Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Ana Čalošević

Egipatska matematika

Završni rad

Osijek, 2013.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Ana Čalošević

Egipatska matematika

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2013.

Sažetak: Ovaj završni rad proučava aritmetiku starog Egipta. Najprije ćemo se upoznati s okolnostima koje su dovele do razvoja Egipatske matematike, a potom s izvorima iz kojih doznajemo kako je ta matematika izgledala. Na primjerima s Rhindovog i Moskovskog papirusa ćemo pobliže objasniti kako su Egipćani množili, dijelili, zapisivali razlomke, te koje metode su se razvile u modernoj matematici za raspis na egipatske razlomke.

Ključne riječi: Rhindov papirus, Moskovski papirus, egipatska matematika, egipatski razlomak, egipatska aritmetika

Abstract: This final paper studies arithmetic of ancient Egypt. First, we are introduced to the circumstances which led to the development of Egyptian mathematics, then with the sources from which we learn how that math looked. Using examples from Rhindovog and Moscow papyrus we will explain more closely how the Egyptians multiplied, divided, wrote down fractions, and which methods were developed in modern mathematics for writ on Egyptian fractions.

Key words: Rhind papyrus , Moscow papyrus, Egyptian math, Egyptian fractions, Egyptian arithmetic

Sadržaj

1. Uvod

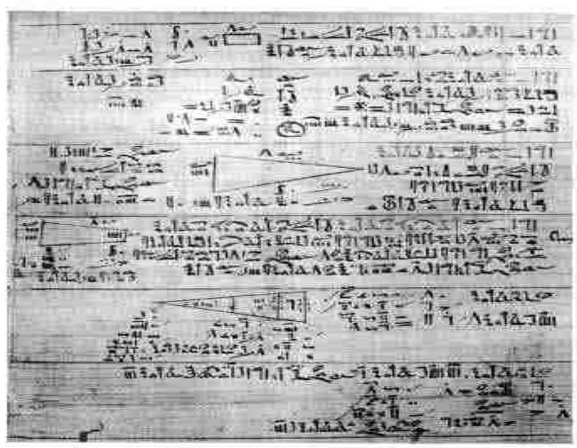
Izuzevši eventualno astronomiju, matematika je najstarija znanost, s najvećim kontinuitetom. Njezini su počeci još u staroj Antici. Iako se često kaže da je antička Grčka majka matematike, stari Grci imali su svoju ideju gdje su počeci matematike. Još je Aristotel napisao „Matematičke znanosti su nastale u susjednom Egiptu, jer su se svećenici njome bavili u slobodno vrijeme". Ovo je djelomično točno, jer se najveći napredak matematike dogodio zahvaljujući njihovom bavljenju matematikom i potragom za znanjem, no matematika je ponajprije nastala iz potrebe Egipćana za njom u svakodnevnom životu. Naime Egipat ili kako ga je Herod nazvao „dar Nila" je Nil svake godine plavio i granice posjeda su nestajale, pa je svaki put bilo potrebno ispočetka ih određivati, za što su bila potrebna jednostavna geometrijska pravila, stoga i geometriju možemo nazvati darom Nila. Također se javila potreba za izračunavanjem poreza, plaće, za pravljenje kalendara, te za utvrđivanje koliko je poplavljena zemlja mogla dobiti, a koliko izgubiti, što je dovelo do nastanka algebre.

