Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Stipe Đikić

RAZVOJ MATEMATIKE U SREDNJEM VIJEKU

Diplomski rad

Osijek, 2013.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Stipe Đikić

RAZVOJ MATEMATIKE U SREDNJEM VIJEKU

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2013.

Sadržaj

1. Uvod

Srednji vijek u matematici razdoblje je kojim se ne bavi velik broj proučavatelja, kao što nije ni odveć velik broj onih koji pišu o njemu. Ovaj rad će se temeljiti na proučavanju upravo tog razdoblja koje počinje propašću Zapadnog Rimskog Carstva (476.) i proteže se sve do Columbova otkrića Amerike (1492.). Ovi povijesni događaji koriste se kao granice srednjeg vijeka jer se tada ne javlja niti jedan značajniji događaj koji je znanstvena prekretnica, a povoljan je za cijeli svijet. Upravo se iz tog razloga za znanstveni početak srednjeg vijeka uzima 5. st., odnosno stoljeće nakon smrti dvaju grčkih matematičara, Diofanta (3.st.) i Papusa (4. st.), dok se za kraj uzima 15. st. Razlog tomu je to što se u prvoj polovici 16. st. javlja nekoliko bitnih znanstvenih otkrića, tj. znanost doživljava značajan napredak, odnosno renesansu ([6],[7]).

Osnovna tema ovog rada se bavi razvojem matematike u srednjem vijeku. Za to razdoblje se još kaže da je "mračno doba" upravo zbog toga što u tom razdoblju nije bilo brzog razvoja, već je sve u svojim začecima. Pojam "mračno doba" nastao je u 19. st., ali on postepeno gubi na svom značaju jer povijesna istraživanja pokazuju da je to razdoblje mnogo bogatije u znanstvenom smislu. To razdoblje je bitno utoliko što se smatra poveznicom između starog i novog vijeka. O ovom razdoblju su među ostalima pisali sljedeći povjesničari matematike: Žarko Dadić, Štefan Znam, Miodrag Petković, kao i David Eugene Smith i Victor Katz. Oni su istraživali i pisali znanstvene radove o razdoblju srednjeg vijeka u matematici te smo za pisanje rada koristili knjige i znanstvene članke spomenutih autora ([4],[12]).

U prvom dijelu rada, odnosno drugom poglavlju, govorit ćemo o matematici europskih zemalja spomenutog razdoblja. Vidjet ćemo da se većina ovog razdoblja svodi na prevodilačku aktivnost starogrčkih matematičara, a posebice je vrlo važan prijevod Euklidovih *Elemenata*. Razlog tomu je to što je riječ o najvažnijoj i najutjecajnijoj knjizi njegova razdoblja, a i razdoblja nakon njega. U njoj su sadržana sva saznanja i otkrića do kojih su došli Euklid i njegovi prethodnici i suvremenici u geometriji, teoriji brojeva i algebri pa je razumljivo da je ona poslužila kao temelj znanja stoljećima koji slijede. Vidjet ćemo da su zaslugom Severina Boetija Euklidovi *Elementi* postali dostupni europskim znanstvenicima. Od ostalih ćemo istaknuti Alcuina iz Yorka, Jordanusa de Nemora, Hermana Dalmatina, a kao najznačajnijeg i najutjecajnijeg matematičara srednjeg vijeka Leonarda iz Pise, Fibonaccia.

U drugom dijelu rada, odnosno trećem poglavlju, govorit ćemo o srednjovjekovnoj matematici Bliskog istoka. Matematičari ovog područja su se također bavili prevođenjem grčkih autora, ali su dali i svoj doprinos. Istaknut ćemo nekoliko autora koji su svojim radom doprinijeli razvoju matematike. Prvenstveno, tu je značajan al-Khwarizmi, kao i Abu'l Wafa, Thabit ibn Qurra i al-Karaji. O svima njima, ali i nekolicini drugih s ovog područja, bit će riječi u ovom poglavlju.

U trećem dijelu rada, odnosno četvrtom poglavlju, govorit ćemo o srednjovjekovnoj indijskoj matematici. Prevodilačka aktivnost je ovdje najmanje izražena, a više se pažnje posvećivalo aritmetičkoj i računskoj strani matematike. To se vidi iz djela autora: Aryabhate, Mahavire, Bhaskare te najistaknutijeg indijskog matematičara Brahmagupte, što će se opisati u ovom poglavlju.

U četvrtom dijelu rada, odnosno petom poglavlju, govorit ćemo o matematici Dalekog istoka. Za razliku od prethodno spomenutih područja gdje se započinjalo s prevodilačkom aktivnošću, Daleki istok je svoja matematička istraživanja najviše usmjerio na proučavanje kalendara, ali i na druge razne probleme u matematici. U ovom poglavlju istaknut ćemo nekolicinu matematičara Dalekog istoka koji su svojim radom pridonijeli razvoju matematike.

U radu ćemo koristiti literaturu vezanu uz povijest matematike te znanstvene radove koji se odnose na razvoj matematike u srednjem vijeku općenito, ali i prema geografskom položaju ([3],[9],[11],[13]).

2. Matematika europskih zemalja srednjeg vijeka

Na početku srednjeg vijeka zanimanje za matematiku u robovlasničkom Rimu bilo je vrlo slabo. Rimski su imperatori odvojili geometriju od matematike. Geometriju su rabili uglavnom u graditeljstvu i arhitekturi i smatrali su je svrsishodnom, dok je matematika svrstana u astrologiju, koja je u Rimskom Carstu bila zabranjena zbog toga što je to razdoblje prevlasti ideologije kršćanstva. Velik utjecaj kršćanstva postupno je doveo do drugog ekstrema: ono što je nekršćansko, pogansko je i treba ga uništiti. To se vidi i po tome što je 391. g. djelomično uništena knjižnica u Aleksandriji kao izvor poganstva. Rimska nezainteresiranost za grčkom matematikom dovela je do propadanja njihovih pisanih djela.

Općenito se dobro poznavanje matematike ili dobro baratanje s računanjem smatralo kao osnova za magiju. Uzet ćemo za primjer Gerberta iz Aurillaca. On je bio optužen za povezanost s đavlom zbog toga što je znao dijeliti po volji odabrane brojeve. No, zanimljivo je i to da je zbog svojih zasluga i znanja 999. postao papom Silvestrom II.

Iz ovih činjenica koje su navedene lako se može shvatiti da je matematika u tom razdoblju u Europi ostala na relativno niskoj razini. Poznato je da se baš zbog ovakvih događanja razdoblje od 500. do 1000. godine naziva "mračno razdoblje" matematike. To mračno razdoblje trajalo je od raspada Rima pa do ponovnog buđenja Europe pod vlašću pape Silvestra II. (Gerberta).

Dvanaesto stoljeće u kršćanskoj Europi bilo je slično kao i deveto stoljeće u islamskom svijetu, stoljeće prevođenja. U slučaju Bagdada ti prijevodi su bili s grčkog na arapski, a u slučaju kršćanske Europe s arapskog na latinski. Općenito je Europa malo pozornosti obraćala na arapsko pismo, ali posvetila je veliku pažnju na radove iz astronomije, aritmetike, trigonometrije, optike, geometrije i medicine. Čak su Euklidovi *Elementi* postali poznati učenjacima latinske crkve uglavnom kroz njihov arapski prijevod, umjesto kroz grčki original.

Trinaesto stoljeće dalo je najvećeg i najplodonosnijeg matematičara srednjeg vijeka. To je najinteresantnije poglavlje srednjeg vijeka u matematici. To je vrijeme kada je djelovao Leonardo iz Pise, poznatiji kao Fibonacci. Fibonacci je čovjek koji je ostavio dubok trag u matematici tog razdoblja, a i nekoliko kasnijih stoljeća.

2.1. Prvi europski matematičari srednjeg vijeka

Kao početak srednjeg vijeka uzima se stoljeće nakon smrti dvojice starogrčkih matematičara, Diofanta (3.st.) i Papusa (4. st.). Nakon njih matematički rad polako pada u drugi plan. Novi napredak matematike javit će se tek početkom 5. stoljeća u Aleksandriji procvatom neoplatonizma. Osim Aleksandrije neoplatonizam je imao velik utjecaj i u Ateni, gdje neoplatonisti osnivaju Akademiju.

Neoplatonizam[1] je imao sve veći zamah u istočnom Sredozemlju te postepeno obuhvaćao i zapadno, dok ideja aristotelizma[2] postepeno slabi. Doprinos tome su djela koja se pojavljuju u 4. stoljeću koja su ostavila veliki pečat na razvoj znanosti u zapadnoj Europi. Tu se nikako ne smije izostaviti Calcidius koji je sredinom 4. st. preveo na latinski dio Platonova djela *Timej*. Taj prijevod *Timeja* postaje temeljem prirodnofilozofskih tumačenja. Takva tendencija rasta neoplatonizma zadržala se sve do kraja 11. st.

Kako su grčki tekstovi bili uništavani, tako se Euklida poznavalo samo po određenim formulacijama tvrdnji koje je bez dokaza naveo **Severin Boetije**[3](480.-524.), rimski građanin iz ugledne obitelji Anicii. On je najvažniji matematičar i intelektualac tog razdoblja, čovjek od slave i utemeljitelj srednjovjekovne skolastike. Njegova reputacija i znanje dalo je njegovim knjigama visok položaj u samostanskim školama u nadolazećim stoljećima i ta se djela smatraju mostom između antike i srednjeg vijeka. Boetije je mišljenja da se kršćanstvo može pomiriti, tj. upotpuniti s ranijim dostignućima antičke civilizacije.

Slika 1: Alegorijska slika Boetija i Pitagore.

Preveo je više djela staro-grčke matematike na latinski, među kojima je prijevod Nikomahove *Aritmetike* koji je služio gotovo tisuću godina kao školski priručnik. U matematičkim radovima obrađivao je aritmetiku, geometriju, pa i glazbu, koja se smatrala dijelom matematike. Napisao je odsječak o geometriji na temelju prve četiri knjige Euklidova djela *Elementi*,[4] odsječak o astronomiji na temelju Ptolomejeva *Almagesta*, a odsječak o glazbi na temelju ranih djela Euklida, Nikomaha i Ptolomeja. Iako je bio jedan od najvažnijih matematičara tog vremena, nikad nije dosegao razinu djela kojima se koristio. Primjer tome možemo uzeti Euklidovu geometriju gdje on donosi samo formulaciju poučaka, ali ne i dokaz. Njegova podjela matematike na način izložen u sustavu kvadrivija[5] bila je temelj svim djelima iz matematike u ranom srednjem vijeku. Zbog ovih dostignuća bio je uzor svim matematičarima sve do 12. st.

[1]Neoplatonizam je obnavljanje Platonova učenja (3. do 6. st.) povezano s nekim tezama Aristotela, stoika, neopitagorejaca i orijentalnog misticizma. Platonizam je ukupnost učenja grčkog filozofa Platona i njegovih sljedbenika, karakterističan po idejama. Za Platona su iskustveni objekti samo pojavnost, a realno postoje samo njihove ideje.

[2]Aristotelizam je ukupnost učenja grčkog filozofa Aristotela i njegovih sljedbenika. Aristotelovi matematički pojmovi su idealizirane apstrakcije iskustvenih objekata. Zbog toga njegove pretpostavke i definicije nisu odabrane po volji, nego se one oslanjaju na interpretaciju osjetnog svijeta.

[3]Puno ime Anicius Manlius Severinus Boethius. (Slika 1.)

[4][8, str. 94.]

[5]Kvadrivij: zbirni naziv za aritmetiku, geometriju, astronomiju i glazbu koje su tvorile drugi, teži dio nastavnog programa srednjovjekovnih škola, tzv. "sedam slobodnih umijeća", preuzeto iz: [1, str. 649.]

Kako aristotelovski i platonistički nazor poprima novi oblik pod sve većim utjecajem kršćanstva, istaknut ćemo **Joannesa Filoponosa** (490.-570.) kao velikog filozofa, fizičara i matematičara, koji je radio i djelovao u Aleksandriji. Smatra se da je on postavio temelje moderne znanosti, kritičkog razmišljanja i analize. On želi Aristotelovo učenje povezati u platonističku reinterpretaciju s kršćanstvom, ali pri tome je trebalo odbaciti neke tvrdnje aristotelizma. Primjerice, vječnost svemira.

Filoponos kritizira određene Aristotelove tvrdnje i gledišta. Za primjer ćemo uzeti njegovo mišljenje o padanju tijela, gdje on kaže *da pri padanju tijela vrlo različitih težina vrijeme padanja s iste visine ne može biti različito, odnosno da se takva razlika barem ne može zapaziti.*[6] A zna se da je Aristotelova tvrdnja glasila da: *tijela različite težine padaju različitim brzinama.*[7]

Kako se tada u kršćanskim zemljama javljaju znanstvena središta, tako je i Bizant dao svoj doprinos. Budući da je Bizant u to doba ostao pošteđen arapskih osvajanja, tako se znanost ondje drugačije razvijala nego u istočnom području, a samim time i matematika. U Bizantu se posebna pažnja posvećuje spoju starih grčkih znanja i kršćanske religije.

2.2. Matematika ranog srednjeg vijeka i školski sustav Europe

Kako su učenjaci s početka srednjeg vijeka potpuno pod utjecajem platonista, tako vrijedi istaknuti njihov pogled na crtu. Smatraju da se ona sastoji od nedjeljivih dijelova, ali takav stav prenose i na vrijeme. Kao takve ćemo spomenuti: Martianusa Capellu (otp. 470.), Isidora iz Seville (otp. 560.-636.) i Bedu (673.-735.), poznatijeg kao Bede Časni. Njihov stav o vremenu koje je sastavljeno od nedjeljivih dijelova ne završava samo na tome, oni određuju broj tih dijelova u jednom satu.

Ovakva gledišta izrazito su važna za razvoj matematike i fizike. **Martianus Capella**, već spomenuti, autor je enciklopedije poznate kao *O vjenčanju Merkura i filologije i o sedam slobodnih umijeća* (*De nupiis Mercurii et Philologiae et de septem artibus liberalibus*). To je mješavina proze i stiha, jedan dio rada posvećen je geometriji, a drugi aritmetici. U drugom dijelu Capella raspravlja o raznim vrstama brojeva i o tzv. misterijima malih brojeva.

Zanimljiv je i školski sustav tog vremena i vremena sljedećih stoljeća. Tu se ističu spomenuti Capella i Boetije, koji su živjeli u isto doba na teritoriju današnje Italije. Sustav je baziran na platonizmu i zatim neoplatonizmu tako da se geometrija, aritmetika, astronomija i glazba spoje u zaseban sustav, nazvan kvadrivij, koji postaje osnova školskog sustava. Kvadriviju vrijedi dodati i tzv. trivij.[8] Trivij se smatrao prvim stupnjem svake nastave, a

[6] [6, str. 58.]

[7] [6, str. 58.]

[8] Trivij: zbirni naziv za gramatiku, retoriku i dijalektiku koje su činile dio nastavnog programa srednjovjekovnih škola, dio tzv. "sedam slobodnih umijeća", preuzeto iz: [1, str. 1354.]

kvadrivij drugim stupnjem. Zajedno se nazivaju *sedam slobodnih umijeća.*[9] Ovakav sustav rabio je Martianus Capella pri pisanju enciklopedijskog djela.

