusoida će biti detaljnije nacrtana. Na slici 8 je $m = 8$.
Segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ također podijelimo na m jednakih dijelova i u diobenim točkama povučemo okomice na x os. Sjecišta okomica i paralela daju točke grafa koje spojimo glatkom krivuljom. Na ovaj način smo dobili sinusoidu u prvom kvadrantu.



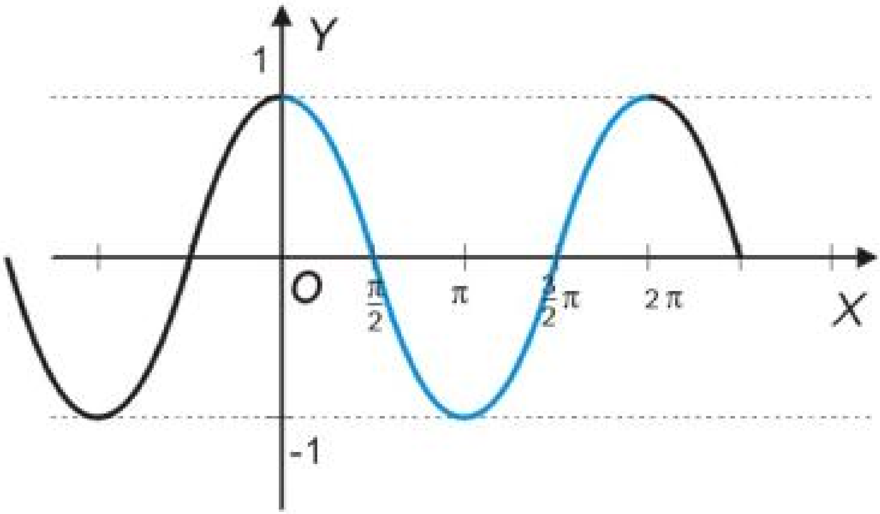
Slika 8. Crtanje sinusoide

Budući da je $\sin(\pi - t) = \sin t$, graf funkcije sinus na segmentu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ je simetričan grafu na $[0, \frac{\pi}{2}]$ obzirom na pravac $x = \frac{\pi}{2}$. Nadalje, iz neparnosti funkcije sinus slijedi da je sinusoida simetrična obzirom na ishodište, te smo na taj način opisali sinusoidu na $[-\pi, \pi]$. Dalje ju periodički produžimo, te ona izgleda kao na slici 9.



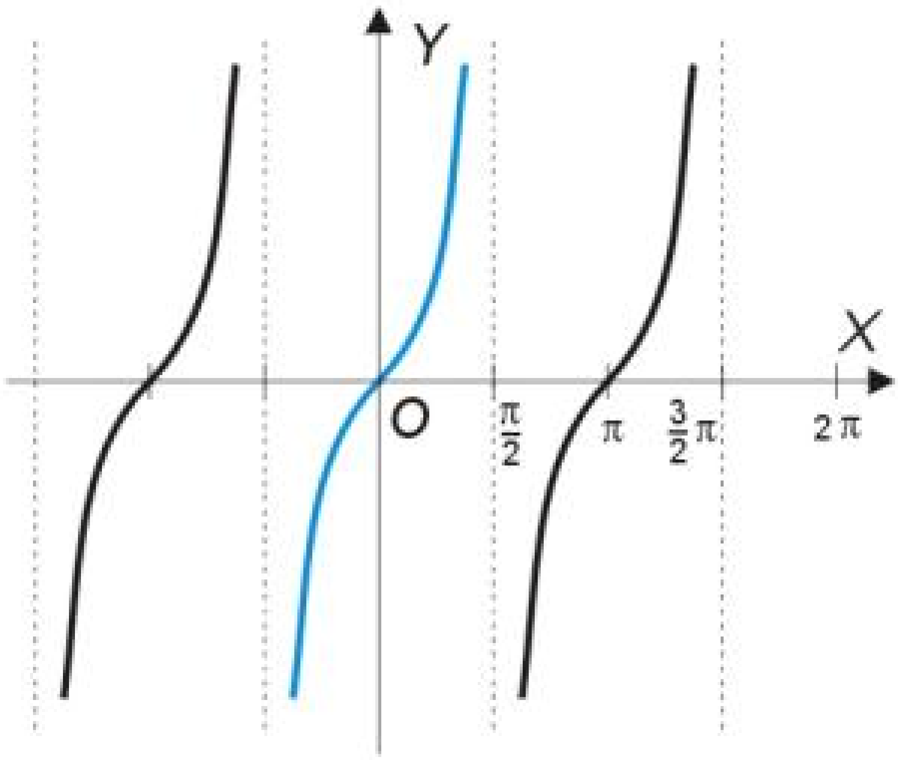
Slika 9. Sinusoida

Kosinusoida je graf funkcije kosinus. Budući da vrijedi $\cos t = \sin(t + \frac{\pi}{2})$, kosinusoidu dobijemo tako da pomaknemo sinusoidu za $\frac{\pi}{2}$ uzduž x osi. Na slici 10. vidimo graf funkcije sinus.