2. Otkriće Egipatskog znanja

Većina povjesničara kao datum početka otkrivanja egipatskog znanja uzima Napoleonovu invaziju 1798. Naime, Napoleon je htio zauzeti Egipat i tako prekinuti Engleske puteve u Indiju. Bila je to francuska vojna katastrofa, ali znanstveni trijumf. Napoleon je u svojim ekspedicijama vodio povjerenstvo za znanost i umjetnost, 167 pomno odabranih znanstvenika, među kojima i Gasparda Monga i Jean-Baptiste Fouriera. Ovo povjerenstvo je imalo zadatak istražiti sve aspekte života kako u drevnom Egiptu, tako i u modernom vremenu. Veliki plan je bio obogatiti svjetsku zalihu znanja, i skrenuti pozornost na superiornost svoje kulture. Nakon njihova povratka u Francusku nastalo je djelo D'pis de lÉgypte, bilo je to djelo koje je obuhvaćalo drevne egipatske civilizacije, spomenike, moderni Egipat i prirodoslovlje Egipta. Nikad prije niti poslije nijedno djelo nije tako precizno i opširno opisalo neku stranu zemlju. D'pis de lÉgypte izazvalo je golemo zanimanje europskih kulturnih i znanstvenih krugova. Ono što je bilo još fascinantnije je da su povijesni zapisi o ovom ranom društvu bili zapisani tako da ih nitko nije bio u stanju prevesti na suvremeni jezik. Između ostalog Napoleonova ekspedicija je tijekom radova 1799. godine na rekonstrukciji stare tvrđave u blizini grada Rossete pronašla crnu bazaltnu ploču na kojoj su bila tri područja, a svaki od njih bio je ispisan drugim pismom, prvi dio je pisan hijeroglifima, drugi hijeratskim pismom, a treći grčkim. Poslali su tu ploču u Kairo, gdje su se nalazili znanstvenici koje je Napoleon poveo sa svojom ekspedicijom. Oni su prepisali ovaj kamen i proširili ga među europskim znanstvenicima. Javni interes je bio toliko jak da kada je Napoleon bio prisiljen napustiti Egipat, u ugovoru o kapitulaciji bilo navedeno da kamen mora prepustiti Britancima. Kao i ostali artefakti i ovaj je završio u Britanskom muzeju, gdje su napravljene četiri replike, za sveučilišta u Oxfordu, Cambrige, Edinburg i Dublin, kako bi zajedničko odgonetanje i analiza započela. Ispostavilo se da je problem puno teži nego se mislilo, trebalo je 23 godine intezivnog proučavanja mnoštva znanstvenika kako bi se razriješio. Konačno 1808. godine mladi francuski znanstvenik i lingvist Jean-Franois Champollion započinje proučavati natpise s kopije kamena iz Rosette i pismo antičkih Egipćana u želji da dešifrira misteriozne hijeroglife. Dugo vremena nije bilo rezultata, a onda je pretpostavio da sva tri teksta (na tri različita pisma) govore o istom. Bila je to presudna misao, a s obzirom da je grčki jezik bio dobro poznat, klupko se polako počelo odmotavati. Četrnaest godina kasnije (1822.) Champollion potvrđuje da su neki hijeroglifi bili fonogrami (fonetski ili zvučni), a drugi opet piktogrami (slikovni). 1824. godine on objavljuje svoju znamenitu knjigu egipatskih hijeroglifa, u kojoj je ustvrdio osnovne temelje kompleksnog sistema hijeroglifskog pisanja.

2.1. Rhindov papirus

Većina našeg znanja o razvoju Egipatske matematike izvedena je iz dva papirusa, svaki nazvan po bivšem vlasniku Rhind papirus i Goleinschev papirus. Potonji se često naziva i Moskovski papirus jer se nalazi u Moskovskom muzeju. Rhindov papirus je kupljen u Luxoru, u Egiptu 1858. godine, kupio ga je Scotman A. Henry Rhind i nakon toga je bio u Britanskom muzeju. Rhindov papirus je pisan hijeratskim pismom (prilagođeni oblik hijeroglifa za pisanje perom i tintom) oko 1650. godine prije Krista , pisao ga je pisar Ahmes, koji je uvjeren da rad datira do dvanaeste dinastije 1849-1801. godine prije Krista. Iako je izvorni svitak papirusa gotovo 5.5 metara dug i 50 cm visok u Britanski muzej je došao u dva dijela, s tim da središnji dio nedostaje. Pretpostavljalo se da je zbog nestručnog razvijanja tako osjetljivog dokumenta došlo do prekida ili da su bila dva pronalazača i svaki je uzeo dio. Bilo kako bilo vjerovalo se da je ključni dio papirusa izgubljen. Tako je i bilo dok četiri godine nakon to je Rhind kupio papirus, američki egiptolog Edwin Smith nije prodao, ono što je mislio da je medicinski papirus. Ovaj papirus se pokazao kao obmana, jer je bio napravljen lijepljenjem fragmenata na svitak. Nakon Smithove smrti 1906. godine njegova kolekcija Egipatskih starina je prezentirana u New Yorku 1922. godine. I tada je otkriveno da su djelovi svitka zapravo dio Rhindovog papirusa. Dešifriranje papirusa je završeno kad su fragmenti donešeni u Britanski muzej i stavljeni na odgovarajuća mjesta. Rhind je također kupio kratki kožni rukopis, međutim zbog krhkog stanja ostao je neriješen više od 60 godina.



Slika 1. Rhindov papirus

3. Egipatska aritmetika

Rhindov papirus počinje s podebljanim premisama kako njegov sadržaj ima veze s „temeljitim proučavanjem svih stvari, uvid u sve što postoji, znanje svih opskurnih tajni". Uskoro postaje jasno da je to zapravo priručnik iz matematike, a jedine tajne koje sadrži su kako se množi i dijeli. Ipak 85 problema koliko ih sadrži, daju popriličmo jasnu sliku o karakteru egipatske matematike, egipatska aritmetika se bazirala na dodavanju, tj. njezina sklonost je bila svesti množenje i djeljenje na ponovljeno zbrajanje.