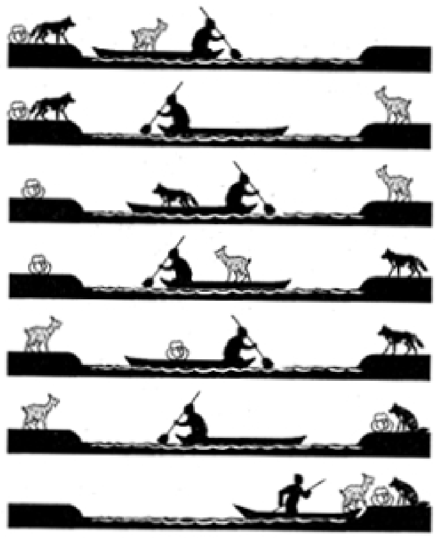
Sljedeći veliki europski učenjak matematike tog razdoblja je **Alcuin iz Yorka** (735.-804.), koji je studirao u Italiji. Njega je pozvao Karlo Veliki da mu pomogne u njegovom ambicioznom projektu pri edukaciji pučanstva. Pisao je o aritmetici, geometriji i astronomiji, a ime mu je povezano s određenim skupom zbirki problema koje su utjecale na pisce udžbenika sljedećih 1000 godina. Ta zbirka se sastojala od 53 zanimljive zagonetke, dosjetke i trik-pitanja. Ovi zadaci nalaze se u djelu *Problemi za izoštravanje uma* (*Propositions ad acuendos juvenes*)[10] i najranija su europska kolekcija matematičkih i logičkih zagonetki. Mnoge zagonetke se javljaju i danas, a jedna od njih je poznata pod nazivom: *Čovjek, vuk, koza i kupus*:[11]

Jedan čovjek, noseći vreću s kupusom, dolazi do obale rijeke zajedno sa vukom i kozom. Čamac je prilično mali, tako da čovjek može prevesti ili samo vuka, ili kozu, ili vreću sa kupusom. Naravno, on ne smije ostaviti na bilo kojoj obali kozu i kupus, a također ni vuka i kozu zajedno. Kako će čovjek, sa što manje prijelaza preko rijeke, prebaciti vuka, kozu i kupus na suprotnu stranu?

I. MG-M-MC-MG-MW-M-MG
II. MG-M-MW-MG-MC-M-MG

(M-čovjek, W-vuk, G-koza, C-kupus)

Ovaj problem prelaska preko rijeke može se riješiti na dva načina jer postoje dvije mogućnosti za realizaciju 3. i 5. koraka. Trenutno stanje u čamcu nam ukazuje koji je sljedeći korak (Slika 2). Vidimo da je to grafička ilustracija drugog rješenja.



Slika 2: Grafičko rješenje prelaska preko rijeke.

Interesantno je spomenuti da se varijante Alcuinovog problema mogu naći i u Africi.[12]

Nedavna istraživanja određenih rukopisa su bacila sumnju na to koliko je on imao veze s tom zbirkom, pošto su ona pokazala da rukopis datira iz prve polovice 11. stoljeća i smatra se da je napisana ili barem inspirirana od redovnika Ademara iz Aymara, koji je rođen 988. Ipak, nema dovoljno razloga da bi se u potpunosti odbacila veza između zbirke problema i Alcuina, a vjerojatno je ona inspirirala Ademara

[9]Septem artes liberales, lat.
[10]Zbirka napisana u Augsberškom manastiru poslije Alcuinove smrti, preuzeto iz: [11, str. 102.]
[11][11, str. 102.]
[12][10, str. 339.]

kao i mnoge druge. Zna se iz Alcuinovih pisama da je napisao skup zbirki problema, iako ne postoji direktan dokaz da je to baš ta zbirka.

2.3. Dodir zapadnoeuropske i arapske znanosti, kao i matematike

Pri kontaktu zapadne Europe s Arapima važnu ulogu su odigrala mnoga znanstvena i filozofska središta. Arapi dolaze u kontakt s njima prilikom zauzimanja sjeverne Afrike, Sicilije i teritorija Španjolske. Ta znanstvena središta i škole poznate su po tradicionalnoj zapadnoeuropskoj znanosti. U njima su se proučavala Platonova filozofija i prirodna filozofija u sklopu trivija i kvadrivija. Pri proučavanju matematike posebnu pažnju su posvetili Boetijevu radu. Ovakve metode znanstvenog rada po zapadnoeuropskoj tradiciji zadržale su se sve do 12. st., ali tada se polako osjeća prodiranje arapske znanosti, pa i matematike (pojavljuju se arapske brojke i decimalni pozicijski sustav). Bilo je kontakta već u 11. st., ali u 12. st. su oni puno intenzivniji. Doprinos tome dali su križarski pohodi gdje su Europljani mogli detaljnije upoznati arapski svijet. Križarima nije prioritet bila znanost i kultura, ali su ipak bili najveći posrednici u prenošenju potrebnih informacija.

Taj intenzivniji kontakt vidi se po učestalijem prevođenju arapskih znanstvenih radova na latinski. Tu možemo spomenuti **Adelarda iz Batha** koji je u prvoj polovici 12. st. preveo s arapskog astronomske tablice[13] i Euklidove *Elemente*. Spomenut ćemo i jednog slavenskog učenjaka, Hermana iz Dalmacije koji je preveo sa arapskog Ptolomejev rad *Planishaerum*.

To je vrijeme kada se prevode Euklidovi *Elementi*, Aristotelova i Ptolomejeva djela, kao i djela drugih grčkih učenjaka, ali se prevode i djela arapskih učenjaka na latinski. Ovaj kontakt zapadne Europe s arapskom znanošću ostavio je veliki trag u daljnjem razvoju matematike.

Kako orginalna Euklidova djela nisu bila poznata, tako se zapadna Europa zadovoljila s Boetijevim matematičkim radom. Adelard iz Batha prvi prevodi Euklidove *Elemente* s arapskog na latinski 1130. Zanimljivo da je drugi prijevod napravio naš znanstvenik Herman Dalmatin. Prevođena su i druga djela arapskih matematičara, koja su bazirana na arapski tip matematike koji je nastao spajanjem starogrčkog i indijskog shvaćanja matematike.

Jedan od prvih koji je došao u kontakt s arapskom znanošću bio je redovnik **Gerbert iz Aurillaca** (940.-1003.), već spomenut. Bio je čovjek velikog znanja koji je pobudio novi interes za matematikom. Stekao je znanje o indijsko-arapskim brojevima te pisao o aritmetici, geometriji i drugim matematičkim predmetima. Napisao je djelo *Pravila o računanju na abaku* (*Regulae de numerorum abaci rationibus*).

[13] Prevesti tablice - brojevi su često bili ispisani riječima, a ne u obliku današnjih tablica.

Najistaknutiji od nasljednika Gerberta u 11. stoljeću bio je **Hermannus** (1013.-1054.), poznat kao Hermannus Contractus. Pridružio se benediktinskom redu i predavao matematiku, a oko njega se okupljao velik broj učenjaka. Pisao je o astrolabu[14], abakusu[15] i o poznatoj igri rithmomachia[16] (Slika 3.).

Istaknut ćemo jednog židovskog učenjaka 11. stoljeća, Abrahama bar Chiiu, poznatijeg kao **Savasordu** (1070.-1136.), rodom iz Barcelone. Poznat je po enciklopediji koja je uključivala aritmetiku, geometriju i matematičku geografiju. Od tog njegovog djela postoje samo fragmenti. Napisao je i djelo *Liber Embadorum* gdje govori o geometriji, ali sadrži i brojne definicije korištene u teoriji brojeva.

Slika 3: Drevna igra Rithmomachia.

Drugi veliki židovski učenjak tog vremena je Abraham ben Meir **ibn Ezra** (1092.-1167.), rođen u Toledu. Smatra se da je bio najučeniji Židov svog vremena. Pisao je o teoriji brojeva, kalendaru, magičnim kvadratima, astronomiji i astrolabu. Napisao je tri ili četiri rada o brojevima, ali je samo *Sefer ha-Mispar* važan. Temelji se na indijskoj aritmetici, ali koristi židovska slova za brojke. Spomenut ćemo jedno njegovo pravilo o nizu: *Tko bi znao koliko je velik zbroj brojeva koji slijede jedan drugoga u nizu do određenog broja, pomnožite to sa svojom polovinom uvećanom za* $\frac{1}{2}$. *Umnožak je taj zbroj.*[17]

Postupno su bila prevedena na latinski jezik značajna djela arapske i grčke matematike. Tako talijanski učenjak **Gerardo da Cremona** (1114.-1187.) posvećuje cijeli svoj život prevodilačkom radu. Bio je zainteresiran za astrologiju, matematiku i medicinu. Od matematičkih prijevoda spomenut ćemo Euklidove *Elemente* i *Data*, Teodozijeve *Sfere*, djela Menelaja i Ptolomejev *Almagest*.[18] Zbog ovakvog velikog arapskog posredovanja kod grčkih dostignuća javlja se to da su u matematici, a i u astronomiji, mnogi važni stručni termini izvorno arapski.

Otprilike u to vrijeme je i Sicilija bila aktivna u prevođenju grčkih i arapskih djela.

[14]Astrolab je antički instrument za mjerenje položaja nebeskih tijela, tj. instrument za rješavanje zadataka iz sferne astronomije, preuzeto iz: [1, str. 65.]

[15]Abak je naprava za računanje, okvir ili ploča s nizovima od po deset pomičnih kuglica, računaljka, preuzeto iz: [1, str. 1.]

[16]Rithmomachia ili "Bitka brojeva" je matematička igra iz 11. st., koja se igra na pravokutnoj ploči dimenzija 8x16 kvadrata. Figure su oblika trokuta, kvadrata, krugova i piramida, na kojima se nalaze brojevi, op. a.

[17]To je formula oblika: $s = n(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})$, preuzeto iz: [12, str. 207.-208.]

[18][5, str. 274.]

U korist tome ide jedan prijevod koji se tamo pojavio, a privukao je pozornost učenjaka. Riječ je o Ptolomejevu *Almagestu*, koji je preveden na latinski od nepoznatog prevoditelja oko 1160. To je prijevod s grčkog rukopisa koji je donesen iz Konstantinopola u Palermo od strane sicilijanskog učenjaka.

Spomenut ćemo jednog Engleza tog razdoblja, **O'Creata** (otp. 1150.), koji je napisao rad o množenju i dijeljenju, što pokazuje njegovu povezanost s arapskim piscima iz matematike. O O'Creatu nije puno poznato, ali njegov rad sadrži pravilo za kvadriranje broja pomoću formule:

$$a^2 = (a - b)(a + b) + b^2, \tag{1.1}$$

tako iz (1.1) možemo izračunati iznosi 107^2:

$$107^2 = (107 - 7)(107 + 7) + 7^2 = 100 \cdot 114 + 49 = 11449.$$

Najznačajniji engleski učenjak u 13. stoljeću bio je **Roger Bacon** (1214.-1294.), poznat kao čovjek od erudicije i proročke vizije. Njegov rad pokazuje poznavanje Euklidovih *Elemenata* i *Optike*, Ptolomejeva *Almagesta* i *Optike*, Teodozijeve *Sfere*, dijelove radova Hiparha, Apolonija, Arhimeda i Aristotela, kao i radove raznih arapskih pisaca. Poznato je da su ga njegovi suvremenici mrzili zbog stalnog kritiziranja što ne obrazuju pučanstvo. Što se tiče njegovog doprinosa matematici, on je neznatan.

Od njemačkih matematičara 13. st., istaknut ćemo **Jordanusa de Nemora** (1225.-1260.), koji je studirao u Parizu i bio pod utjecajem arapske matematike. Napisao je nekoliko djela među kojima su: *Aritmetica decem libris demonstrata* i moguće *Algorismus demonstratus*, kao i rad o matematičkoj astronomiji *Tractatus de sphaera*, rad o geometriji *De triangulis* i jednu od važnijih knjiga srednjeg vijeka o algebri, *O danim brojevima* (*Tractatus de numeris datis*). Posebno se ističu dva djela, ovo posljednje i *Arithmetica*, koja je zbirka aritmetičkih pravila. *Arithmetica* je djelo o teoriji brojeva. U djelu *O danim brojevima* važno je to što se u njemu pojavljuju opća slova umjesto znamenki brojeva. To je već pronađeno u djelima ranijih autora, uključujući Aristotela i Diofanta, ali Jordanus koristi slova približno kako se ona koriste u današnjoj matematici. Navest ćemo jedan njegov primjer iz knjige *O danim brojevima* da bi bolje uvidjeli novi postupak:

> *Ako je zadani broj podijeljen na dva dijela tako da je dan umnožak jednog i drugog dijela, tada je svaki od ta dva dijela nužno određen. Neka je zadani broj* abc *i neka je on podijeljen na dva dijela,* ab *i* c*, a* d *neka je dani umnožak dijelova* ab *i* c.[19]

Iz ovog primjera vidljivo je da Jordanus polazi od Euklidova postupka iz knjige *Elemenata*. Znamo da je Euklid brojeve predočavao dužinama, ali i dužine koje su mu predstavljale

[19] [6, str. 70.]

brojeve također slovom. Znači, Euklid je uvijek brojeve predočavao dužinama bez obzira je li ih označavao pomoću dvije krajnje točke ili samo jednim slovom.

Jordanus se tu poslužio njegovim radom, samo što on ne koristi geometrijsku predodžbu. On se samo poslužio u osnovi tom idejom, a kasnije radi sa slovima koji predstavljaju brojeve. Iz danog primjera primjećujemo konfuznost označavanja jednog dijela broja sa ab, a drugog sa c, ali zato on u svom dokazu dosljedno upotrebljava slova za brojeve koji označavaju umnožak, kvadrat i drugo.

Njegovo djelo *De triangulis* se sastoji od četiri knjige koje sadrže 72 primjera uopćenog tipa, zajedno s primjerima kao što su: određivanje težišta trokuta, zakrivljenih površina i ostalih likova.

Drugo Jordanusovo djelo, *Arithmetica*, u kojem govori o aritmetici inspirirano je arapskim izvorima, ali i izvorima drugih autora tog doba. Iz svih ovih primjera može se vidjeti da je arapska matematika dala veliki doprinos matematičkom razvoju. Takva arapska matematika dopunjuje zapadnoeuropsku matematiku u cijelom 14. stoljeću, a vidimo to iz sve veće primjene ne samo cijelih brojeva, nego i razlomaka. Također se koriste i približne vrijednosti koje se već rabe u istočnjačkoj matematici. To vidimo po djelu *Tajna filozofa* (*Secretum philosophorum*), nastalom u 14. stoljeću u Engleskoj, gdje se koristi približna vrijednost za broj π. Za π su uzeli približnu vrijednost razlomka $\frac{22}{7}$. Djelo se još sastoji od izračunavanja površine trokuta kao umnožak poluosnovice i visine, te se računa i površina kruga, obujam kugle i obujam drugih tijela.

Najznačajniji engleski matematičar 14. st. bio je **Thomas Bradwardine** (otp. 1295.-1349.), poznat kao “Doctor Profundus”. Napisao je četiri djela o matematici. U svom djelu *Arithmetica Speculatiua* slijedi Boetija, a rad je povezan isključivo uz teoriju brojeva. Ostali radovi su: *Tractatus de proportionibus*, *Geometria speculativa* i *De quadratura circuli.* O njemu će biti govora i kasnije, kada se bude govorilo o neprekinutosti i beskonačnosti.

Otprilike u isto vrijeme djelovao je najveći francuski matematičar tog razdoblja, **Nicole Oresme** (1323.-1382.), rodom iz Normandije. Napisao je nekoliko matematičkih radova. U djelu *Algorismus proportionum* je prva poznata uporaba djelomičnih eksponenata.

U djelu *Tractatus de latitudinibus formarum* iznešen je prijedlog koordinatne geometrije, s određivanjem točaka pomoću dvije koordinate. O Oresmeu će još biti riječi kasnije kad se bude govorilo o uvođenju kvantitativnih promjena.

Među posljednjim istaknutijim matematičarima srednjeg vijeka nalazi se **Luca Pacioli** (1445.-1517.)(Slika 4.), zvan i Luca di Borgo po svom rodnom mjestu. Kao 20-godišnjak otišao je u Veneciju i šest godina kasnije napisao algebru koja nikad nije objavljena. Luca Pacioli je poznat po svojim putovanjima po Italiji i moguće čak po arapskim zemljama. O njemu će biti još govora kada se bude govorilo o obnovi sinkopatske algebre.