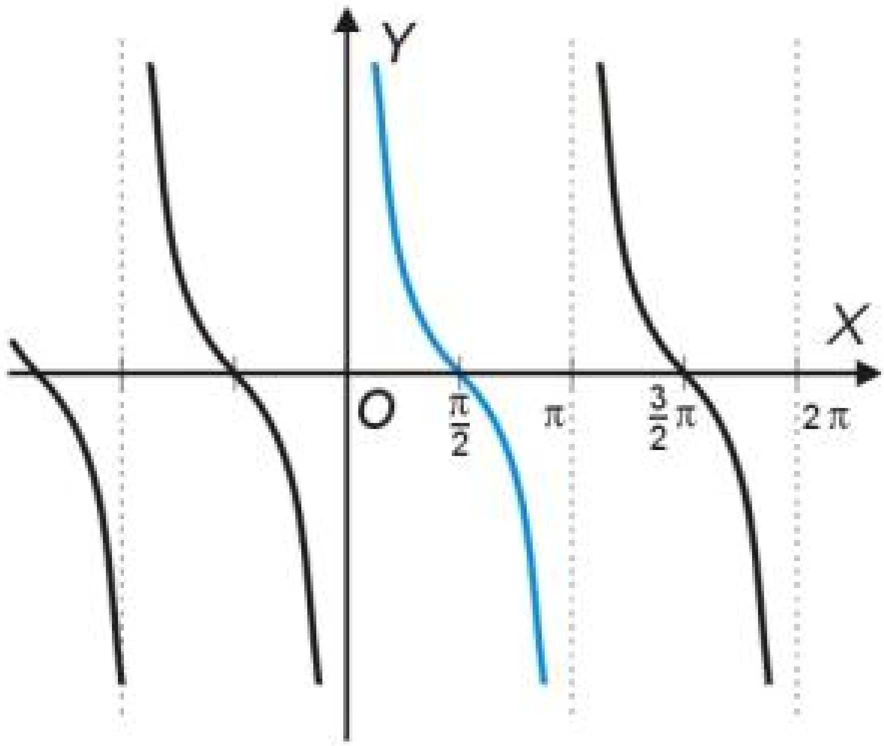


Slika 10. Kosinusoida

Grafovi funkcija tangens i kotangens izgledaju kao na slikama 11 i 12.



Slika 11. Graf funkcije tangens



Slika 12. Graf funkcije kotangens

Kod grafa funkcije tangens, pravci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ su *vertikalne asimptote*, i to su upravo one točke u kojima funkcija nije definirana. Također, kod grafa funkcije kotangens su pravci $x = k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ vertikalne asimptote.

3 Trigonometrijski identiteti

3.1 Osnovni trigonometrijski identiteti

Osnovna veza između trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus dana je slijedećom propozicijom ([6], str. 21).

Propozicija 3.1 *Za svaki* $t \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1. \tag{1}$$

Dokaz 1. Koordinate točke (x, y) na jediničnoj kružnici zadovoljavaju jednakost $x^2 + y^2 = 1$. Kako su koordinate točke $E(t)$ dobivene eksponencijalnim preslikavanjem točke $t \in \mathbb{R}$ na jediničnu kružnicu jednake $\cos t$ i $\sin t$, slijedi navedeni identitet.

Dokaz 2. Ako trigonometrijske funkcije propozicije shvatimo kao funkcije kuta (npr. ϕ), onda vrijedi $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$. Dokaz sada slijedi iz slike 2 analogno kao dokaz 1.

Dokaz 3. Promatrajmo pravokutni trokut kao na slici 5. U svakom pravokutnom trokutu vrijedi Pitagorin poučak $a^2 + b^2 = c^2$. Ako ovu jednakost podijelimo s c^2 (što je svakako različito od 0), slijedi

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Kako smo trigonometrijske funkcije u pravokutnom trokutu definirali sa $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ i $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, slijedi jednakost

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

■

Drugi trigonometrijski identitet je

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1. \tag{2}$$

On slijedi direktno iz definicija trigonometrijskih funkcija tangens i kotangens.
Ako je zadana vrijednost jedne trigonometrijske funkcije nekog kuta, iz formula (1) i (2) se mogu izračunati vrijednost preostalih trigonometrijskih funkcija toga kuta. Izrazimo sada preostale trigonometrijske funkcije ako je zadana jedna od njih.

1. Ako je zadan $\sin t$...
   Iz (1) slijedi $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, odnosno

   $$\cos t = \pm\sqrt{1 - \sin^2 t}.$$

   Kako je $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, a $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$, slijedi

   $$\operatorname{tg} t = \pm\frac{\sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}},$$

   $$\operatorname{ctg} t = \pm\frac{\sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sin t}.$$

2. Ako je zadan $\cos t$...
   Iz (1) slijedi $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$, odnosno
   $$\sin t = \pm\sqrt{1-\cos^2 t}.$$
   Dalje slijedi
   $$\operatorname{tg} t = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t},$$
   $$\operatorname{ctg} t = \pm\frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}.$$
3. Ako je zadan $\operatorname{tg} t$...
   Ako (1) podijelimo s $\cos^2 t$ dobivamo
   $$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \operatorname{tg}^2 t,$$
   odakle slijedi
   $$\cos t = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}.$$
   Ako $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$ napišemo u obliku $\sin t = \operatorname{tg} t \cdot \cos t$, slijedi
   $$\sin t = \pm\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}.$$
   Iz (2) slijedi
   $$\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t}.$$
4. Ako je zadan $\operatorname{ctg} t$...
   Ako (1) podijelimo sa $\sin^2 t$ dobivamo
   $$\frac{1}{\sin^2 t} = 1 + \operatorname{ctg}^2 t,$$
   odakle slijedi
   $$\sin t = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t}}.$$
   Ako $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$ napišemo u obliku $\cos t = \operatorname{ctg} t \cdot \sin t$, slijedi
   $$\cos t = \pm\frac{\operatorname{ctg} t}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t}}.$$
   Iz (2) slijedi
   $$\operatorname{tg} t = \frac{1}{\operatorname{ctg} t}.$$

Izvedene relacije prikazuje slijedeća tablica.