3.1. Množenje

Množenje dvaju brojeva u egipatskoj matematici se ostvaruje na način da za množitelja uzmemo 1, zatim ga udvostručujemo do najbližeg broja kojeg na taj način možemo dobiti, a da ne premašuje danog množitelja, u isto vrijeme množenik udvostručujemo, zatim u prvom raspisu tražimo brojeve koji zbrojeni daju množitelja, i zatim odgovarajuća udvostručenja množenika zbrojimo i dobijemo traženi rezultat.

Primjer 3.1 *Pomnožimo broj* 19 *sa* 71.
Pretpostavimo da je množenik 71*, a množitelj* 19*,* 19 *ćemo zamijeniti s* 1 *i udvostručavati, a* 71 *ćemo ostaviti tako i udvostručavati. Najbolje ćemo to opisati ovako:*

1	71
2	142
4	284
8	568
16	1136

Ovdje stajemo jer za sljedeći korak bi udvostručavanjem množitelja premašili 19*. Budući je* $19 = 1 + 2 + 16$*, zbroj rezultata dodanih ovim brojevima trebao bi dati konačni rezultat. Pogledajmo :*

+	1	71
+	2	142
	4	284
	8	568
+	16	1136
ukupno :	19	1349

Zaista $19 \cdot 27 = (1 + 2 + 16) \cdot 71 = 71 + 142 + 1136 = 1349.$
Naravno mogao je i broj 19 *biti množenik, a* 71 *množitelj, tada bi postupak izgledao ovako :*

+	1	19
+	2	38
+	4	76
	8	152
	16	304
	32	608
+	64	1216
ukupno :	71	1349

Zbog $71 = 1+2+4+64$ *imamo* $71 \cdot 19 = (1+2+4+64) \cdot 19 = 19+38+76+1216 = 1349.$

Ova metoda množenja udvostručavanjem i zbrajanjem je primjenjiva, jer se svaki pozitivni cijeli broj može zapisati kao zbroj nekih potencija broja 2. Nije vjerojatno da su drevni Egipćani znali i dokazati tu činjencu, već je njihovo uvjerenje u nju prizašlo iz mnogobrojnih primjera. Prednost ovakvog načina množenja je što je nepotrebno pamćenje tablica.

3.2. Dijeljenje

Egipatsko djeljenje moglo bi se opisati kao obrnuto množenje. Djelitelj se udvostručuje kako bi dobili djeljenik.

Primjer 3.2 *Podijelimo* 91 *sa* 7.
Promotrimo što zapravo trebamo odreditii: treba odrediti x takav da je $7 \cdot x = 91$, stoga ćemo udvostručavati 7 dok ne dobijemo 91. Evo postupka:

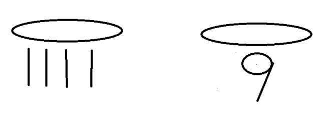
	1	7	+
	2	14	
	4	28	+
	8	56	+
ukupno :	13	91	

Ovdje stajemo, jer bi daljnjim udvostručavanjem premašili 91, *uočimo da je* $91 = 7 + 28 + 56$, *pa je naš traženi* $x = 1 + 4 + 8 = 13$, *tj.* $91 \div 7 = 13$.

Egipatsko dijeljenje ima pedagošku prednost jer se ne pojavljuje nova operacija, nego se djeljenje svodi na već poznate operacije. Naravno, djeljenje nije uvijek tako jednostavno, jer često moramo uvesti razlomke.

3.3. Razlomci

Svaki put kada su egipatski matematičari trebali računati s razlomcima, bili su suočeni s mnogim teškoćama koje proizlaze iz njihova odbijanja da zamisle razlomak kao npr. $2/5$. Njihova računska praksa je o priznavala samo tzv. jedinične razlomake, to jest, razlomake oblika $1/n$, gdje je n prirodni broj. Egipćani su prikazivali jedinične razlomake pomoću stavljanja izduženog ovalnog oblika preko hijeroglifa za cijeli broj koji je trebalo da se pojavi u nazivniku.



Slika 2.. Razlomci $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{100}$ u egipatskom zapisu.

S izuzetkom razlomka $2/3$, za koji su imali poseban simbol, svi ostali razlomci morali su se raspisati kao zbroj jediničnih razlomaka, od kojih svaki ima drugačiji nazivnik. Tako je primjerice razlomak $\frac{6}{7}$ bio raspisan kao: $\frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}$, naravno to se moglo zapisati i kao $\frac{6}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$, ali bi Egipćani takav zapis smatrali apsurdnim i kontradiktornim.
Kako je to zapravo izgledalo u primjeni pogledajmo na primjeru:

Primjer 3.3 *Podijelimo* 35 *sa* 8.
Krenimo s udvostručavanjem broja 8*. Budući da nikako ne možemo dobiti* 35 *kao zbroj nekih pribrojnika s desne strane krenut ćemo s razlomcima:*

	1	8	
	2	16	
	4	32	+
	$\frac{1}{2}$	4	
	$\frac{1}{4}$	2	+
	$\frac{1}{8}$	1	+
ukupno:	$4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	35	

Primjer 3.4 *Podijelimo* 16 *sa* 3.
Pogledajmo kako bi izgledalo rješenje:

	1	3	+
	2	6	
	4	12	+
	$\frac{2}{3}$	2	
	$\frac{1}{3}$	1	+
ukupno:	$5 + \frac{1}{3}$	16	

Zbroj unosa u lijevom stupcu odgovara našem kvocijentu.