Veliki Paciolijev rad je djelo *Sve o aritmetici* (*Summa de aritmetica*), uzimajući ne samo njegove prethodne neobjavljene radove, nego i opće matematičko znanje tog vremena. To je značajna kompilacija sa skoro nimalo originalnosti. On je posuđivao slobodno iz raznih izvora, često ne dajući ni najmanju zahvalu originalnim autorima. Nije takav običaj jedinstven samo za njega, nego on samo slijedi običaje tog vremena. Poznato je da je bio vrlo načitan, pošto je koristio materijale od Euklida, Ptolomeja, Boetija, Fibonaccia, Jordanusa, i dr. Dok je bio u Milanu, napisao je *De divina proportione*, djelo vezano uz geometriju, koje je zanimljivo zbog toga što su u njemu najbolje prikazane figure čvrstih tijela u tom razdoblju, a smatra se da je na njima osobno radio Leonardo da Vinci.

Slika 4: Luca Pacioli, najistaknutiji predstavnik obnove sinkopatske algebre.

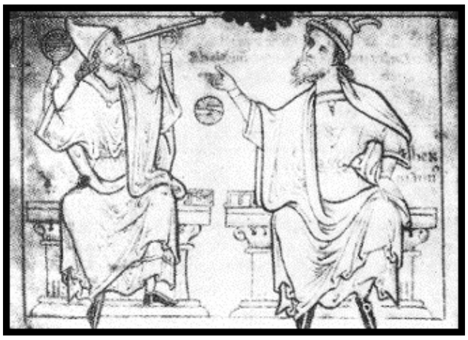
Pred kraj 15. st. u Europi se javlja još nekoliko matematičara. Jedan od njih je i **Johannes Widmann** (1462.-1500.), koji je pisao o aritmetici i algebri. Poznato je da je držao predavanja o algebri te se smatra da su to prva koja su održana u Leipzigu. Napisao je prvi važan njemački udžbenik o trgovačkoj aritmetici, a u njemu se po prvi put u tiskanom obliku javljaju znakovi za $+$ i $-$, ne kao simboli računskih operacija, nego kako bi iskazali višak i manjak u pakiranju robe.

Najutjecajniji i najpoznatiji njemački matematičar 15. st. je **Regiomontanus**, pravim imenom Johann Müller (1436.-1476.). Ime Regiomontanus je prijevod na latinski njegova rodnog grada Königsberga. Zanimljivo je da je već kao dvanaestogodišnjak studirao u Leipzigu. 1475. papa Siksta IV. ga je poziva u Rim da napravi jednu od čestih reformi kalendara tog vremena. Najznačajnije djelo mu je *De triangulis omnimodis*, koje sadrži važne rezultate iz područja geometrije ravnine i sferne trigonometrije. Regiomontanus će još biti spomenut kad se bude govorilo o uvođenju simbola i o obnovi sinkopatske algebre. Uz njegovo ime je povezana i tablica sinusa sa intervalom od $1°$. Preveo je Ptolomejevo djelo *Almagest*, kao i radove Apolonija, Herona i Arhimeda.

Matematičar s kojim ćemo zatvoriti srednji vijek Europe bio je najbriljantniji od Francuza tog razdoblja, **Nicolas Chuquet** (1445.-1500.), rođen u Parizu, a živio u Lyonu. Napisao je rad *Triparty en la Science des Nombres*, djelo koje dotiče tri polja aritmetike. Prvi dio se odnosi na računanje s racionalnim brojevima, drugi na računanje s iracionalnim, a treći dio na teoriju jednadžbi. Osim ovih činjenica, malo toga se zna o njemu.

2.3.1. Herman Dalmatin

Neizostavno je ne spomenuti **Hermana Dalmatina** (Slika 5.) koji je dao svoj doprinos razvoju zapadnoeuropske znanosti, a tako i matematike. Herman Dalmatin (oko 1110.-1154.) je hrvatski znanstvenik i filozof. Rođen je u Istri, tada dijelu Koruške. Smatra se da je on prvi prokrčio put latinskom aristotelizmu 12. st. Potpisivao se kao Hermannus Secundus, a kao Herman Dalmatin spominje se u pismu Petra Časnog (Bede). Putovao je istočnim zemljama s engleskim prijateljem[20] (Robertom iz Kettona) kako bi naučio arapski i bio u mogućnosti istraživati arapske spise, nakon čega se vraća u Europu. Radio je u prevodilačkoj školi u Toledu, gdje je prevodio mnoga znanstvena djela s arapskog na latinski.



Slika 5: Herman Dalmatin (desno), prikazan na slici s Euklidom (lijevo).

Herman pokazuje veliko zanimanje za astronomiju, matematiku, medicinu i tehničke znanosti. Budući da je prevodio arapska znanstvena djela, imao je veliku ulogu u stvaranju kontakta između zapadnoeuropske i arapske znanosti.

Preveo je mnoge važne knjige s arapskog na latinski, Euklidove *Elemente*, Al-Kwarizmijeve *Tablice* (koje sadrže rad Adelarda od Batha o obojici od tih klasika), Sahl ibn Bishrovo (arapski znanstvenik židovskog podrijetla iz 9. stoljeća) djelo *Šest astronomskih knjiga* (*Sextus astronomicae liber*), te posebice najstariji latinski prijevod Ptolomejeve *Planisphere* (objavljeno u Toulouseu 1143.; djelo poznato u islamskoj literaturi kao *Almagest*).

Herman je odgajan u zapadnoeuropskoj tradiciji, ali je poznavao i arapska znanstvena djela što mu je pomoglo pri nastanku djela *O bitima*, koje je dovršeno 1143. U njemu je spojio Aristotelovu prirodnu filozofiju s gledišta Abu Mashara[21] i zapadnoeuropsku znanstvenu tradiciju. Djelo se sastoji od kompliciranih spisa o brojnim alkemijskim, geometrijskim, astronomskim, astrološkim te detaljnim kozmologijskim izvodima. Zbog ovog djela Herman se može smatrati kao jedan od najvažnijih koji su utrli put novim koncepcijama u znanosti s početka 12. st.

U djelu *O bitima* on je mišljenja da se različita nebeska tijela ne gibaju jednakom brzinom.[22] U istom djelu udaljenost Mjeseca i Sunca od središta svijeta (Zemlje) dobiva se koristeći se pojavom pomrčine Mjeseca i Sunca. Njegov rad znatno je utjecao na pojedine znanstvenike razvijenog srednjeg vijeka, što se vidi iz navođenja njegovih stavova u njihovim djelima.

[20][URL 1, (25.11.2012.)]
[21]Za Aristotelovu prirodnu filozofiju s gledišta Abu Mashara, vidi [6, str. 65.]
[22][URL 2, (29.11.2012.)]

2.3.2. Razdoblje Leonarda iz Pise, Fibonaccija

Razumljivo je da putovanja Europljana u arapske krajeve nisu bila isključivo radi matematike, već su ona motivirana velikim dijelom trgovinom. Sredozemno more je Europljanima omogućilo daleka putovanja. Istaknut ćemo talijansko mjesto Pisu, koje je imalo živahne trgovačke veze s arapskim pokrajinama od Carigrada preko Male Azije, Egipta pa sve do današnjeg Alžira.

Taj odnos trgovine i matematike između ne tako bliskih zemalja dao je najvećeg i najproduktivnijeg matematičara srednjeg vijeka. On je sin mjesnog pisara iz Pise, Bonaccia[23], a zove se Leonardo iz Pise (1170.-1240.), poznatiji kao **Fibonacci** (Slika 6.). Budući da je putovao sa svojim ocem koji je bio diplomat i trgovac, dugo je boravio u Alžiru i drugim arapskim zemljama. Upravo tamo se upoznao ne samo s arapskom matematikom, već i indijskom, u prvom redu sa algebrom i pozicijskim brojevnim sustavom. Istodobno se trudio naučiti ona matematička znanja koja bi mu koristila kao trgovcu ili pisaru. Znanja prikupljena s tih putovanja utjecala su na nastajanje njegova djela *Knjiga o abaku* (*Liber abaci*, iz 1202.), koje je napisao u Pisi. Ova će knjiga postati najutjecajnije matematičko djelo Europe sljedeća tri stoljeća. S ovom knjigom je u europsku matematiku uveo indijsko-arapski pozicijski sustav i riješio niz kombinatornih problema. Fibonacci se u djelu opredjeljuje za indijske metode računanja te je uzimao broj kao temelj matematike, poput Indijaca. Istodobno se orijentirao i na retorički[24] način izlaganja kakav postoji u Arapa, a ne na sinkopatski[25] oblik kakav su primjenjivali Indijci.

Slika 6: Leonardo Fibonacci, talijanski matematičar.

Fibonacci je prihvatio i istočnjačku konkretnost u promatranju matematike. To vidimo iz toga što on koristi naziv *numerus* ili *denarius* za zadani broj (što znači novac), dok za nepoznati broj koristi naziv *res* (što znači *stvar*). Kako bi pokazali njegovu konkretnost prilikom korištenja izraza *stvar*, navest ćemo završetak jednog njegovog problema iz 13. knjige:

> *...Na taj način, stvar i 12 denariusa je sedam puta veća od 5 stvari bez 12 denariusa. Odavde se 34 stvari sastoje od 96 denariusa, a jedna stvar je* $2\frac{14}{17}$ *denariusa.*[26]

[23]Fibonacci na talijanskom znači sin Bonaccia, prema: [13, str. 87.]

[24]Retorika je teorija i pravila usmenog ili pismenog izražavanja, preuzeto iz: [1, str. 1129.]

[25]Sinkopatski način izlaganja je izlaganje riječi pomoću skraćivanja, op. a.

[26][6, str. 70.]

Iz ovog primjera vidi se da Fibonacci promatra i poznate i nepoznate veličine kao konkretne. Pritom on zadane veličine naziva novcem, a nepoznate veličine stvarima. Ovaj njegov problem se može prikazati u simboličnom obliku, pri čemu bi zapis izgledao ovako:

$$(x + 12) = 7(5x - 12).$$

Nastavimo li dalje rješavati dobit ćemo:

$$34x = 96.$$

A to dalje daje

$$x = 2\frac{14}{17}.$$

Dobro se primijeti razlika u njegovom izražavanju i izražavanju u simboličnom obliku, dok je računski postupak u oba slučaja jednak.

On u svojim djelima nulu uvodi kao broj, a razlomke svodi na najmanji zajednički nazivnik. Također objašnjava proporciju i njezinu primjenu. Njegova knjiga *Knjiga o abaku* na kraju sadrži raspravu o korjenovanju i rješavanju jednadžbi. Prilikom spomena imena Fibonacci, prvo pomislimo na naziv Fibonaccijev niz (a_n) koji je definiran sa:

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n. \tag{1.2}$$

Taj niz proizlazi iz zadatka o zečevima iz trećeg odjeljka knjige *Knjiga o abaku*, koji glasi:

> *Pretpostavimo da se zečevi množe na sljedeći način. Par zečeva na kraju prvog mjeseca života se ne razmnožava, međutim na kraju drugog i svakog sljedećeg mjeseca oni reproduciraju novi par zečeva. Polazeći od novorođenog para, postavlja se pitanje koliko će parova biti poslije godine dana?*[27]

Slika 7: Grafičko rješenje Fibonaccijevog zadatka s zečevima

Rješenje ovog problema možemo vidjeti iz slike 7, gdje broj crnih kružića predstavlja ukupan broj parova zečeva, brojeći od vrha do željenog mjeseca. Tu vidimo da parovi zečeva čine niz 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Iz primjera se može zaključiti kako je bilo koji broj ovog niza jednak zbroju dva prethodna člana. Nastavimo li ovaj niz, dobit ćemo sljedeće brojeve: 21, 34, 55, 89, 144, i tako dolazimo do broja 233. Taj broj i jest broj parova zečeva u jednoj godini.

[27][11, str. 30.]

Ovaj njegov problem, a i rješenje, nije privlačilo pažnju šest stoljeća, sve dok francuski matematičar Edouard Lucas (1842.-1891.) nije počeo s proučavanjem osobina niza brojeva spomenutog u zadatku s zečevima i nazvao ga "Fibonaccijevi brojevi".

Postoji povezanost između Fibonaccijevih brojeva i omjera zlatnog reza, što pokazuje i formula za n-ti Fibonaccijev broj:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Poznato nam je i Fibonaccijevo mišljenje da osim drugog korijena[28] postoje i drugi iracionalni brojevi. On zaključuje da korijen[29] jednadžbe:

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

nije moguće konstruirati šestarom i ravnalom. Nastojao je tu svoju tvrdnju i dokazati, ali s obzirom na stupanj matematičkih znanja, nije uspio.[30] Kako su ga ti novi oblici iracionalnih brojeva zaokupili, u svom proučavanju došao je do spoznaje da je, npr.:

$$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{250}.$$

Fibonacci je također poznavao jednakost koja se danas obično naziva *Fibonaccijevim identitetom*, a on glasi:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.^{31} \tag{1.3}$$

Formula (1.3) je ekvivalentna sljedećem: *produkt apsolutnih vrijednosti dva kompleksna broja je apsolutna vrijednost njihova produkta*[32], tj. produkt dva cijela broja koji su svaki suma dva kvadratna broja također je suma dva kvadratna broja (ovakva tvrdnja se može pronaći kod Diofanta).

Od njegovih ostalih djela, poznata su još neka. Ponajprije, tu je njegovo djelo iz algebre: *Knjiga kvadrata* (*Liber Quadratorum*), kao i djelo *Geometrijska praksa* (*Practica Geometriae*) gdje reproducira svoje spoznaje iz Euklidovih *Elemenata* i grčke trigonometrije. Upravo u djelu *Geometrijska praksa* za π koristi aproksimaciju $1440 : 458\frac{1}{3} = 3,1418\ldots$.

Lako se da zaključiti da su Fibonaccijeva djela imala velik utjecaj na razvoj europske matematike tog razdoblja i nadolazećih razdoblja. Opće je poznato što se događa s genijima koji su ispred svog vremena, a to se dogodilo i u ovom slučaju. Fibonaccijeva su djela počela biti cijenjena tek početkom 15. stoljeća kad je matematika više uznapredovala, odnosno nekoliko stoljeća nakon njegove smrti.

[28] Korijene su poznavali i pitagorejci, vidi: [13, str. 37.-40.]

[29] Tu Fibonacci podrazumijeva pozitivne realne korijene.

[30] Fibonaccijeva tvrdnja je ipak ispravna. Jednadžba ima realan korijen: $\frac{1}{3}(-2 + \sqrt[3]{352 + \sqrt{141480}} + \sqrt[3]{352 - \sqrt{141480}})$, a taj broj se ne može konstruirati šestarom i ravnalom, prema: [13, str. 88.]

[31] [2, str. 103.]

[32] [4, str. 110.]