Traži se \ Zadano	$\sin \mathbf{t}$	$\cos \mathbf{t}$	$\mathrm{tg}\, \mathbf{t}$	$\mathrm{ctg}\, \mathbf{t}$
$\sin \mathbf{t}$	$\sin \mathbf{t}$	$\pm\sqrt{1-\cos^2 t}$	$\pm\frac{\mathrm{tg}\, t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 t}}$
$\cos \mathbf{t}$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 t}$	$\cos \mathbf{t}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}}$	$\pm\frac{\mathrm{ctg}\, t}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 t}}$
$\mathrm{tg}\, \mathbf{t}$	$\pm\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t}$	$\mathrm{tg}\, \mathbf{t}$	$\frac{1}{\mathrm{ctg}\, t}$
$\mathrm{ctg}\, \mathbf{t}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}$	$\pm\frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}$	$\frac{1}{\mathrm{tg}\, t}$	$\mathrm{ctg}\, \mathbf{t}$

3.2 Formule komplementiranja i redukcije

Propozicija 3.2 *Za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - t) = \sin t, \quad \sin(\tfrac{\pi}{2} - t) = \cos t$$

Također je

$$\mathrm{tg}(\tfrac{\pi}{2} - t) = \mathrm{ctg}\, t, \quad \mathrm{ctg}(\tfrac{\pi}{2} - t) = \mathrm{tg}\, t$$

za sve dopustive t, tj. za $t \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$, $t \in \mathcal{D}(\mathrm{ctg})$

Dokaz.
Ako je t šiljasti kut, tada dokaz provodimo pomoću slike 5. Kut α nam predstavlja argument t. Kako je u pravokutnom trokutu $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, kut β predstavlja argument $\frac{\pi}{2} - t$ u navedenim formulama. Slijedi

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - t) = \cos \beta = \tfrac{a}{c} = \sin \alpha = \sin t$$

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - t) = \sin \beta = \tfrac{b}{c} = \cos \alpha = \cos t$$

$$\mathrm{ctg}(\tfrac{\pi}{2} - t) = \mathrm{ctg}\, \beta = \tfrac{a}{b} = \mathrm{tg}\, \alpha = \mathrm{tg}\, t$$

$$\mathrm{tg}(\tfrac{\pi}{2} - t) = \mathrm{tg}\, \beta = \tfrac{b}{a} = \mathrm{ctg}\, \alpha = \mathrm{ctg}\, t$$

■

Još jedan dokaz navedene propozicije može se pronaći u [6], str. 23.

Formule redukcije su formule koje izražavaju trigonometrijske formule argumenata $-t$, $\frac{\pi}{2} \pm t$, $\pi \pm t$, $\frac{3\pi}{2} \pm t$, $2\pi \pm t$. Ovdje ćemo takve formule samo navesti bez dokazivanja. Skice dokaza nekih od njih, te interpretacije formula redukcije mogu se pogledati u [6] (str. 23). Ove formule se mogu dokazati i pomoću adicijskih formula (3.1).

1. Ako je argument $-t$, to su ustvari formule parnosti, odnosno neparnosti.
2. Ako je argument $\frac{\pi}{2} - t$, to su navedene formule komplementiranja.
3. Za argument $\frac{\pi}{2} + t$ vrijedi

$$\begin{array}{rr}\cos(\frac{\pi}{2}+t)=-\sin\, t, & \sin(\frac{\pi}{2}+t)=\cos\, t\\ \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}+t)=-\operatorname{ctg} t, & \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}+t)=-\operatorname{tg} t\end{array}$$

Ove formule se jednostavno dokažu uvrštavanjem $-t$ umjesto t u formule komplementiranja, te primjenom parnosti, odnosno neparnosti trigonometrijskih funkcija.

4. Za argument $\pi - t$ vrijede slijedeće formule

$$\begin{array}{rr}\cos(\pi-t)=-\cos\, t, & \sin(\pi-t)=\sin\, t\\ \operatorname{tg}(\pi-t)=-\operatorname{tg} t, & \operatorname{ctg}(\pi-t)=-\operatorname{ctg} t\end{array}$$

5. Za $\pi + t$ vrijedi

$$\begin{array}{rr}\cos(\pi+t)=-\cos\, t, & \sin(\pi+t)=-\sin\, t\\ \operatorname{tg}(\pi+t)=\operatorname{tg} t, & \operatorname{ctg}(\pi+t)=\operatorname{ctg} t\end{array}$$

6. Ako je argument $\frac{3\pi}{2} - t$ vrijedi

$$\begin{array}{rr}\cos(\frac{3\pi}{2}-t)=-\sin\, t, & \sin(\frac{3\pi}{2}-t)=-\cos\, t\\ \operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2}-t)=-\operatorname{ctg} t, & \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2}-t)=-\operatorname{tg} t\end{array}$$

7. Za argument $\frac{3\pi}{2} + t$ vrijedi

$$\begin{array}{rr}\cos(\frac{3\pi}{2}+t)=\sin\, t, & \sin(\frac{3\pi}{2}+t)=-\cos\, t\\ \operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2}+t)=\operatorname{ctg} t, & \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2}+t)=\operatorname{tg} t\end{array}$$