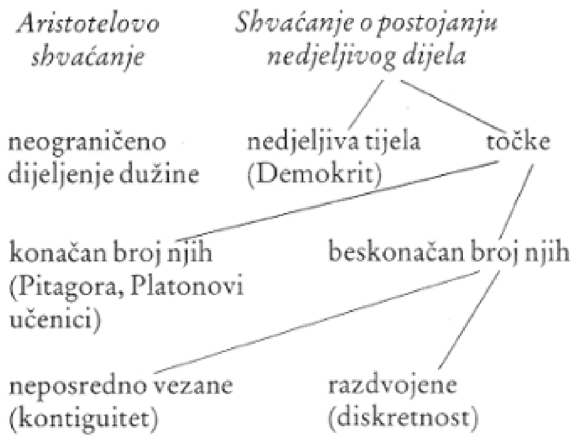
2.4. Neprekinutost i beskonačnost u razvijenom srednjem vijeku

I u srednjem vijeku se nastavlja rasprava o neprekinutosti i beskonačnosti. Postavlja se opet pitanje crte, pitanje koje se postavljalo kroz povijest. Sastoji li se crta od nedjeljivih dijelova ili se može neograničeno dijeliti? Opet imamo podjelu znanstvenika na dvije skupine: jedni se zalažu za Aristotelova shvaćanja, dok su drugi za atomističku strukturu geometrijskih objekata. Povjesničar znanosti Dadić navodi:

Neke pristaše nedjeljivih dijelova interpretirali su to u sklopu nedjeljivih tijela, drugi u sklopu matematičkih točaka, a neki su pak smatrali da postoji konačan, odnosno beskonačan broj točaka od kojih se sastoji crta. Na kraju, bilo je i onih koji su smatrali da postoji neposredan dodir među njima, tzv. kontiguitet, a neki su pak bili za diskretan skup nedjeljivih dijelova.[33]

Ipak, zanimljivo je da su se i oni koji su se zalagali za Aristotelovu koncepciju, postepeno udaljavali od nje. Kao jednog od najistaknutijih protivnika nedjeljivih dijelova možemo istaknuti Thomasa Bradwardinea, koji smatra da se neprekinute veličine sastoje od beskonačnog broja jedinki iste vrste.

Bradwardine je sva ta mišljenja i stavove vrlo pregledno klasificirao na ovaj način (Slika 8.).



Slika 8: Bradwardinova klasifikacija o nedjeljivosti, preuzeto iz: [7, str. 112.].

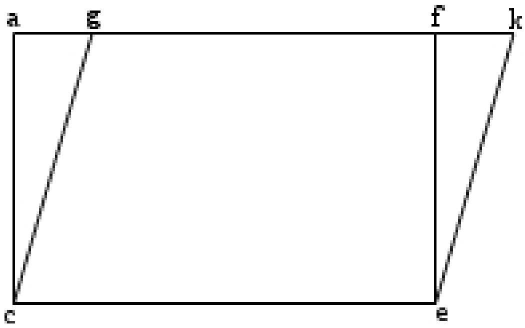
Kako su zagovornici jedne koncepcije dokazivali svoje stavove, tako su istodobno nastojali osporiti drugačije stavove. Ovakav primjer pronašli smo kod Bradwardineova dokaza

[33] [6, str. 76.]

protiv nedjeljivih dijelova.

On spominje paradoks o nedjeljivim dijelovima. Kao primjer uzima pravokutnik i paralelogram koji je prikazan na slici 9.

Sasvim je sigurno da je površina pravokutnika acef *jednaka površini* gcek. *Povučemo li iz svih točaka osnovice* ce *dužine usporedne sa* cg*, a onda okomice na* ce*, i to prvi put do nasuprotne stranice paralelograma, a drugi put do nasuprotne stranice pravokutnika, bit će tih usporednica i prvi put i drugi put jednako. Međutim, svaka od njih povučena u paralelogramu stoji prema onoj u pravokutniku kao* cg *prema* ac. *Izlazi da su i površine paralelograma i pravokutnika u istom tom omjeru. Kako znamo da su površine paralelograma i pravokutnika jednake, proistječe da se, uz pretpostavku nedjeljivih točaka i uz pretpostavku da se površina sastoji od crta, dolazi do kontradikcije.*[34]



Slika 9: Bradwardineov dokaz nemogućnosti postojanja nedjeljivih dijelova (14. st.).

Poznato je kako je Aristotel došao do pojma beskonačnosti (neograničeno je dijelio crtu). Takva čvrsta veza između beskonačnosti i neprekinutosti zadržala se i u srednjem vijeku, gdje je postignut napredak. To je vrijeme kada se pokušavalo odgovoriti na pitanje postoji li beskonačno samo potencijalno ili kao aktualno. Poznato je Aristotelovo shvaćanje beskonačnog: *samo je potencijalno beskonačno.*[35]

Kada govorimo o neprekinutosti i beskonačnosti, svakako moramo spomenuti **Nikolu Kuzanskog** (1401.-1464.). Budući da je Kuzanski platonist, on prihvaća postojanje nedjeljivih dijelova. Isti stav je zadržao i o prihvaćanju aktualne beskonačnosti. Ovakav stav o postojanju aktualne beskonačnosti prenosi i na prostor, gdje kaže da je i prostor aktualno beskonačan. Tu beskonačnost i nedjeljivost on smatra ekstremima, pa ih naziva beskonačno veliko i beskonačno malo. Dadić primjećuje kako je za Kuzanskog beskonačno veliko *ono što se ne može učiniti većim, a beskonačno malo ono što se ne može učiniti manjim.*[36]

Uzmemo li beskonačno veliko i beskonačno malo za granice, onda se operacije s konačnim veličinama mogu vršiti samo unutar tih granica. Njegova shvaćanja utjecala su na znanstvenike koji su se javljali kasnije (Franjo Petrić i Giordano Bruno). Spomenut ćemo još da je Kuzanski bio među prvima koji je porekao geocentričnu koncepciju svemira.

[34] [6, str. 76.]
[35] [6, str. 38.]
[36] [7, str. 113.]

2.5. Uvođenje kvantitativnih promjena

Znamo da su grčki znanstvenici i filozofi promjene promatrali kao kvalitetu, a ne kao kvantitetu. Tu možemo ubrojiti Heraklita, Demokrita, Aristotela i druge. Poznato je da je i starogrčka matematika statična i ticala se oblika, a nije bila podložna promjenama. To se može vidjeti po njihovoj geometriji i algebri, gdje su za sve veličine rabili konstante, a ne varijable. U skolastičkom[37] razdoblju taj se pristup promijenio.

Prilikom uvođenja kvantitativnih promjena važnu ulogu ima **Richard Swineshead** (otp. 1337.-1348.). On je u djelu *Knjiga izračunavanja* došao do zaključka u vezi s problemima toplinskog sadržaja te kaže da je srednji intenzitet *forme, čiji je iznos u jednom intervalu konstantan, ili forme koja je takva da je promjena jednolika u svakoj polovici intervala, prosjek od njezina prvog i posljednjeg intenziteta.*[38] Do dokaza dolazi na temelju fizikalnog iskustva iznosa promjene. Ovaj dokaz se može izreći i ovako: ako se veći intenzitet smanji do srednjeg, a manji poveća u istom iznosu do srednjeg, tada se cjelina niti povećava, niti smanjuje. Za primjer tome Swineshead kaže da *ako se npr. intenzitet jednoliko povećava sa 4 na 8, ili ako je za prvu polovicu vremena 4, a za drugu polovicu 8, tada je učinak isti kao što bi bio da postoji jednoliki intenzitet 6, koji bi djelovao u toku cijelog vremena.*[39]

Swineshead je ovim svojim radom u znanost i matematiku uveo novi pojam: promjenjiva veličina. Takav rad utjecao je na njegove suvremenike, pa čak i na Newtona u 17. st. Iako je Swineshead uveo pojam promjene, njegov rad nije bio potpun. On nije takvu neprekinutu promjenu usporedio s geometrijskim veličinama koje su neprekinute, nego s brojevima koji su bili diskretni.[40]

Swinesheadov rad utjecao je na Nicolu Oresmea koji je postigao napredak u tom pogledu. Oresme smatra da se netko teško može snalaziti u velikom broju tipova promjena ako se te promjene promatraju dijalektički i aritmetički. Po Oresmeu se neprekinuta promjena mora promatrati u okviru neprekinutih geometrijskih objekata, a ne kao do tada, diskretnih brojeva. Na taj način dolazi do povezivanja neprekinutih promjena s geometrijskim dijagramom te nam daje grafički prikaz promjenjivih veličina. On je mišljenja da se jedna veličina nanosi horizontalno kao dužina, dok se druga nanosi vertikalno kao visina, a one su međusobno okomite. Treba razlučiti da koordinatni sustav nije novost u znanosti (koristili su ga starogrčki astronomi i geografi).

Oresme je dobro poznavao pojmove trenutačne brzine i akceleracije, što je prikazao i grafički. Ovo svoje znanje on primjenjuje na udaljenost koju tijelo prijeđe iz mirovanja, a gi-

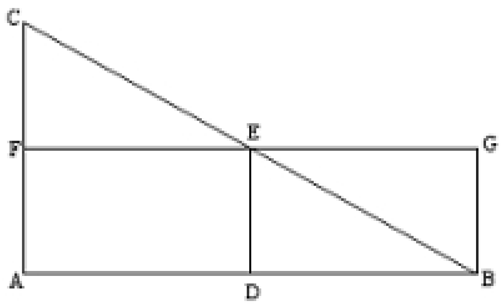
[37]Skolastika: sustavi i spekulativne tendencije različitih srednjovjekovnih kršćanskih mislilaca koji su, djelujući na temeljima vjerske dogme, nastojali razriješiti opće filozofske probleme, preuzeto sa: [URL 3, (5.3.2013.)]

[38][6, str. 75.]

[39][6, str. 75.]

[40]Iako su tadašnji matematičari upotrebljavali razlomke, ipak time nije bilo prevladano uvjerenje o diskretnosti brojeva. Bilo kakva neprekinuta promjena brojeva tada se nije mogla shvatiti, a nitko takvo pitanje nije ni postavio, preuzeto iz: [6, str. 75.]

bajući se jednolikom akceleracijom te kaže da je udaljenost jednaka onoj koju bi tijelo prešlo kada bi se gibalo u istom vremenskom razmaku jednolikom brzinom, ali s pola konačne brzine. Poznato je da je i Swineshead znao ovu tvrdnju, ali je Oresme, za razliku od njega, dao dokaz. Njegov dokaz (Slika 10.) sastoji se od toga da je površina sastavljena od nedjeljivih dijelova.



Slika 10: Oresmeov dijagram brzine jednoliko ubrzanog gibanja.

- pravokutnik $ABGF$ predstavlja prijeđenu udaljenost kod jednolikog gibanja uz nepromijenjenu brzinu AF i u vremenu AB.
- trokut ABC predstavlja prijeđenu udaljenost kod jednoliko ubrzanog gibanja i u istom vremenu, a počevši od mirovanja.

Pomoću ovog primjera Oresme pokazuje kako su površine ovih likova jednake, a to znači da je i prijeđena udaljenost u oba slučaja jednaka. U svom dokazu Oresme nije objasnio zašto je površina ispod krivulje jednaka udaljenosti, ali se može zaključiti da je smatrao kako se ta površina sastoji od nedjeljivih vertikalnih crta, a svaka crta predstavlja brzinu kojom tijelo nastavlja put u vrlo kratkom vremenu.

2.6. Uvođenje simbola i obnova sinkopatske algebre

Spomenuta su već postignuća dostignuta u pogledu rješavanja problema promjene i kvantitete, što je još više potaknulo razvoj znanosti i matematike, koja se izgrađivala na temeljima arapskog shvaćanja matematike. Razdoblje 14., i većim dijelom 15. st., je vrijeme kada u matematici dolazi do određenih promjena u pisanju, odnosno matematičkim oznakama. Toj promjeni dobar zamah je dalo uvođenje određenih simbola. Kako su arapske brojke već bile prihvaćane, one su dale dobar temelj za uvođenje shema koje su na jednostavniji način prikazivale matematičke izraze i operacije.

Iz rukopisa[41] koji datira nešto prije 1380. pronalazi se ovakva simbolika. U njemu možemo pronaći algebarske izraze koji su prikazani simbolično, za razliku od latinskih tekstova tog vremena gdje su algebarski izrazi imali retoričan oblik. Takav retoričan oblik u tekstovima je pod utjecajem arapskih tekstova gdje se upotrebljavaju algebarski izrazi za kvadrat, nepoznatu veličinu i poseban broj. Tako se za kvadrat koristi naziv *census*, za nepoznanicu naziv *res*, ponekad *radix*, a za poseban broj, tj. slobodan član, naziv *denarius* ili

[41] [6, str. 77.]

dragma. Novost u navedenom rukopisu je to što je upotrebljavano prvo slovo odgovarajućih naziva, gdje su slova postavljena u određenim shemama. Sheme su označavale i o kojim se operacijama radi. Tako za primjer možemo spomenuti simboličan izraz $8x^2 + 5x + 3$ koji bi se u većini tekstova retorično izražavao u pribrajanju 8 *censusa*, 5 *radixa* i 3 *dragme*. Ali u navedenom tekstu takav primjer je simbolično zapisan ovako:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 8 & 5 & 3 \\ \underline{\mathrm{c}} & \underline{\mathrm{r}} & \underline{\mathrm{d}} \end{array}}$$

Možemo primijetiti iz primjera da slova u donjem retku predstavljaju riječi *census* (c), *radix* (r), *dragma* (d), a povlaka ispod slova označava da se takvi članovi zbrajaju. U slučaju kada se članovi oduzimaju, tada njih pišemo ispod onih koji se pribrajaju. Kao primjer navest ćemo simboličan izraz $3x^2 - 2x + 2x^2 - 4 + 7x - 2x^2 + 5x - 6$ koji se piše:

$$\boxed{\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 7 & 5 \\ \underline{\mathrm{c}} & \underline{\mathrm{c}} & \underline{\mathrm{r}} & \underline{\mathrm{r}} \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ \underset{\cdot}{\mathrm{r}} & \underset{\cdot}{\mathrm{d}} & \underset{\cdot}{\mathrm{c}} & \underset{\cdot}{\mathrm{d}} \end{array}}$$

U ovom primjeru točka ispod slova znači da se taj član oduzima. Ovakvi primjeri nalaze se u mnogim matematičkim tekstovima diljem Europe (15. st.), pa i u tekstovima matematičara Regiomontanusa. Novonastali simbolični prikaz pomogao je da se mnogi algebarski tekstovi pojednostave i skrate. Tako retorički tekstovi sve više postaju sinkopatski, ali ti tekstovi i dalje imaju karakter konkretnosti i iskustvenosti.

Autor koji je dao veliki značaj sinkopatskim tekstovima bio je Luca Pacioli, već spomenut. Najpoznatije je njegovo djelo *Sve o aritmetici* (*Summa de aritmetica*), koje je nastalo 1487., a objavljeno u Veneciji 1494. Djela su mu pod utjecajem prethodnika u području aritmetike i algebre, i to ponajviše Fibonaccija. U Paciolijevim radovima možemo pronaći naziv *res* za nepoznanicu, a *census* za kvadrat. Razlika je u tome što se u djelima Paciolija vidi jasan prijelaz na sinkopatski način izražavanja, gdje on za *radix* (korijen) ima skraćenicu $R_{>}$, a za drugi korijen koristi kraticu $R_{>}2$, itd. Osim ovih skraćenica koristi još skraćenicu *ce.* za *census*, odnosno kvadrat, *cu.* za *cubus* (kub), *ce.ce.* za kvadrat kvadrata, dok za zbrajanje koristi kratice $\tilde{p}$ (plus), a za oduzimanje $\tilde{m}$ (minus).

3. Srednjovjekovna matematika Bliskog istoka

Mnogi smatraju da se arapska matematika svodila samo na prevođenje i prijenos podataka koje su preuzeli od Grka. Ali s današnjeg gledišta može se vidjeti da je ona mnogo sličnija našem poimanju, u odnosu na grčko. Godine 622. Muhamed odlazi iz Meke u Medinu gdje utemeljuje novu vjeru, islam. Samim time ta godina postaje prvom godinom muslimanskog kalendara.[42] Kalifi, Muhamedovi nasljednici prihvaćaju njegovo učenje i počinju velika osvajanja s ciljem upoznavanja svijeta s islamom. Tako su u razdoblju jednog stoljeća zauzeli cijelu sjevernu Afriku, južnu Španjolsku, prednju Aziju, dio srednje Azije i dio Pandžaba.[43] Nakon tih osvajanja, Arapi upoznaju istočnjačku matematiku, posebno indijsku, kao i starogrčku. Pogledamo li bolje, vidimo da su arapski matematičari spojili izvornu istočnjačku matematiku, posebno onu indijsku, sa strogim starogrčkim metodama. Na taj način oni prihvaćaju najpozitivnije iz obje matematike i stvaraju novu cjelinu koja je dala novi poticaj razvoju matematike.

Kako je Bagdad izgrađen na ruševinama drevnog grada kalifa al-Mansura, a isti ga 762. proglašava glavnim gradom istočnog dijela carstva, a time i intelektualnim centrom Muhamedova svijeta, bagdadski kalifi su podupirali razvoj prirodnih znanosti, a time i matematike. Ime Harun al-Rashid sigurno je poznato iz priče o Šeherezadi iz pripovijedaka u knjizi *Tisuću i jedna noć*. Taj kalif vlada Bagdadom (786.-809.) i osniva u Bagdadu veliku knjižnicu koju je dao dopuniti rukopisima iz cijeloga svijeta.[44] Poznato je da su pod njegovom vladavinom prevedeni klasici grčke znanosti, uključujući i dio Euklidovog rada. Štoviše, to je arapska verzija koja dolazi u Europu i Europa se pomoću tog prijevoda upoznaje s Euklidovim *Elementima*.

Arapi su od Indijaca preuzeli račun i pozicijski sustav, kao i indijski način promatranja polutetive te izračunavanje sinusa i kosinusa u brojčanom smislu. Jedino im je geometrija bila deduktivna kao i za vrijeme Euklida. Za svoju algebru preuzimaju strogi grčki geometrijski dokaz, a također nastoje izbjegavati negativne brojeve kao Diofant. Za primijetiti je da je to u protivnosti s indijskim shvaćanjem, ali pojam broja kao iskustvene kategorije bio je upravo u indijskom smislu, a ne u grčkom. Koriste još retorički oblik pri izlaganju jednadžbi, napuštajući sinkopatski koji je razvio Diofant.

[42] Muslimanska godina je bila lunarna i imala je 354 dana, op. a.
[43] Sjeverozapadni dio Indije, op. a.
[44] Vjerojatno bez Kine, op. a.

3.1. Arapska i perzijska matematika od 500. do 1000.

Matematičarima su nova znanstvena središta najprije služila za intenzivno prevođenje antičkih grčkih autora, a potom i za upoznavanje s matematikom i astronomijom Indije. Poznato nam je to po tome što na dvor kalifa dolazi Perzijanac **Vaqub ibn Tariq** (oko 775.), koji piše o sferama i kalendaru te sudjeluje u prevođenju radova Brahmagupte. Na isti dvor dolazi i astronom Abu Yahya koji prevodi Ptolomejev rad, čime pomaže u početku velikog pokreta koji je doveo do uvođenja klasične grčke matematike.

Najznačajniji i najveći matematičar koji je djelovao u Kući mudrosti al-Mamuna je Abu Abdalah Muhamed Ibn Musa **al-Khwarizmi** (780.-845.)(Slika 11.), rodom iz Khwarezma.[45] Napisao je više matematičkih djela od kojih je pet djelomice sačuvano u kopijama. Najvažniji za europsku matematiku je njegov aritmetički traktat[46], koji se vjerojatno nazivao *Knjiga o zbrajanju i oduzimanju* prema indijskom računu, ali i njegov algebarski traktat *Kratka knjiga o računu al-jabra i al-muqabalah* (*Hisab al-jabr wa'l-muqabalah*).

Slika 11: Al-Khwarizmi, najveći i najznačajniji perzijski matematičar srednjeg vijeka.

Djela al-Khwarizme sačuvana su samo djelomično i to samo u latinskim prijevodima. Iz tih latinskih prijevoda danas imamo dva važna termina. Po latinskom obliku imena al-Khwarizma pojavila se riječ algoritam, dok su Arapi riječ *al-jabr* izgovarali približno kao *al-gabr*, i tako se u latinskom pojavila algebra.[47] Njegov aritmetički traktat se sastojao od važnih informacija koje je Europa odmah usvojila. Najprije detaljno opisuje pisanje brojeva prema indijskom načinu pomoću devet indijskih znakova i malog kruga sličnog 0. Nakon toga detaljno objašnjava kako treba izvršavati pojedine matematičke operacije[48] prema indijskom načinu s tako napisanim brojevima.

Njegov algebarski traktat snažno je utjecao na europsku matematiku srednjeg vijeka. Razumljivo je da se takav način baratanja s operacijama odmah udomaćio u srednjem vijeku i s postupnim dorađivanjem, primjenjuje se i danas. Njegov algebarski traktat sadržavao je poseban algebarski dio, ali i dio posvećen praktičnim problemima, kao što su: trgovački ugovori, premjeravanja, izračunavanje površina plohe i oporuke. Zanimljivo je da je problem

[45]Khwarezm je tada bila napredna zemlja u slivu Amu-Darja kod njezinog utoka u Aralsko jezero. Današnji grad Khiva, op. a.

[46]Traktat je teorijska rasprava, spis o nekom problemu, pitanju; studija, preuzeto iz: [1, str. 1343.]

[47]Vidi: [3, str. 228.]

[48]Misli se na sljedeće matematičke operacije: zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje, op.a.

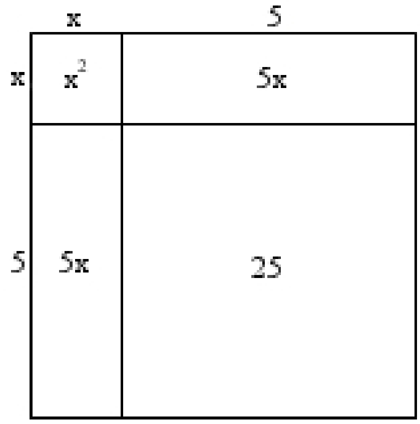
nasljedstva u Arapa bio vrlo složen i zato je ta problematika ugrađena u traktat. Poseban algebarski dio ovog djela posvećen je rješavanju linearnih i kvadratnih jednadžbi s cjelobrojnim faktorima. Arapi su rješavali kvadratne jednadžbe na vrlo općenit način, a uveli su i klasifikaciju jednadžbi prvog i drugog stupnja. Osim toga, dali su općenite procedure rješavanja jednadžbi koje se posebno očituju u postupcima *al-jabr* (*upotpunjavanje*) i *al-muqabalah* (*uravnotežavanje*). Operacija *al-jabr* (*upotpunjavanje*) odstranjuje iz jednadžbe član s negativnim predznakom pribrajanjem tog izraza objema stranama jednadžbe.[49] Vidimo da ta operacija odstranjuje "nedostatke" takve jednadžbe. Operacija *al-muqabalah* (*uravnotežavanje*) je, dakle, pojednostavljena jednadžba tako da je zbrojila članove iste vrste.[50] S te dvije operacije se svaka linearna i kvadratna jednadžba mogla svesti na jedan od šest tipova jednadžbi s pozitivnim koeficijentima, a tipovi su:

$$\begin{array}{llll} 1.) & ax^2 = bx & 4.) & ax^2 + bx = c \\ 2.) & ax^2 = c & 5.) & ax^2 + c = bx \\ 3.) & bx = c & 6.) & bx + c = ax^2 \end{array}$$

Ovakve jednadžbe se rješavaju prema uputama opisanima u traktatu, ali al-Khwarizme ne uzima u obzir 0 kao korijen prvog tipa jednadžbe.

U svojim djelima ne primjenjuje simboliku, već je njegov izraz retoričan. S današnjeg gledišta vidi se da su tipovi od 4.) do 6.) istovjetni, ali s arapskog gledišta razlikuju se u tome što u njihove relacije nije smio ući nijedan negativni član. Navest ćemo primjer na kojem ćemo primijeniti oba njegova postupka i zatim riješiti tu jednadžbu prema djelu *Kratka knjiga o računu al-jabra i al-muqabalah*.

Neka je dana jednadžba $x^2+17 = 56-10x$, na koju primijenimo postupak *al-jabra* koji je svodi na $x^2 + 17 + 10x = 56$, a zatim pomoću postupaka *al-muqabalah* imamo jednadžbu četvrtog tipa $x^2 + 10x = 39$.



Slika 12: Rješenja kvadratne jednadžbe prema djelu al-Khwarizma, 9. st.

Ovaj primjer će nam poslužiti da bi vidjeli kako se spajaju grčki i indijski elementi u rješavanju kvadratne jednadžbe. Do rješenja se dolazi pomoću danih pravila, ali je dokaz geometrijski. U dokazu se brojevi iz jednadžbi prikazuju geometrijski, ne samo poznati, nego i nepoznati, tako da crtež nije konstrukcija, nego skica (Slika 12.).

Sa skice se vidi da je nepoznata veličina x prikazana s dužinom, x^2 predstavlja kvadrat koji je konstruiran nad tom dužinom, dok se $10x$ prikazuje kao zbroj dvaju pravokutnika sa stranicama x i 5. Pravokutnike treba smjestiti tako da s kvadratom čine lik kakav je prikazan na slici. Jasno je da taj lik mora imati površinu 39. U ovakvom prikazu brojeva dužinama ili

[49] Ovaj postupak je prijenos negativnih članova na drugu stranu u obliku pozitivnog člana, op. a.
[50] Postupak kraćenja jednakih članova na obje strane, op. a.

površinama vidi se dvostruki utjecaj, indijski i grčki. Zatim se lik dopunjuje kvadratom koji ima stranicu 5[51] i tako dobivamo novi veći kvadrat površine 64[52], jer je $64 = 25 + 39$. Iz konstrukcije, stranica kvadrata mora biti $x + 5$, ali i 8, zbog toga što mu je površina 64. Iz ovih navedenih činjenica zaključuje se da x mora biti jednak 3. Ovaj primjer nam pokazuje indijski utjecaj određivanja dužina i površina pomoću brojeva, a s druge strane strogi geometrijski dokaz koji potječe od Grka.

Sa današnjeg gledišta al-Khwarizmi je matematici malo novog pridonio, ali je važnost njegovog matematičkog rada u tome što su njegove knjige bile prve s kojima se srednjovjekovna europska matematika upoznaje s matematičkim dostignućima Grčke i Indije.

Spomenut ćemo i nekoliko ostalih značajnijih djela arapskih matematičara. Slično kao i al-Khwarizmi, Egipćanin **Abu Kamil** (850.-930.) se u svom djelu *Kitab al-jabr Wa'l-muqabalah* bavi rješavanjem kvadratnih jednadžbi, kao i primjenom algebre na mnogokute (peterokute i deseterokute). Njegov rad uključivao je i potencije, a poznaje jednakost $x^m x^n = x^{m+n}$. Abu Kamilov rad je utjecao na Fibonaccija i tako algebri otvorio vrata Europe.

Problematici geometrije također se posvetio i **Abu'l Wafa** (940.-998.), koji daje doprinos u trigonometriji. Tu se misli na njegovo izračunavanje tablica sinusa i tangensa za svakih $10°$, a također je vrlo vjerojatno da je on zaslužan za korištenje sekansa i kosekansa. Pisao je i o aritmetici, algebri, geometriji i astronomiji. Detaljno je opisao računanje s razlomcima u svom djelu. Njegov aritmetički rad je jedini rad tog doba u muslimanskim zemljama gdje se koriste negativni brojevi.

Otprilike u tom razdoblju djelovao je **Thabit ibn Qurra** (908.-946.), fizičar od značaja, ali bolje poznat po svom radu u filozofiji i matematici. Poseban je zbog toga što je bio uspješan u primjeni algebre na geometriju. U njegovom radu interesantne su dvije stvari: trudi se dokazati peti Euklidov postulat o paralelnosti i piše *knjigu o tome kako se susreću dva pravca koji idu pod kutovima manjim od dva prava*[53], dok pri *mjerenju presječnice stošca nazvane parabola*[54] primjenjuje metodu integralnih suma. Granični prijelaz izvodi vrlo točno. Kako nije poznavao Arhimedov rad, mnoge rezultate otkrio je ponovno neovisno o njemu.

3.1.1. Kršćanski i židovski učenjaci u Bagdadu

U vrijeme punog procvata, Bagdad je bio meka za znanstvenike. Poznato je da su u njega dolazili također razni židovski i kršćanski pisci tog vremena, ali su njihova imena dana

[51] Što je opet mjerni broj te dužine, op. a.
[52] Što je opet mjerni broj, op. a.
[53] [13, str. 85.]
[54] [13, str. 85.]

u arapskom obliku. Među njima je **Sahl ibn Bishr** (oko 850.), koji je stekao reputaciju prije dolaska u Bagdad. Pisao je o algebri, a to znamo zbog toga što se dio njegova spisa pojavio u Veneciji (1493.), a dio u Baselu (1533.). Tu je također **Abu'l Taiyib**, koji je ostavio židovsku religiju i prešao na islam. On je sastavio niz astronomskih tablica i čini se da je pisao o trigonometriji. Osim njih, kršćanin **Qosta ibn Luqa al-Ba'albeki** (umro otp. 912.), pisao je o geometriji u katehetskom obliku, a preveo je i Teodozijeve *Sfere* i dio djela Diofanta. Spomenut ćemo Grka kršćanina, Nazif ibn Jumna, poznatijeg kao **al-Qass** (u prijevodu: *svećenik*), koji je prevodio djela Euklida.

3.1.2. Prevoditelji na arapski

Značajan prevoditelj tog razdoblja je al-Hajjaj (786.-835.), koji je napisao dva prijevoda s najmanje šest knjiga Euklidovih *Elemenata*, a preveo je i Ptolomejev *Almagest*. Sljedeći prevoditelj je Honein ibn Ishaq (809./10.-873.), koji je preveo nekoliko grčkih radova, uključujući Ptolomejev *Tetrabiblos*. Osim njega, i njegov sin Ishaq prevodi Euklidove *Elemente*, *Almagest*, Arhimedovo djelo *O sferi i cilindru*. Nešto manje poznati, ali vrijedni spomena su: al-Himsi (umro 883.), koji je preveo prve četiri knjige Apolonija i Said ibn Yaqub (živio 915.), fizičar, koji je preveo dijelove radova Euklida i Pappusa.

3.2. Arapska i perzijska matematika od 1000. do 1500.

Među posljednjim doprinositeljima matematici u gradu kalifa bio je **al-Karaji** (953.-1029.). Njegovo prvo djelo vrijedno spomena je *Kafi fil Hisab*, gdje govori o aritmetici. Ističe ga se kao prvu osobu koja je algebru oslobodila od geometrijskih operacija i pažnju posvetila aritmetičkim. Smatra se da je to djelo napisano isključivo iz indijskih izvora. Djelo ne sadrži samo elemente aritmetike, nego daje i pravilo u ovom obliku:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab. \tag{1.4}$$

Pravilo je to koje se vjerojatno duguje Indijcima. Između ostalog, daje i metode množenja kao što je izraženo formulom $(10a+a)(10b+b) = [(10a+a)b+ab]10+ab$ i $(10a+b)(10a+c) = (10a+b+c)a \cdot 10 + bc$.

Rad završava algebrom, uključujući kvadratne jednadžbe i arapsko objašnjenje pojmova: *al-jabr* i *al-muqabalah*.

Njegovo drugo djelo, *Fakhri*, je algebra po kojoj je mnogo poznatiji, koje uključuje: algebarske operacije korjenovanja, jednadžbe prvog i drugog stupnja i rješavanje problema.