8. Ako je argument $2\pi + t$, vrijedi

$$\begin{array}{rr}\cos(2\pi+t)=\cos\, t, & \sin(2\pi+t)=\sin\, t\\ \operatorname{tg}(2\pi+t)=\operatorname{tg} t, & \operatorname{ctg}(2\pi+t)=\operatorname{ctg} t\end{array}$$

9. Konačno, za $2\pi - t$ vrijedi

$$\begin{array}{rr}\cos(2\pi-t)=\cos\, t, & \sin(2\pi-t)=-\sin\, t\\ \operatorname{tg}(2\pi-t)=-\operatorname{tg} t, & \operatorname{ctg}(2\pi-t)=-\operatorname{ctg} t\end{array}$$

3.3 Adicijske formule

Adicijske formule su formule kojima se izražavaju vrijednosti trigonometrijskih funkcija zbroja pomoću vrijednosti trigonometrijskih funkcija na pribrojnicima.

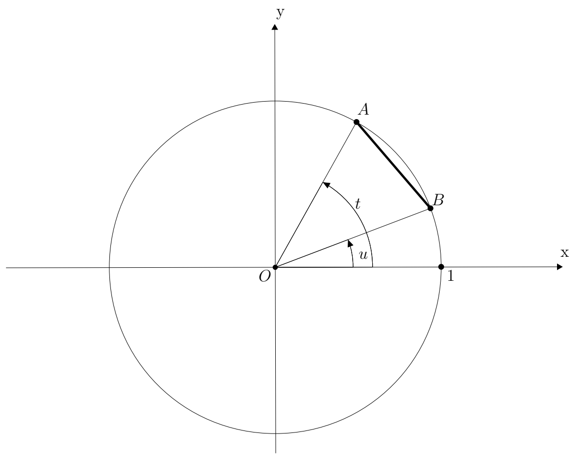
Teorem 3.1 *Vrijedi*

$$\begin{aligned}
\cos(t\pm u) &= \cos\, t\,\cos\, u \mp \sin\, t\,\sin\, u,\ \forall\, t,u\in\mathbb{R}\\
\sin(t\pm u) &= \sin\, t\,\cos\, u \pm \cos\, t\,\sin\, u,\ \forall\, t,u\in\mathbb{R}\\
\operatorname{tg}(t\pm u) &= \frac{\operatorname{tg} t\pm\operatorname{tg} u}{1\mp\operatorname{tg} t\,\operatorname{tg} u},\ \textit{za sve dopustive } t \textit{ i } u\\
\operatorname{ctg}(t\pm u) &= \frac{\operatorname{ctg} t\,\operatorname{ctg} u\mp 1}{\operatorname{ctg} u\pm\operatorname{ctg} t},\ \textit{za sve dopustive } t \textit{ i } u
\end{aligned}$$

Potrebno je napomenuti da se istovremeno uzimaju gornji odnosno donji predznaci. Postoji puno dokaza ovog teorema (vidi [5], str. 186), no mi ćemo ovdje navesti dva.

Dokaz 1.([6], str. 33)

Dokažimo prvo $\cos(t-u) = \cos\, t \,\cos\, u + \sin\, t\, \sin\, u$. Uzmimo $0 \le t, u \le 2\pi$. Promotrimo točke $A = (\cos t, \sin t)$ i $B = (\cos u, \sin u)$ na trigonometrijskoj kružnici.

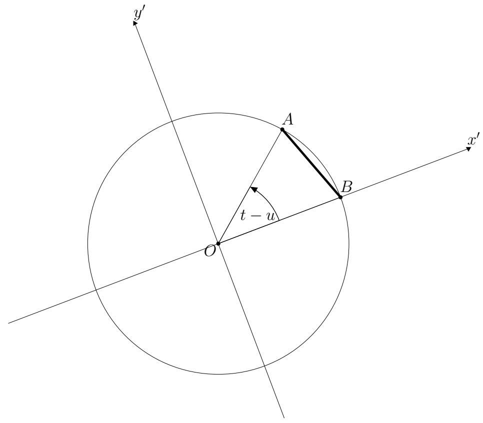


Slika 13. Točke A i B u sustavu Oxy

Računat ćemo $|AB|$ u sustavu Oxy i zarotiranom sustavu $Ox'y'$.

U sustavu Oxy (slika 13) imamo

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= (\cos t - \cos u)^2 + (\sin t - \sin u)^2 \\ &= 2(1 - \cos t \cos u - \sin t \sin u) \end{aligned}$$



Slika 14. Točke A i B u sustavu $Ox'y'$

S druge strane, u sustavu $Ox'y'$ (slika 14) imamo da je $A = (\cos(t-u), \sin(t-u))$ i $B = (1, 0)$, pa je

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= [\cos(t-u) - 1]^2 + \sin^2(t-u) \\ &= \cos^2(t-u) - 2\cos(t-u) + 1 + \sin^2(t-u) \\ &= 2[1 - \cos(t-u)] \end{aligned}$$

Kako se rotacijom ne mijenja udaljenost, izjednačavanjem slijedi

$$\cos(t-u) = \cos\, t\, \cos\, u + \sin\, t\, \sin\, u.$$

Ova formula ne vrijedi samo za $0 \le t, u \le 2\pi$ nego $\forall t, u \in \mathbb{R}$, jer uvijek postoje cijeli brojevi k i l takvi da je $2k\pi \le t < 2\pi(k+1)$, $2l\pi \le u < 2\pi(l+1)$, tj. $0 \le t - 2k\pi < 2\pi$, $0 \le u - 2l\pi < 2\pi$.