Njegove jednadžbe uključuju takvu formu, kao npr. $x^4+5x^2=126$, gdje rješenje kvadriranja općenito ovisi o pravilu kako je predstavljeno u jednadžbi:

$$ax^2+bx=c \tag{1.5}$$

i formuli

$$x=\left[\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+ac}-\frac{b}{2}\right]:a. \tag{1.6}$$

Pravila su objašnjena geometrijski, kao što je u djelima ranijih arapskih pisaca. Probleme koje nalazimo kod njega nadahnuti su djelima al-Khwarizmia i Diofanta te uključuju pronalaženje rješenja jednadžbi: $x^3+y^3=z^2$, $x^2-y^2=z^3$, $x^2y^3=z^2$, $x^3+10x^3=y^2$ i $x^3+y^3=z^2$, kao i pronalaženje dijelova rješenja za $x^2-y^3=z^2$ i $x^3+y^2=z^3$. Taj se rad svrstava u jedan od najznanstvenijih arapskih algebarskih radova.

Spomenimo još nekoliko istaknutih arapskih prirodoznanstvenika i matematičara iz druge polovice srednjeg vijeka. Jedan od njih je **al-Haitham** (965.-1040.), koji je pokušao klasificirati parne savršene brojeve. Pritom je mislio na one brojeve oblika $2^{k-1}(2^k-1)$, gdje je 2^k-1 prost broj.

Istaknut ćemo i njegovog suvremenika Uzbekistanca, **Avicennu** (980.-1037.). Avicenna je bio liječnik, prirodoznanstvenik i pjesnik, ali se posvetio i matematičkom radu. Njegovo djelo *Knjiga liječenja* se sastoji se od četiri dijela, a jedan dio je posvećen matematici.[55] Geometrijski dio baziran je na Euklidovim *Elementima*, dok se aritmetički dio bavi problemima dijeljenja (npr.: *Ako pri dijeljenju broja s 9 dobijemo ostatak 1 ili 8, pokazati da je ostatak pri dijeljenju kvadrata tog broja s 9 jednak 1.*).[56]

Ne smijemo izostaviti Perzijanca **Omara Khayyama** (1048.-1131.), poznatog po radu u Kući mudrosti. Glavno njegovo djelo je *Algebra*, a bavio se astronomijom, filozofijom i poezijom. Dao je potpunu klasifikaciju kubnih jednadžbi (14 tipova) s geometrijskim rješenjima pomoću sjecišta konika i prvi je uočio da ne moraju imati jedinstveno rješenje. Khayyam razlikuje aritmetičko i geometrijsko rješenje jednadžbe.[57]

U 13. st. djeluje Nasir al-Din **al-Tusi** (1201.-1274.) iz sjevernog Irana. Poznat je kao svestran učenjak, a pisao je između ostalog i o trigonometriji, astronomiji, računanju, geometriji, konstrukciji i uporabi astrolaba. Al-Tusi je dao komentare na Ptolomejev *Almagest* (1247.), gdje je uveo trigonometrijske tehnike za izračunavanje tablica sinusa. Posebno treba istaknuti njegov doprinos u nastojanju da trigonometrija postane matematičkom disciplinom, a ne kao do tada samo sredstvo za astronomske proračune. Zna se da je al-Tusi dao prvi prikaz ravninske i sferne trigonometrije u djelu *O kvadrilaterali.* U tom djelu daje

[55] Matematiku dijeli na geometriju, astronomiju, aritmetiku i glazbu.

[56] [4, str. 104.]

[57] Pod aritmetičkim rješenjem podrazumijeva traženje racionalnih rješenja, a geometrijska dozvoljavaju i iracionalna i podrazumijevaju geometrijski prikaz i dokaz, preuzeto iz: [4, str. 105.]

teorem o sinusima za ravninske trokute, koji glasi:

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}.$$

Kao posljednje učenjake ovog razdoblja i područja, spomenut ćemo Ulug Bega i al-Kashija. Prvi od njih je **Ulug Beg** (1394.-1449.), koji postaje vladarom Samarkanda. Zna se da je on osnovao sveučilište teologije i znanosti, kao i opservatorij gdje je okupljao najbolje znanstvenike tog područja, među kojima se nalazi i **al-Kashi** (1380.-1429.). Al-Kashi je postao vodeći matematičar i astronom u Samarkandu i tada nastaju njegova najbolja djela: *O opsegu kruga*[58] i *Ključ aritmetike.*[59]

Povijesno istraživanje matematike arapskih zemalja nije završeno. U posljednjih nekoliko desetljeća otkriveni su vrlo važni rukopisi i matematička javnost čeka na njihovo proučavanje.

[58] U djelu je 2π izračunao na 16 decimala, preuzeto iz: [4, str. 106.]

[59] Ovo djelo je udžbenik za studente kako bi naučili osnove matematike za astronomiju, mjeriteljstvo, arhitekturu, računovodstvo i trgovinu, preuzeto iz: [4, str. 106.]

4. Srednjovjekovna indijska matematika

Matematika u indijskoj praksi općenito ima važnu ulogu pa u tu svrhu razvija vrlo zadovoljavajuće matematičke procedure. Ona je bila i usko vezana za promatračku astronomiju, zbog čega su astronomski tekstovi bili vrlo često popraćeni matematičkim izlaganjima. Ti tekstovi su nam vrlo zanimljivi i važni kao izvor za upoznavanje indijske matematike upravo zbog toga što se u njima tumače matematička pravila.

Najstariji poznati matematički rukopis iz Indije je *Bakšali rukopis*, nazvan po mjestu pronalaska, a potječe iz 4. stoljeća, ili nešto ranije. Poznato je da su Grci bili zaokupljeni geometrijskom matematikom, dok su se Indijci zanimali za aritmetičku i računsku matematiku. Iz toga se može primijetiti da je indijska matematika čvrsto vezana uz iskustvo, što jasno pokazuje njezinu različitost od starogrčke matematike. Indijsko ime za matematiku, *ganita* znači *znanost o računanju.* Upravo zbog toga Indijci nisu imali nikakvih problema sa zakrivljenim i ravnim površinama, što je za Grke bio velik problem.

Poznato je da su Indijci na isti način postupali sa zakrivljenim i pravocrtnim likovima, mjereći i jedne i druge pomoću brojeva. Takvo isticanje brojčanog značaja u matematici omogućilo je i vrlo zadovoljavajući pozicijski sustav u numeraciji, kao i aritmetičke operacije. Poznato je da su radili i s razlomcima, kao i s negativnim brojevima, što je za njih bio dug. Poznavali su i nulu, iako s njom nisu rado baratali.

4.1. Indijski matematičari od 500. do 1000.

Kao prvog od poznatijih indijskih matematičara iz razdoblja od 500. do 1000. spomenut ćemo **Aryabhatu starijeg** (476.-otp.550.), koji je rođen u Kusumapuri, tzv. gradu cvijeća, malom gradu u Jummi tik iznad njegovog ušća s Gangesom.

Njegovi radovi su bili malo poznati medu hinduističkim učenjacima u nadolazećim stoljećima, a razlog možemo naći u tome što je živio daleko od Ujjaina, drevnog središta matematičara i astronoma. Njegov rad, često nazivan *Aryabhatiya*,[60] sastoji se od *Gitike* ili *Dasagitike* (kolekcija astronomskih tablica). Njegov drugi rad *Aryastasata*, koji uključuje: *Ganitu* (bilješke o aritmetici), *Kalakryu* (bilješke o vremenu i njegovu mjerenju) i *Golu* (bilješke o sferi).

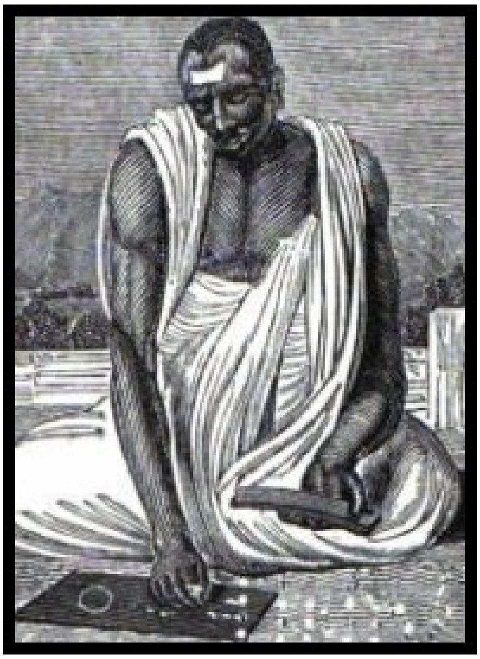
Aryabhata daje formulu $\pi r^2\sqrt{\pi r^2}$ za obujam kugle, koja je netočna, gdje ona π izjednačava s $\frac{16}{9}$.

Također, daje pravilo za dobiti vrijednost π i ono glasi: *Dodaj četiri stotici, pomnoži to s 8 i dodaj ponovno 62 tisuće tome, ovaj rezultat je približna vrijednost opsega kada je*

[60] [3, str. 189.]

promjer 20 tisuća.[61] Ovakvo njegovo pravilo π izjednačava s $\frac{62832}{20000}$ ili 3.1416.

Aryabhatu starijeg ćemo još spomenuti kad budemo govorili o decimalnom pozicijskom sustavu i njegovom korištenju slogova umjesto brojeva. Kao što smo naveli gore, Aryabhata ovdje spomenut je poznat kao stariji od dvojice matematičara istog imena. Datum života mlađeg Aryabhate je nepoznat, kao što je i nemoguće jasno razlikovati radove njih dvojice.



Slika 13: Brahmagupta je najistaknutiji indijski matematičar srednjeg vijeka.

Najistaknutiji od indijskih matematičara je **Brahmagupta** (598.-670.)(Slika 13.). Živio je i radio u velikom astrološkom centru znanosti Ujjainu.[62] Kao tridesetogodišnjak napisao je svoj veliki rad koji je imao 22 poglavlja, a naslovljeno je *Astronomski sustav Brahme* (*Brahma-sphuta-sid'hanta*), koji uključuje dva poglavlja o matematici: *Predavanja o aritmetici* (*Ganitadhaya*) i *Predavanja o neodređenim jednadžbama* (*Kutakhadyaka*). U dijelu posvećenom aritmetici susrećemo se, osim aritmetike, i s izračunavanjem površina i volumena geometrijskih tijela koje se primjenjivalo u radu mjernika, dok je drugi dio tog djela posvećen algebri, tj. rješavanju jednadžbi prvog i drugog stupnja.

Brahmagupta daje pravila za računske operacije što iznosi u 12. poglavlju pod naslovom *Aritmetika*, gdje kaže: *Umnožak dviju negativnih veličina je pozitivan, umnožak nule i negativnog broja ili nule, kao i pozitivnog broja, jest nula i sl.*[63], što bi u sklopu grčkog mišljenja bilo nemoguće zamisliti. Brahmagupta nije poznavao dijeljenje s nulom, a za dijeljenje nule s nulom smatra da je nula.

Brahmagupta dolazi do formule za površinu P tetivnog četverokuta[64] sa stranicama a, b, c, d gdje je ona jednaka $P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, pri čemu je poluopseg $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$.[65] Vidimo da je to proširena Heronova formula za površinu trokuta. Njegovo pravilo za četverokute glasi: *pola sume svih stranica uzeti četiri puta, i pojedinačno umanjiti za stranice, pomnožiti zajedno, kvadratni korijen od tog umnoška je ta površina.*[66] Zanimljivo je još da on koristi 3 kao "praktičnu vrijednost" za π, a $\sqrt{10}$ kao "urednu vrijednost".

U svom poglavlju o kvadratnim jednadžbama Brahmagupta daje pravilo za rješavanje jednadžbe tipa $x^2 + px - q = 0$, gdje je bitna formula $x = \frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2}$, koja očito daje jedan

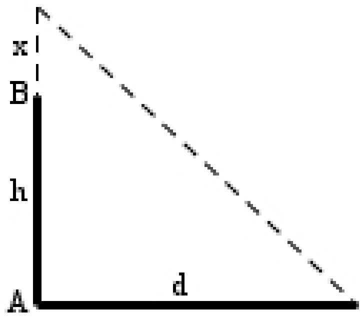
[61] [12, str. 156.]
[62] Ujjain je grad u državi Gwalior, centar sadašnje Indije, op. a.
[63] [6, str. 62.]
[64] Tetivni četverokut je četverokut oko kojeg se može opisati kružnica, op. a.
[65] [9, str. 122.]
[66] [12, str. 158.]

korijen ispravno. Osim toga, Brahmagupta je umio riješiti linearnu neodređenu jednadžbu[67] $ax + by = c$ u sklopu cijelih brojeva, kao i neke specijalne slučajeve tzv. Pellove jednadžbe[68], $y^2 = Ax^2 + 1$, koristeći metode koje su formalno razvijene nekoliko stoljeća kasnije.

Navest ćemo dva zabavna Brahmaguptina problema:

Problem 1. Putovi iste dužine[69]

Na vrhu određene stijene visine h žive dva asketa.[70] Jednog dana jedan od njih spustio se vertikalno naniže sa stijene i odšetao do obližnjeg sela koje je bilo na udaljenosti d od osnovne stijene. Drugi asket, koji je bio i čarobnjak, prvo je poletio vertikalno uvis do visine x od vrha stijene, a zatim je pravolinijskom putanjom odletio do sela. Ako su prijeđeni putovi oba asketa jednaki, odredite visinu x.



Slika 14: Putovi iste dužine.

Rješenje:

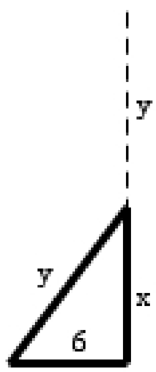
Neka je $h = |AB|$ visina stijene i x visina vertikalnog leta drugog asketa. Sa slike 14. lako je napisati jednadžbu:

$$h + d = x + \sqrt{(h+x)^2 + d^2}, \ ili \ h + d - x = \sqrt{(h+x)^2 + d^2}.$$

Poslije kvadriranja i sređivanja, dobije se: $2hd - 2dx - 2hx = 2hx$, odakle je $x = \frac{hd}{2h+d}$.

Problem 2. Slomljeni bambus[71]

Vjetar je slomio bambus visine 18 lakata.[72] Njegov vrh dodirnuo je zemlju na 6 lakata od osnove bambusa. Odredi na kojoj visini od zemlje je slomljen bambus.



Slika 15: Slomljeni bambus.

[67] [10, str. 218.]
[68] [10, str. 211.]
[69] [12, str. 159.]
[70] Asket je onaj koji živi strogim životom u vježbanju, isposnik, pustinjak, preuzeto iz: [1, str. 64.]
[71] [12, str. 159.]
[72] Lakat je stara jedinica za dužinu i označava udaljenost od lakta do vrha srednjeg prsta, op. a.

Rješenje:

Neka su x i y dužine segmenata slomljenog bambusa. Iz sustava jednadžbi $x + y = 18$, $y^2 - x^2 = 36$ (slika 15.) nalazimo $x = 8$, $y = 10$. Prema tome, bambus je slomljen na visini od 8.

Treći veliki indijski matematičar ovog vremena je **Mahavira** (oko 800.-oko 870.), rođen u južnoj Indiji (vjerojatno u Mysoreu) i smatra se da je živio na dvoru vladara Rashtrakuta. Pisao je djela iz elementarne matematike, kombinatorike i neodređenih (diofantskih) jednadžbi prvog reda. Također je istraživao metode korjenovanja, operacije sa funkcijama te je raspravljao o cjelobrojnim rješenjima neodređene jednadžbe prvog reda. Prvi je koji je dao eksplicitan postupak izračunavanja broja kombinacija.

Poznavao je rad Brahmagupte i napisao je jedno važno djelo: *Kratki tečaj znanosti o računanju* (*Ganita Sara Sangraha*) oko 850., koje predstavlja dopunu Brahmaguptina rada, ali sa značajnim pojednostavljenjem i detaljnim objašnjavanjima. Taj Mahavirin rad sastojao se od 9 poglavlja. Poznata je njegova zanimljiva značajka, tj. zakon, koji se odnosi na nulu, gdje on kaže: *Broj pomnožen s 0 je 0, a da ostaje nepromijenjen kada je umanjen s 0.*[73] Po Mahaviri na dijeljenje s 0 se gledalo kao da nema efekta. U svom djelu on potvrđuje zakon umnožavanja negativnih brojeva od Brahmagupte, ali isto kao i on rabi $\sqrt{10}$ kao vrijednost za π. Takav iznos za π se koristio diljem istoka, ali i u srednjoj Europi.

U djelu prvo od aritmetičkih operacija obrađuje množenje, a potom razmatra po redu: dijeljenje, kvadriranje, korjenovanje, kubiranje, treći korijen i zbrajanje nizova. Možda je najvrjednija njegova značajka u obradi razlomaka, gdje on govori o obrnutom djelitelju:[74] *Nakon što je nazivnik djelitelja postao njegov brojnik (i obrnuto), operacija se provodi kao množenje (razlomaka).*[75]

Povjesničar matematike, Victor Katz kaže da su se tada u Indiji prvi put pojavili zabilježeni rezultati o kombinatorici.[76] Poznato je iz Mahavirina rada da je on dao eksplicitni postupak za izračunavanje broja kombinacija, ali bez dokaza. Taj njegov postupak preveden na jezik moderne matematike izgleda ovako:

$$C_k^n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} = \binom{n}{k},^{77} \tag{1.7}$$

gdje je C_k^n broj različitih načina na koje se k elemenata može izabrati između n elemenata. Navest ćemo zadatak iz njegove knjige *Kratki tečaj znanosti o računanju* u kojem se radi o kombinatorici:

[73] [12, str. 162.]
[74] Obrnuti djelitelj se odnosi na današnju recipročnu vrijednost, op. a.
[75] [12, str. 162.]
[76] [10, str. 229.]
[77] [10, str. 229.]

Na koliko načina se mogu kombinirati okusi: opor, gorak, kiseo, ljut, slan i sladak?[78]

Rješenje:

Izbor k okusa (između n) jednak je što i odsustvo $n-k$ okusa. Što je u suglasnosti s binomnom relacijom $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$. Na osnovu ovog zaključujemo:

$\binom{6}{0}=1$ način da se ne izabere niti jedan okus

$\binom{6}{1}=6$ načina izbora jednog okusa

$\binom{6}{2}=\frac{6\cdot 5}{2}=15$ načina izbora dva okusa

$\binom{6}{3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2}=20$ načina izbora tri okusa

$\binom{6}{4}=\binom{6}{2}=15$ načina izbora četiri okusa

$\binom{6}{5}=\binom{6}{1}=6$ načina izbora pet okusa

$\binom{6}{6}=\binom{6}{0}=1$ način izbora svih okusa

Zbrajajući sve gore dobivene rezultate dobivamo da je ukupan broj svih različitih kombinacija okusa jednak 64.

4.2. Indijski matematičari od 1000. do 1500.

Prvi od indijskih pisaca ovog vremena bio je **Sridhara** (rođen otp. 991.). Poznat nam je njegov rad *Ganita-Sara*, koji je nazivan i *Trisatika*, rad koji se sastoji od 300 kupleta.[79] U njemu su obrađene opće teme, a između ostalog i numeracija, mjerenje, razna pravila i problemi. Rad podsjeća na jedan koji je uslijedio stoljeće poslije od Bhaskare II. pod nazivom *Lilavati*. On je bio upoznat s radom Sridhare, kako je i sam naveo u svom radu *Bija-Ganita*.

Pod općim temama gore spomenutim su uključeni: množenje, dijeljenje, nula, nizovi prirodnih brojeva, kvadriranje, korijen, razlomci, pravilo trojno,[80] kamate i dr. Iskaz koji se odnosi na nulu vrijedan je spomena kao jedan od najčišćih koji se našao među Indijcima, a glasi: *Ako je nula dodana broju, suma je taj broj; ako se nula oduzima, broj ostaje nepromijenjen; ako se nula množi, rezultat je nula; a ako se broj množi s nulom, produkt je samo nula.*[81] Dijeljenje s nulom nije razmatrano. Za dijeljenje s razlomcima Sridhara daje pravilo množenja prema obrnutom djelitelju, pravilo već poznato od Mahavire. Između ostalog, spomenut ćemo da i on koristi $\sqrt{10}$ za π.

[78] [11, str. 18.]

[79] Kuplet je šaljiva ili satirična rimovana pjesma s refrenom: preuzeto iz: [1, str. 645.]

[80] Pravilo trojno je postupak kojim se iz tri poznata člana razmjera određuje četvrti član. Ovakav problem može se riješiti i primjenom funkcije upravne odnosno obrnute proporcionalnosti te rješavanjem linearne jednadžbe prvog stupnja.

[81] [12, str, 274.]

U ovom razdoblju od 1000. do 1500. godine ističe se samo jedan indijski matematičar koji je ostavio veliki trag. Riječ je o **Bhaskari II**. (1114.-1185.), koji je rodom iz Biddura u Deccanu, ali je radio u Ujjainu. Njegovu važnost možemo zaključiti i iz toga što se o njemu pisalo i na drevnom hramu, a dio teksta glasi: "Pobjednički je slavan Bhaskaracarya čije su noge cijenjene od mudrih, eminentno učenih,..., pjesnik,..., obdaren dobrom slavom i vjerskom zaslugom...".[82]

Bhaskara II. piše uglavnom o astronomiji, aritmetici, premjeravanju i algebri. Njegov najslavniji rad je *Lilavati*, rasprava bazirana na Sridharinoj *Trisatiki*, koja govori o aritmetici i premjeravanju. Zanimljivo je da je rad najvjerojatnije dobio naziv po Bhaskarinoj kćeri koja se nikada nije udala. Davši svome radu njezino ime, učinio ju je zapamćenom po nazivu njegova djela. Djelo sadrži zapise o operacijama sa cijelim brojevima i razlomcima, pravilo trojno, kamate, nizove, permutacije, premjeravanje i malo algebre. Sadrži i pravila koja se odnose na nulu, gdje piše da je $a \pm 0 = a$, $a \cdot 0 = 0$, $0^2 = 0$ i $\sqrt{0} = 0$. Po njemu je $a \div 0 =$*beskonačno*.

Njegovo drugo djelo, već spomenuto, *Bija Ganita*, govori o algebri. U djelu se govori o usmjerenim brojevima, negativnim brojevima koji su određeni u sanskrtu kao "dug" ili "gubitak" i koji su naznačeni s točkom iznad svakog broja, kao pri ovom slučaju $\dot{3}$ za -3. Imaginarno je izostavio s tvrdnjom: *Nema kvadratnog korijena negativne količine: zato nije kvadrat.*[83] U nekim dijelovima rada koristi boje koje zamjenjuju nepoznate količine. Više pažnje posvećuje jednostavnim i kvadratnim jednadžbama, gdje su one jasnije objašnjene nego u slučaju kod drugih indijskih pisaca. Osim ovog matematičkog dijela njegova rada, on sadrži i poetični dio.

Zapis jednadžbi kojima se on koristi ima očitih prednosti. Tako jednadžba $18x^2 = 16x^2 + 9x + 18$ ima ovaj oblik:

$$\begin{array}{lll} ya\ v\ 18 & ya\ 0 & ru\ 0 \\ ya\ v\ 16 & ya\ 9 & ru\ 18. \end{array}$$

Nakon transformacije dobijemo jednadžbu $2x^2 - 9x = 18$, koja izgleda ovako:

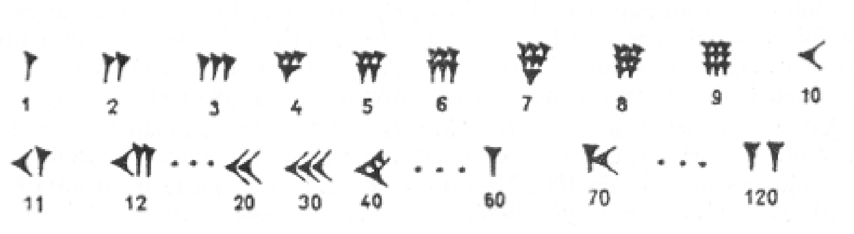
$$\begin{array}{lll} ya\ v\ 2 & ya\ \dot{9} & ru\ 0 \\ ya\ v\ 0 & ya\ 0 & ru\ 18. \end{array}$$

Bhaskaru II. se može smatrati posljednjim velikim indijskim matematičarem srednjeg vijeka, pošto se nakon njega ne javlja niti jedan indijski matematičar koji je ostavio toliko duboki trag u matematici. O nekima će još biti govora u nastavku teksta.

[82] [12, str. 275.], vlastiti slobodan prijevod.
[83] [12, str. 278.]

4.3. Decimalni pozicijski sustav i indijsko shvaćanje matematike

Istaknut ćemo nekoliko značajki o razvoju decimalnog sustava kroz povijest, koji nije bio nimalo jednostavan. Kako bismo bolje shvatili nastanak decimalnog pozicijskog sustava, spomenut ćemo informacije o njegovom nastanku. Tu svakako moramo spomenut Babilonce, koji su koristili (nedosljedan) šezdesetni sustav. Tako su brojevi pisani staroakadskim načinom u klinastom pismu izgledali ovako (Slika 16.):



Slika 16: Staroakadsko brojevno pismo (kraj 3. st. p.n.e).

Vidi se da su koristili gotovo isti znak za broj 1 i za broj 60, kao i za više potencije broja 60. Kako bi se znalo o kojem se broju radi, pažnja se posvećivala kontekstu. Pri zapisu npr. broja 83, morali su spajati brojeve predočene na slici ($83 = 60 + 20 + 3$), a zapis bi bio:

Zbog sličnosti u zapisu, gore predočen broj mogao biti i broj $3623 = 60^2 + 20 + 3$. Zato je uveden novi simbol čime je djelomice otklonjen problem. Tako je 3623 zapisivan ovako:

Sustav koji se koristio od 3. st. p.n.e je grčki sustav, a korišten je u Aleksandriji. On je bio decimalan, ali samo djelomice pozicijski. Njegov oblik je bio ovakav (Tablica 1.):

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	o	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω	$\top$
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Tablica 1: Grčki brojevni sustav

Njihov način pisanja brojeva manjih od 1000 bio je jednostavan i jednoznačan.

Primjer 1: $753 = \psi\nu\gamma,\ 529 = \phi\kappa\theta$ i slično.

Za tisućice, desettisućice itd. se alfabet ponavljao s tim što je zarez[84] ispred slova upozoravao na ponavljanje.

Primjer 2: $2523 =, \beta\phi\kappa\gamma$.

To je razdoblje kad se počinje koristiti simbol 0 za označavanje praznog mjesta, npr.:

$$2503 =, \beta\phi 0\gamma.$$

Kako bi bolje shvatili pozicijski brojevni sustav moramo znati kako se oblikuju više "jedinice" pomoću nižih (stotica je deset desetica, tisućica deset stotica itd). S ovim činjenicama se prvi put susrećemo u grčkoj matematici i to u Arhimedovom spisu *O brojenju zrnaca pijeska*.

U razvoju decimalnog pozicijskog sustava Indija je imala veliki značaj, budući da je tamo Guatama Budhe (563.-483. p.n.e) imenovao 22 broja, od kojih je svaki bio stokratnik prethodnoga. Nakon toga se brojevni sustav brahme[85] sve više širi Indijom (dobro očuvani zapisi 3. st. p.n.e) gdje je imao posebne znakove za jedinice, desetice, stotice i tisućice. Sustav brahme pisao se s lijeva nadesno, a veći brojevi su se izražavali kao višekratnici tisuća. U 2. st. p.n.e. već su mnogi brojevni sustavi prošireni u Indiji imali individualne znakove za brojeve $1, 2, 3, \ldots, 9$.

Spomenut ćemo tu već spomenutog matematičara Aryabhatu koji u svom radu *Aryabhatiyu* (napisanom 499.) koristi slogove za označavanje brojeva. Pri tome a, i, u, e označavaju potencije broja 100. Tako na primjer $g = 3$, $y = 30$, pa tako $ga = 3 \cdot 100^0 = 3$, $ya = 30$, $gi = 3 \cdot 100^1 = 300$, $yi = 3000$, $gu = 3 \cdot 100^2 = 30000$, $yu = 300000$ i slično.

Bhaskara I. (6. st. n.e), koji je bio Aryabhatin učenik, dopunio je taj sustav obilježavanja praznog rednog mjesta i time dobio pozicijski zapis. Otprilike u isto vrijeme započeli su pisati brojeve s desna nalijevo. Tako se u 6. stoljeću u Indiji javlja, iako u različitim oblicima, pozicijski decimalni sustav. Valja spomenuti da su Indijci preuzeli pojam negativnog broja od Kineza te naučili množiti s negativnim brojevima. Kod Indijaca se *0* smatrala brojem, dok je za Babilonce i Grke *0* simbol za prazno mjesto u pisanju. Već smo opisali Mahavirin odnos prema *0*. Spomenut ćemo još da su matematičari Indije imali duboka znanja iz trigonometrije te da su znali računati s iracionalnim brojevima. O dokazima svojih poučaka nisu se mnogo brinuli, isticali su računsku stranu problematike.

Novi napredak u korištenju 0 pri baratanju s matematičkim operacijama dao je već spomenuti Bhaskara II. koji naslućuje da bi rezultat diobe s nulom trebao biti beskonačan, što je već spomenuto. Općenito, indijski način mišljenja nije baš potpuno definiran u odnosu

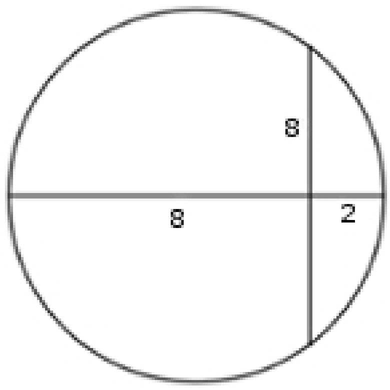
[84] Zarez prije broja množi taj broj sa 1000.
[85] Riječ je o starom indijskom brojevnom sustavu, op. a.

na grčki, međutim on je prebrodio neke teškoće i unaprijedio aritmetiku.

Svoj doprinos pri razumijevanju algebre dali su Indijci prilikom uvođenja kratica koje su slične Diofantovim, ali bez grčke strogosti. Oni najčešće upotrebljavaju prva dva slova od odgovarajućih riječi, slično kao Diofant. Nepoznanicu označavaju prvim dvama slovima: *ja* (*javat-javat*, koliko-koliko). Ukoliko se nalazi više nepoznanica upotrebljavaju se početna dva slova riječi koje označavaju boje: *ka* (*kalaka*, crn), *ni* (*nilaka*, plav) itd. Kako je to vrijeme kada postoji tendencija skraćivanja pri zapisu, tako se potencije pojavljuju u kraticama, i to za kvadrat *va* (*varga*), za treću potenciju *gha* (*ghana*), a za četvrtu potenciju *va va*.

Pokazat ćemo primjer u kojem ćemo vidjeti razliku između indijskog načina i grčkog načina određivanja tetive. Kako se grčki način odlikovao strogošću, isto to su prenijeli i na tetivu gdje se ona određivala geometrijskom metodom, dok se u Indiji ona određivala brojčano, što je u skladu s njihovim pristupom matematici. Kako bi uvidjeli indijski način određivanja tetive, uzet ćemo za primjer Brahmaguptu koji u svom djelu *Astronomski sustav Brahme*, u 12. poglavlju , točki 41., formulira jedno pravilo i daje primjer:

> *U kružnici, tetiva je drugi korijen od četverostruke strijele i promjera umanjenog za strijelu.*[86]



Slika 17: Problem o tetivi iz djela Brahmagupte *Astronomski sustav Brahme*.