Formulu za kosinus zbroja dokazujemo na slijedeći način, te u dokazu koristimo (ne)parnost funkcija sinus i kosinus.

$$\begin{aligned} \cos(t+u) &= \cos(t - (-u)) \\ &= \cos t \cos(-u) + \sin t \sin(-u) \\ &= \cos t \cos u - \sin t \sin u \end{aligned}$$

Formulu za sinus zbroja dokazujemo pomoću formula komplementiranja (poglavlje 3.2).

$$\begin{aligned} \sin(t+u) &= \cos[\tfrac{\pi}{2} - (t+u)] \\ &= \cos[(\tfrac{\pi}{2} - t) - u] \\ &= \cos(\tfrac{\pi}{2} - t)\cos u + \sin(\tfrac{\pi}{2} - t)\sin u \\ &= \sin t \cos u + \cos t \sin u \end{aligned}$$

Sinus razlike dokazujemo analogno, samo stavimo $-u$ umjesto u.

Još ćemo navesti dokaz za tangens zbroja.

$$\operatorname{tg}(t+u)=\frac{\sin(t+u)}{\cos(t+u)}=\frac{\sin t\cos u+\cos t\sin u}{\cos t\cos u-\sin t\sin u}=\frac{\frac{\sin t\cos u}{\cos t\cos u}+\frac{\cos t\sin u}{\cos t\cos u}}{\frac{\cos t\cos u}{\cos t\cos u}-\frac{\sin t\sin u}{\cos t\cos u}}=\frac{\operatorname{tg} t+\operatorname{tg} u}{1-\operatorname{tg} t\operatorname{tg} u}.$$

Formula za kotangens zbroja se dokaže analogno, a formule za tangens i kotangens razlike se dokažu tako da se u formule za tangens i kotangens zbroja uvrsti $-u$ mjesto u. ■

Prije drugog dokaza adicijskih formula, definirat ćemo matricu rotacije. Prema [1], matrica rotacije za kut ϕ oko ishodišta definira se sa

$$\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}$$

Dokaz 2.([5], str. 193)
Budući da je svejedno jesmo li rotaciju izvršili prvo za kut t, a zatim za kut u ili odmah za kut $t+u$, vrijedi

$$\begin{bmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos u & -\sin u\\ \sin u & \cos u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(t+u) & -\sin(t+u)\\ \sin(t+u) & \cos(t+u)\end{bmatrix}$$

Množeći matrice s lijeve strane dobivamo slijedeću jednakost

$$\begin{bmatrix}\cos t\cos u-\sin t\sin u & -(\cos t\sin u+\sin t\cos u)\\ \sin t\cos u+\cos t\sin u & -\sin t\sin u+\cos t\cos u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(t+u) & -\sin(t+u)\\ \sin(t+u) & \cos(t+u)\end{bmatrix}$$

Kada izjednačimo odgovarajuće elemente matrica s lijeve i desne strane, dobijemo formule za sinus i kosinus zbroja.

Za ostale formule iz teorema 3.1 postupamo analogno kao u prvom dokazu. ■

3.4 Trigonometrijske formule dvostrukog i polovičnog kuta

Posljedice adicijske formule su formule za računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija dvostrukog i plovičnog kuta.

Teorem 3.2 *Za sve dopustive $t\in\mathbb{R}$ vrijedi*

$$\begin{aligned}\sin 2t &= 2\sin t\,\cos t\\ \cos 2t &= \cos^2 t-\sin^2 t\\ \operatorname{tg} 2t &= \frac{2\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg}^2 t}\\ \operatorname{ctg} 2t &= \frac{\operatorname{ctg}^2 t-1}{2\operatorname{ctg} t}\end{aligned}$$

Dokaz. Ove formule slijede iz adicijskih uvrštavajući t umjesto u.

Teorem 3.3 *Za sve dopustive* $\frac{t}{2}, t \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$\begin{aligned}
\sin\frac{t}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\\
\cos\frac{t}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}\\
\operatorname{tg}\frac{t}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}} = \frac{\sin t}{1+\cos t} = \frac{1-\cos t}{\sin t}\\
\operatorname{ctg}\frac{t}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\cos t}} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{1+\cos t}{\sin t}
\end{aligned}$$

3.5 Pretvorbe produkta u sumu i sume u produkt trigonometrijskih funkcija

Pogledajmo adicijske formule za funkciju kosinus:

$$\begin{aligned}
\cos(t+u) &= \cos t \cos u - \sin t \sin u\\
\cos(t-u) &= \cos t \cos u + \sin t \sin u
\end{aligned}$$

Ako zbrojimo navedene formule dobivamo jednakost

$$\cos(t+u) + \cos(t-u) = 2\cos t \cos u,$$

odakle slijedi formula

$$\cos t \cos u = \frac{\cos(t+u)+\cos(t-u)}{2} \tag{3}$$

za umnožak dvaju funkcija kosinus.
Analogno, ako zbrojimo adicijske formule za sinus $\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$ i $\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$, dobivamo produkt funkcija sinus i kosinus

$$\sin t \cos u = \frac{\sin(t+u)+\sin(t-u)}{2}. \tag{4}$$

Formulu za produkt dvaju funkcija sinus dobivamo tako da oduzmemo adicijske formule za kosinus. Fomula glasi

$$\sin t \sin u = \frac{\cos(t-u)-\cos(t+u)}{2} \tag{5}$$

Formule (3), (4) i (5) nazivamo **formule pretvorbe produkta u sumu trigonometrijskih funkcija**.

Sada ćemo navesti propoziciju koja govori o **pretvorbi sume u produkt trigonometrijskih funkcija**.

Propozicija 3.3 *Za sve t, u vrijedi*

$$\begin{aligned}
\cos t+\cos u &= 2\cos\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}\\
\cos t-\cos u &= -2\sin\frac{t+u}{2}\sin\frac{t-u}{2}\\
\sin t+\sin u &= 2\sin\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}\\
\sin t-\sin u &= 2\sin\frac{t-u}{2}\cos\frac{t+u}{2}.
\end{aligned}$$

Za sve $t,u\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ *vrijedi*

$$\operatorname{tg} t\pm\operatorname{tg} u=\frac{\sin(t\pm u)}{\cos t\cos u}$$

Za sve $t,u\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$ *vrijedi*

$$\operatorname{ctg} t\pm\operatorname{ctg} u=\frac{\sin(u\pm t)}{\sin t\sin u}$$

Dokaz.
Uvedimo oznake x i y, takve da je $x+y=t$, $x-y=u$.
Tada je $x=\frac{t+u}{2}$ i $y=\frac{t-u}{2}$.
Slijedi

$$\begin{aligned}
\cos t+\cos u &= \cos(x+y)+\cos(x-y)\\
&= 2\cos x\cos y\\
&= 2\cos\tfrac{t+u}{2}\cos\tfrac{t-u}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos t-\cos u &= \cos(x+y)-\cos(x-y)\\
&= -2\sin x\sin y\\
&= -2\sin\tfrac{t+u}{2}\sin\tfrac{t-u}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin t+\sin u &= \sin(x+y)+\sin(x-y)\\
&= 2\sin x\cos y\\
&= 2\sin\tfrac{t+u}{2}\cos\tfrac{t-u}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin t-\sin u &= \sin(x+y)-\sin(x-y)\\
&= 2\cos x\sin y\\
&= 2\cos\tfrac{t+u}{2}\sin\tfrac{t-u}{2}
\end{aligned}$$

Formule za tangens i kotangens slijede formalnim transformacijama.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} t\pm\operatorname{tg} u &= \frac{\sin t}{\cos t}\pm\frac{\sin u}{\cos u}\\
&= \frac{\sin t\cos u\pm\cos t\sin u}{\cos t\cos u}\\
&= \frac{\sin(t\pm u)}{\cos t\cos u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} t \pm \operatorname{ctg} u &= \frac{\cos t}{\sin t} \pm \frac{\cos u}{\sin u} \\
&= \frac{\cos t \sin u \pm \sin t \cos u}{\sin t \sin u} \\
&= \frac{\sin(u \pm t)}{\sin t \sin u}
\end{aligned}$$

4 Zadaci u kojima se pojavljuju trigonometrijske funkcije

Posljednje poglavlje posvećeno je zadacima u kojima se pojavljuju trigonometrijske funkcije. Pokazat ćemo neke od zadataka koji su se pojavljivali na natjecanjima učenika srednjih škola. Trigonometrija se uvodi u drugom razredu srednje škole, i to trigonometrija pravokutnog trokuta. Trigonometrijske funkcije opširnije se uvode u trećem razredu srednje škole, pa se tako i na natjecanjima pojavljuju za učenike trećih i četvrtih razreda. Također, pokazat ćemo na primjeru kako se dokazuju neke trigonometrijske nejednakosti pomoću poznate aritmetičko-geometrijske nejednakosti.

4.1 Zadaci sa natjecanja

Zadatak 1 *(Općinsko/školsko natjecanje* 2008., 3. *razred)*
Ako je $\sin 2x = a$*, odredi* $\sin^6 x + \cos^6 x$.

Rješenje
Kubiranjem osnovnog trigonometrijskog identiteta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ slijedi

$$\sin^6 x + 3\sin^4 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^4 x + \cos^6 x = 1.$$

Sređivanjem dobivamo

$$\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1,$$

odnosno

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 3\frac{\sin^2 2x}{4} = 1 - \frac{3}{4}a^2.$$

Zadatak 2 *(Županijsko natjecanje* 2010., 3. *razred)*
Ako je $a + a^{-1} = 2\cos x$*, dokažite da je tada* $a^4 + a^{-4} = 2\cos 4x$.

Rješenje

$$\begin{aligned} a + a^{-1} &= 2\cos x \qquad /^2 \\ a^2 + 2aa^{-1} + a^{-2} &= 4\cos^2 x \end{aligned}$$

Prebacivanjem srednjeg člana sa lijeve strane na desnu stranu slijedi

$$\begin{aligned} a^2 + a^{-2} &= 4\cos^2 x - 2 \\ &= 4\cos^2 x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 2\cos^2 x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x \\ &= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= 2\cos 2x \end{aligned}$$

Ponovimo navedeni postupak još jednom:

$$a^2 + a^{-2} = 2\cos 2x \qquad /^2$$

$$a^4 + 2a^2a^{-2} + a^{-4} = 4\cos^2 2x$$

$$\begin{aligned}
a^4 + a^{-4} &= 4\cos^2 2x - 2 \\
&= 4\cos^2 2x - 2(\sin^2 2x + \cos^2 2x) \\
&= 2\cos^2 2x + 2\cos^2 2x - 2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x \\
&= 2(\cos^2 2x - \sin^2 2x) \\
&= 2\cos 4x
\end{aligned}$$

Zadatak 3 *(Županijsko natjecanje 1994., 3. razred)*
Za $\alpha,\, \beta \in \langle 0,\, \pi\rangle$ izrazite broj $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$ pomoću brojeva $a = \sin\alpha + \sin\beta$ i $b = \cos\alpha + \cos\beta$.