Primjer (Slika 17.): *U krugu, ako je promjer 10 na mjestu gdje je strijela 2, kolika je tetiva? Promjer 10, oduzme se strijela 2 i ostaje 8. To pomnoži sa strijelom i dobije se 16, što pomnoženo sa 4 daje 64, a drugi korijen od toga je 8.*[87]

Vidi se iz primjera da je interpretacija aritmetička, gdje su pravila izračunavanja jasno izražena, iako nije dana nikakva formula u današnjem smislu. S današnjeg gledišta ovaj problem se rješava pomoću formule: $\frac{t}{2} = \sqrt{(2r-v)v}$ ili $t = \sqrt{4(2r-v)v}$ gdje je $2r$ promjer, v strijela, a t tetiva. Indijci se nisu zadržali samo na promatranju tetive, već

[86] Strijela je dio polumjera, okomitog na tetivu, od tetive do kružnice, prema: [6, str. 63.]
[87] [6, str. 63.]

su počeli promatrati i polutetivu. To se može vidjeti kod već spomenutog matematičara Aryabhate starijeg. Ovakvo razumijevanje polutetive, kao i dijelova promjera do presjeka s tetivom, poslužili su Indijcima kako bi odredili vrijednosti za *sinus*, *kosinus* i *sinus versus*.[88] Takav indijski doprinos pri promatranju tetive značio je veliki napredak prema novoj matematičkoj disciplini−trigonometriji. Arapi kasnije preuzimaju ta znanja i nastavljaju s daljnjim unapređenjem trigonometrije.[89]

[88] Razlika jedinice i kosinusa, op. a.

[89] Naziv sinus razvio se iz indijskih matematičkih tekstova. Indijci su tetivu zvali *dživa*, a polutetivu *ardha-dživa*, ali su radili kratkoće te su, kad je riječ o sinusu, i njega zvali jednostavnije *dživa*. Kasnije su arapski prevoditelji zadržali izvorni naziv i nisu ga prevodili, ali je on u arapskoj transkripciji postao *džiba*. Zbog lingvističkih razloga taj se izraz u arapskom jeziku izgovarao *džaib*, što u tom jeziku ima značenje *zavoj*. Taj je naziv na latinski preveden odgovarajućom latinskom riječju *sinus*. Taj naziv, dakle, nema nikakve veze s pojmom koji označava, preuzeto iz: [6, str. 63.]

5. Srednjovjekovna matematika Dalekog istoka

Poslije grčkog razdoblja matematike, matematika je doživjela nov razvoj u Indiji, ali i jednim manjim dijelom i u Kini. Zna se da je Indija imala veliki utjecaj na razvoj kineske matematike, što će pokazati i mnoga putovanja kineskih učenjaka u Indiju da bi prikupili znanja tog vremena, pri čemu se kineski učenjaci upoznaju s grčkim djelima i kulturom. Taj doticaj bio je prvenstveno u trgovačke svrhe, ali bio je povezan i s putovanjima hodočasnika i vojske. Sve to dovodi do razmjene znanja između tih prostora.

5.1. Srednjovjekovni matematičari Dalekog istoka

Srednjovjekovnu matematiku Kine možemo započeti sa stručnjakom u mehanici, **Tsu Ch'ung-chihom** (430.-501.), koji oživljava znanje tog područja i smatra se da je konstruirao mehanički brod. No, podaci o tome su izgubljeni, ali se spominju u drugim djelima. Spominjemo ga zbog toga što je dao dvije vrijednosti za π. Prva je $\frac{22}{7}$, što je dana kao "netočna" vrijednost, ali daje i drugu, $\frac{355}{113}$, kao "točnu" vrijednost. On zaključuje da π leži između vrijednosti 3.141592 i 3.1415927.

Razdoblje 6. stoljeća daje nekoliko kineskih matematičara. Prvi od njih je učeni budist **Ch'on Luan** (otp. 535.), koji je osmislio kalendar u drugoj polovici stoljeća. Napisao je *Arithmetic in the five classics*, djelo koje uključuje razne probleme standardnog tipa koji su se pojavljivali u radovima prijašnjih autora.

Otprilike u isto vrijeme živio je i **Ch'ang K'iu-kien** (otp. 575), čija je aritmetika *Ch'ang K'iu-kien Suan-king* u tri knjige gotovo sva sačuvana. Knjiga je posvećena razlomcima i čini se da je autor prilično jasno znao moderno pravilo dijeljenja na način da pomnoži s recipročnom vrijednošću djelitelja. To puno govori o aritmetičkom napretku, što se vidi iz poznavanja pravila trojnog i neodređenih linearnih jednadžbi.

Razdoblje od 7. do 11. stoljeća imalo je vrlo malo matematičara. Kao jednog od njih spomenut ćemo samo **Wang Xiaotonga** (otp. 580.-640.). On je bio stručnjak za kalendar i jedan od prvih Kineza koji je pisao o kubnoj jednadžbi. Njegovo djelo *Ch'i-ku Suan-king*, koje je većinom sačuvano, sadrži dvadeset problema o premjeravanju, a među tim problemima navodi i kubnu jednadžbu.

To je vrijeme kada se većina kineskih učenjaka bavila skoro isključivo kalendarom i njihova matematika je bila vezana uz usklađivanje kalendara.

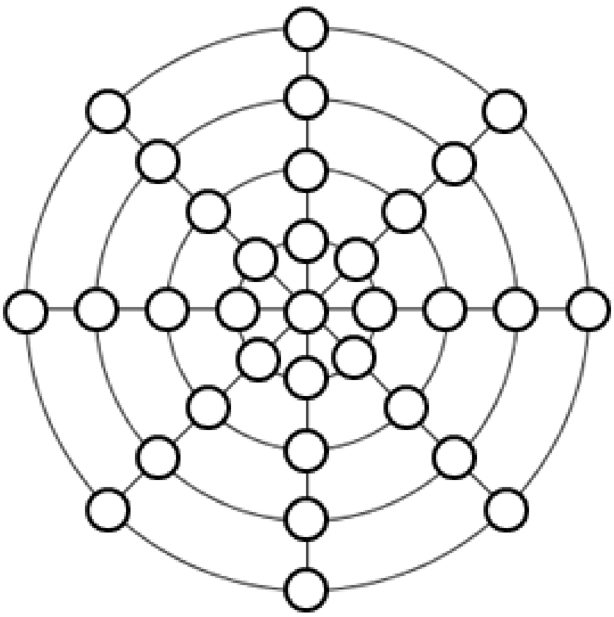
Sljedeći važniji matematičar je **Li Yeh** (1178.-1265.). Napisao je: *Sea Mirror of the Circle Measurement* (1249.), *I-ku Yen-tuan* (1259.), i nekoliko drugih radova. Zna se da je bio u javnoj službi, a 1232. postaje namjesnik Chun Choua te je bio poštovan od Kublai Khana, čija je vladavina počela 1260. Li Yeh je naredio svom sinu da spali sve njegove radove, osim *Sea Mirrora*. Svaki od tih radova se promatra kao veliko dostignuće Kine.

Kineski matematičar tog razdoblja koji je bavio između ostalog i nizovima bio je **Yang Hui** (1238.-1298.), koji je napisao dva djela: *Detaljna analiza aritmetičkih pravila u devet sekcija* (*Hsiang-kieh K'iu-ch'ang Suan-fa*) i *Yang Huiove metode izračunavanja* (*Yanh Hui Suan-fa*). U tim djelima je Hui objasnio neke dijelove originalnog djela *Nine Sections* nepoznatog autora.[90] U svojim radovima daje pravilo za zbroj nizova ovog oblika:

$$1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots + (1+2+3+\ldots+n) \ i \ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2,$$

ali ne nudi objašnjenja. Također su u ovim radovima opisane metode kvadratnog i kubnog korijena korištenjem postupaka poznatim na zapadu kao Pascalov trokut.

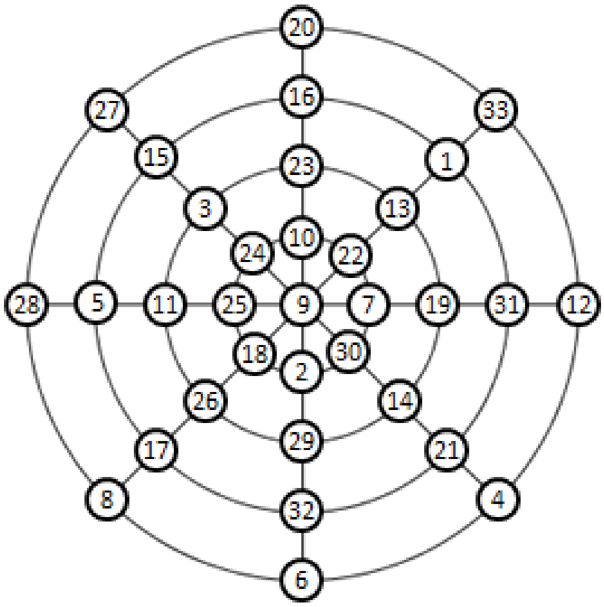
Spomenut ćemo njegovu magičnu konfiguraciju (Slika 18.) koja se nalazi u knjizi *Yang Huiove metode izračunavanja*, a ona glasi: *Rasporediti brojeve od 1 do 33 u kružiće prikazane na slici 18 tako da svaki od 4 kruga i svaki od 4 promjera imaju istu sumu.*[91]



Slika 18: Magična konfiguracija.

[90][12, str. 31.]
[91][11, str. 36.]

Rješenje ovog problema prikazano je na slici 19.



Slika 19: Magična konfiguracija - rješenje.

Napisao je još šest radova o aritmetici za koje se mislilo da su izgubljeni, ali su nađeni u Šangaju 1842. Zna se da je Yang Hui bio učitelj izvjesnog Liu I, koji je rodom iz Chung Shana, a napisao je oko 1250. rad koji je bez sumnje povezan s jednadžbama višeg reda.

Kinesku matematiku 13. stoljeća zaključujemo sa značajnim radovima **Zhu Shijie** (1260.-1320.), koji je rođen u blizini današnjeg Pekinga. O njegovom privatnom životu znamo samo to da je više od dvadeset godina bio putujući učitelj. Napisao je dva rada: *Uvod u matematiku* i *Dragocjeno ogledalo četiri elementa*,[92] što je vrhunac kineske matematike tog razdoblja i nadolazećeg. U radovima govori o onome što danas zovemo Pascalov trokut, dajući vrijednost binomnog koeficijenta pozivajući se na stari sustav. U radovima razmatra više jednadžbe i to s više od jedne nepoznanice, pri čemu njegov postupak pokazuje znanje eliminacije po određenim zapisu. Također, pokazuje svoju genijalnost prilikom rješavanja viših jednadžbi prema metodi već korištenoj od Ch'in Kiu-shao koja sliči Hornerovoj metodi.

[92][4, str. 96.]

Literatura

[1] Anić, Vladimir i suradnici: *Hrvatski enciklopedijski rječnik*, Novi Liber, Zagreb, 2003.

[2] Bell, Eric Temple: *The development of mathematics*, McGraw-Hill Book Company, Inc., York, London, 1945.

[3] Boyer, Carl Benjamin; Merzbach, Uta Caecilia: *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2011.

[4] Brückler, Franka Miriam: *Povijest matematike I*, Odjel za matematiku, Osijek, 2007.

[5] Burton, David M.: *The history of mathematics. An Introduction*, University of New Hampshire, 2011.

[6] Dadić, Žarko: *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[7] Dadić, Žarko: *Razvoj matematike. Ideje i metode egzaktnih znanosti u njihovu povijesnom razvoju*, Školska knjiga, Zagreb, 1975.

[8] Cajori, Florian: *A history of mathematics*, The Macmillan Company, London, 1909.

[9] Čekrlija, Boris: *Vremeplovom kroz matematiku*, GrafoMark, Banja Luka, 2001.

[10] Katz Victor J.: *A history of mathematics: an introduction*, Addison-Wesley, Reading, Massachusett, 1998.

[11] Petković, Miodrag: *Zanimljivi matematički problemi velikih matematičara*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2008.

[12] Smith, David Eugene: *History of mathematics I*, Dover Publications, INC, New York, 1958.

[13] Znam, Štefan i dr.: *Pogled u povijest matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

Izvori

[URL 1]: Lencović Milošević, Hana: "Herman Dalmatin - graditelj mostova između Istoka i Zapada", Nova akropola, http://www.nova-akropola.hr/Clanci/Razno/Detail.aspx?Sifra=52 (25.11.2012.)

[URL 2]: Štimac, Mirjana: "Herman Dalmatin (1110-1154)", http://www.phy.uniri.hr/ jurdana/dalmatin.pdf (29.11.2012.)

[URL 3]: Hrvatski jezični portal: http://hjp.novi-liber.hr/index.php?show=search_by_id&id=d15iWhA%3D (24.2.2013.)

[URL 4]: Hrvatski jezični portal: http://hjp.novi-liber.hr/index.php?show=search (3.3.2013.)

Sažetak

Srednji vijek se često naziva "mračnim razdobljem". To je ipak prestrogo reći, budući da je srednji vijek razdoblje koje je u kontekstu povijesti doprinijelo razvoju znanosti, a time i matematici. Osim toga, važna je poveznica između antike i renesanse.
U ranom srednjem vijeku europska matematika postepeno zaostaje za matematikom Bliskog istoka i Indije. Razlog tome djelomično možemo tražiti u kršćanstvu koje je odbacivalo sve što se kosilo sa kršćanskom teologijom te je sve takvo dobivalo poganski predznak. Ipak, svakako se mora istaknuti važnost kršćanstva u razvoju znanosti.
Upravo zbog toga su Indija i Bliski istok imali prevlast u proučavanju matematike, ali i znanosti općenito. U prvom dijelu srednjeg vijeka najveći doprinos razvoju matematike dali su: indijski matematičar Brahmagupta i matematičar s Bliskog istoka, al-Khwarizmi.
Sredinom srednjeg vijeka se situacija znatno popravlja u Europi, koja opet preuzima primat u razvoju znanosti, a samim time i matematike. U to vrijeme se ističe nekolicina značajnih europskih matematičara, a među njima svakako Fibonacci kao vodeći. Takva tendencija se nastavlja kroz cijeli srednji vijek, a time što se ponovno probudilo proučavanje znanosti u Europi ne znači da se znanost prestala proučavati u drugim dijelovima svijeta.

Abstract

The Middle Ages is often called "dark period". But it's still to strict say that because that period of history also contributed to the development of science, and therefore mathematics. Besides that it's important connection between Antiquity and Renaissance.
In the early Middle Ages, European mathematics is gradually behinde the maths of Middle East and India. The reason for this can be found in Christianity which rejected everything what is against Christian teology and have got pagan sign. However, the importance of Christianity is great.
Because of that India and Middle East have dominated in the study of matematics and science in generaly. In the first part of the Middle Ages, the largest contribution to the mathematics development gave: Indian mathematician Brahmagupta and mathematician from Middle East al-Khwarizmi.
In the middle of the Middle Ages the situation has greatly improved in Europe, the first place takes development in science and also mathematics. In that time we can mark several important European matematicians, among them certainly is Fibonacci as leading one. Such tendecies continues throught whole Middle Ages and by re-awakened the study of science in Europe doesn't mean that science has stopped to study in other parts of the world.

Životopis

Moje ime je Stipe Đikić i rođen sam 4. listopada 1982. godine u Vinkovcima. Nakon završene Osnovne škole Josipa Lovetića u Otoku, upisao sam Gimnaziju Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima, smjer: prirodoslovno-matematički. Nakon srednje škole, upisao sam studij na Sveučilištu Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, na Odjelu za matematiku, smjer: matematika-fizika. Dvije godine sam radio kao apsolvent u Osnovnoj školi Vladimira Nazora u Komletnicima.

LEKTURA:

Petrolina Tufekčić, mag. philol. croat.
e-mail: tufekcicp@gmail.com
mob: 098\929 43 29