Rješenje

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} \tag{6}$$

Da bi dobili vrijednost traženog izraza, moramo izračunati vrijednosti brojnika i nazivnika.

$$\begin{aligned}
a = \sin\alpha + \sin\beta \quad &/^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta \\
b = \cos\alpha + \cos\beta \quad &/^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta
\end{aligned}$$

Zbrajanjem brojeva a^2 i b^2, te sređivanjem slijedi

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2},$$

a korištenjem formule za kosinus polovičnog kuta dobivamo

$$\cos\frac{(\alpha - \beta)}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{a^2+b^2-2}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Pomoću formule za pretvorbu sume u produkt trigonometrijskih funkcija kosinus slijedi

$$b = \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$

odakle dobivamo

$$\cos\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{b}{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{b}{2\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\sin\frac{\alpha + \beta}{2} = \sqrt{1 - \cos^2\frac{\alpha + \beta}{2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{7}$$

Koristeći formulu za pretvorbu produkta u sumu dobivamo

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha + \beta}{2} + \cos\frac{\alpha - \beta}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}) = \frac{a^2 + b^2 + 2b}{4\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{8}$$

Konačno, uvrštavajući (7) i (8) u (6), slijedi

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{4a}{a^2 + b^2 + 2b}.$$

Zadatak 4 *(Školsko/gradsko natjecanje* 2011., 3. *razred)*
Ako je $\operatorname{tg} x = 4 + \operatorname{ctg} x$, *izračunajte* $\frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x}$.

Rješenje

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x} = \frac{(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)}{(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x)} = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 1}$$

Iz uvjeta $\operatorname{tg} x = 4 + \operatorname{ctg} x$ slijedi

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 4,$$

a kvadriranjem ovog izraza slijedi $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x = 16$, odnosno

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 1 = 17$$

Dakle,

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x} = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 1} = \frac{4}{17}.$$

Zadatak 5 *(Županijsko natjecanje* 2007., 4. *razred)*
Suma triju pozitivnih brojeva x, y, z *jednaka je* $\frac{\pi}{2}$. *Izračunajte* $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} z$, *ako je poznato da* $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg} y$ *i* $\operatorname{ctg} z$ *čine aritmetički niz.*

Rješenje
Budući da $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg} y$ i $\operatorname{ctg} z$ čine aritmetički niz, vrijedi

$$\operatorname{ctg} y = \frac{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} z}{2}.$$

Iz adicijskog teorema za kotangens

$$\operatorname{ctg}(x+z) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} z - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} z},$$

dobivamo

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} z &= 1 + (\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} z) \operatorname{ctg}(x+z) \\ &= 1 + 2 \operatorname{ctg} y \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - y) \\ &= 1 + 2 \operatorname{ctg} y \operatorname{tg} y = 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

Zadatak 6 *(Općinsko/školsko natjecanje* 2008., 4. *razred)*
Ako su $\sin(y+z-x)$, $\sin(z+x-y)$ *i* $\sin(x+y-z)$ *uzastopni članovi aritmetičkog niza, dokaži da su* $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} y$ *i* $\operatorname{tg} z$ *također uzastopni članovi artimetičkog niza.*

Rješenje
Uvjet da su $\sin(y+z-x)$, $\sin(z+x-y)$ i $\sin(x+y-z)$ uzastopni članovi aritmetičkog niza se može napisati kao

$$\sin(z+x-y) - \sin(y+z-x) = \sin(x+y-z) - \sin(z+x-y).$$

Korištenjem formule za pretvaranje razlike sinusa u produkt, dobivamo

$$2\cos\frac{2z}{2}\sin\frac{2(x-y)}{2}=2\cos\frac{2x}{2}\sin\frac{2(y-z)}{2},$$

odnosno

$$\cos z\sin(x-y)=\cos x\sin(y-z).$$

Primjenom adicijske formule za sinus dobivamo

$$\cos z\sin x\cos y-\cos z\cos x\sin y=\cos x\sin y\cos z-\cos x\cos y\sin z,$$

te dijeljenjem s $\cos x\cos y\cos z$ slijedi

$$\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=\operatorname{tg} y-\operatorname{tg} z$$

što znači da su $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} y$ i $\operatorname{tg} z$ uzastopni članovi artimetičkog niza.

Zadatak 7 *(Državno natjecanje* 2007.*,* 3. *razred)*

a) *Dokažite da vrijedi* $\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} x\operatorname{tg}(60^\circ+x)\operatorname{tg}(60^\circ+x)$.

b) *Izračunajte* $\operatorname{tg} 20^\circ\operatorname{tg} 40^\circ\operatorname{tg} 60^\circ\operatorname{tg} 80^\circ$.

Rješenje

a) Primjenom adicijske formule za tangens slijedi:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 3x &= \operatorname{tg}(2x+x)=\frac{\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} x}\\ &= \frac{\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{\frac{3\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^3 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}}{\frac{1-3\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}}\\ &= \frac{3\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}\end{aligned}$$

S druge strane vrijedi:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x\operatorname{tg}(60^\circ+x)\operatorname{tg}(60^\circ+x) &= \operatorname{tg} x\frac{\operatorname{tg} 60^\circ+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} 60^\circ\operatorname{tg} x}\frac{\operatorname{tg} 60^\circ-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} 60^\circ\operatorname{tg} x}\\ &= \operatorname{tg} x\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg} x}\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg} x}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x}\\ &= \operatorname{tg} x\frac{3-\operatorname{tg}^2 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}=\frac{3\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}\end{aligned}$$

b) Ako u dokazanu jednakost (pod a)) stavimo $x=20^\circ$, slijedi

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 60^\circ &= \operatorname{tg} 20^\circ\operatorname{tg} 80^\circ\operatorname{tg} 40^\circ \qquad /\operatorname{tg} 60^\circ\\ \operatorname{tg}^2 60^\circ &= \operatorname{tg} 20^\circ\operatorname{tg} 40^\circ\operatorname{tg} 60^\circ\operatorname{tg} 80^\circ\\ 3 &= \operatorname{tg} 20^\circ\operatorname{tg} 40^\circ\operatorname{tg} 60^\circ\operatorname{tg} 80^\circ\end{aligned}$$

Zadatak 8 *(Državno natjecanje* 1996., 3. *razred)*
Dokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost

$$\sin^5 x + \cos^5 x + \sin^4 x \leq 2.$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje

$$\begin{aligned}
\sin^5 x + \cos^5 x + \sin^4 x \leq \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^4 x &= 2\sin^4 x + (1-\sin^2 x)^2 \\
&= 3\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1 \\
&= 3(\sin^2 x - \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3} \leq 3(1-\frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Da bi vrijedila jednakost, svugdje moraju biti jednakosti, odnosno

$$\sin^5 x = \sin^4 x,\ \cos^5 x = \cos^4 x,\ \sin^2 x = 1.$$

Iz

$$\sin^4 x(\sin x - 1) = 0 \qquad \text{i} \qquad \sin^2 x = 1$$

slijedi $\sin x = 1$, tj. jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

4.2 Primjena AG-nejednakosti u trigonometriji

Aritmetičko-geometrijska nejednakost (AG-nejednakost) kaže da za svaka dva pozitivna realna broja vrijedi

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy},$$

odnosno

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}.$$

Slijedi primjer koji pokazuje primjenu AG-nejednakosti u trigonometriji.

Zadatak 9 *Dokažite nejednakost*

$$\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} \geq 8,\ \sin x \cos x \neq 0.$$

Rješenje
Primjenom AG-nejednakosti slijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x}} &= 2\sqrt{\frac{16}{16\sin^4 x \cos^4 x}} \\
&= 2 \cdot 4\sqrt{\frac{1}{(2\sin x \cos x)^4}} \\
&= 8\sqrt{\frac{1}{\sin^4 2x}} \geq 8,
\end{aligned}$$

jer je $\sin^4 2x \leq 1$.
Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $\sin^4 x = \cos^4 x = \frac{1}{4}$, odnosno za $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

Bibliografija

[1] N. Elezović, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 1995.

[2] I. Ilišević, *Primjena AG-nejednakosti u trigonometriji* dostupno na *hrcak.srce.hr*

[3] D. Jukić, R. Scitovski *Matematika 1*, Prehrambeno tehnološki fakultet, Elektrotehnički fakultet, Osijek, 1998.

[4] S. Kurepa, *Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[5] S. Mintaković, M. Franić, *Trigonometrija, vježbenica za srednje škole*, Element, Zagreb, 1999.

[6] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika* 2,, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[7] http://www.stkpula.hr/mat-natj

[8] http://www.britannica.com/EBchecked/topic/605281/trigonometry

Sažetak

Trigonometrija je grana matematike koja se bavi specifičnim funkcijama kutova i njihovom primjenom. Naziv trigonometrija dolazi od grčkih riječi triĝonom što znači trokut, te métron što znači mjera. Možemo ju podijeliti na *ravninsku* (kutovi i udaljenosti u ravnini) i *sfernu* (kutovi i udaljenosti u prostoru).
U radu su definirane trigonometrijske funkcije, te su iskazane i dokazane neke tvrdnje koje govore o trigonometrijskim identitetima. U posljednjem poglavlju rada pokazani su zadaci s matematičkih natjecanja u čijem se rješavanju koriste trigonometrijski identiteti, te je dan primjer primjene aritmetičko-geometrijske nejednakosti u trigonometriji.

Summary

Trigonometric functions and some trigonometric identities

Trigonometry is branch of mathematics that studies specific functions of angles and their application. Name trigonomery comes from greek words triĝonom which means triangle, and métron which means measure. We can divide it on *planar* (angles and distance in the plane) and *spherical* (angles and distance in the space).
In this paper, trigonometric functions are defined, and, some statments that talk about trigonometric identities are expressed and proven. In last chapter of work, the assignments from mathematical competitions in whose solving are trigonometric identities used, are presented, and an example of an application aritmetic-geometric inequality in trigonometry is given.

Životopis

Rođena sam 7.7.1986. g. u Osijeku. Osnovnu školu sam pohađala u Gorjanima gdje i trenutno živim. Godine 2000. g. sam upisala srednju školu, Opća gimnazija "A. G. Matoš" u Đakovu. 2004. g., upisujem se na Odjel za matematiku u Osijeku, smjer Preddiplomski studij matematike, a 2008. g. upisujem smjer Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike. U osnovnoj i srednjoj školi redovito sam sudjelovala na matematičkim natjecanjima.