Zanimljivo je to što da bi dobili trećinu, Egipćani su prvo pronalazili 2/3, a zatim polovinu od toga. To je prikazano u više problema Rhindovog papirusa. Zanimljivo je pogledati kako bismo dijelili manji broj većim.

Primjer 3.5 *Podijelimo* 6 *sa* 7.
Ovdje ćemo odmah početi s uzimanjem $\frac{1}{2}$*, budući da je* 7 *veće od* 6*, pa zasigurno ne trebamo* 7 *udvostručavati.*

	1	7	
	$\frac{1}{2}$	$3 + \frac{1}{2}$	+
	$\frac{1}{4}$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	+
	$\frac{1}{7}$	1	
	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$	+
	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{4}$	+
ukupno:	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}$	6	

Da bi se olakšao proces raspisa u jedinične razlomke, postoje referentne tablice, od kojih su najjednostavnije posvećene učenju na pamet. Na početku Rhindovog papirusa, postoji upravo takva tablica koja daje raspis razlomaka čiji je brojnik 2, a nazivnik neparni broj između 5 i 101. Ova tablica zazuzima gotovo trećinu Rhindovog papirusa, i ona je najopsežnija aritmetička tablica pronađena među drevnim egipatskim papirusima. Na papirusu nije bilo objašnjeno na koji način se dolazi do ovog raspisa. Uočeno je pravilo za razlomke oblika $2/n$ kada je nazivnik n djeljiv s 3, tada je opće pravilo raspisa dano s:

$$2/(3k) = 1/(2k) + 1/(6k).$$

Primjer 3.6 *Raspišimo razlomak* $2/15$ *na jedinične razlomke.*

Za $2/15$ *je k=5, pa je* $2/15 = 1/(2\cdot 5) + 1/(6\cdot 5) = 1/10 + 1/30$.

Slijedi tablica raspisa razlomaka oblika $2/n$, s neparnim nazivnikom između 5 i 101, bez onih razlomaka kod kojih je nazivnik djeljiv s tri.

Tablica raspisa:

$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$	$\frac{2}{53} = \frac{1}{30} + \frac{1}{318} + \frac{1}{795}$
$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$	$\frac{2}{55} = \frac{1}{30} + \frac{1}{330}$
$\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$	$\frac{2}{59} = \frac{1}{36} + \frac{1}{236} + \frac{1}{531}$
$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$	$\frac{2}{61} = \frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610}$
$\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$	$\frac{2}{65} = \frac{1}{39} + \frac{1}{195}$
$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$	$\frac{2}{67} = \frac{1}{40} + \frac{1}{335} + \frac{1}{536}$
$\frac{2}{23} = \frac{1}{12} + \frac{1}{276}$	$\frac{2}{71} = \frac{1}{40} + \frac{1}{568} + \frac{1}{710}$
$\frac{2}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75}$	$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365}$
$\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$	$\frac{2}{77} = \frac{1}{44} + \frac{1}{308}$
$\frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$	$\frac{2}{79} = \frac{1}{60} + \frac{1}{237} + \frac{1}{316} + \frac{1}{790}$
$\frac{2}{35} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$	$\frac{2}{83} = \frac{1}{60} + \frac{1}{332} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498}$
$\frac{2}{37} = \frac{1}{24} + \frac{1}{111} + \frac{1}{296}$	$\frac{2}{85} = \frac{1}{51} + \frac{1}{255}$
$\frac{2}{41} = \frac{1}{24} + \frac{1}{246} + \frac{1}{328}$	$\frac{2}{89} = \frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890}$
$\frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}$	$\frac{2}{91} = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}$
$\frac{2}{47} = \frac{1}{30} + \frac{1}{141} + \frac{1}{470}$	$\frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$
$\frac{2}{49} = \frac{1}{28} + \frac{1}{196}$	$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$
$\frac{2}{51} = \frac{1}{34} + \frac{1}{102}$	$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$

Otkako je prvi prijevod papirusa objavljen, matematičari su pokušavali objasniti kako je došlo do rezultata u ovoj tablici i otkriti koja je metoda upotrebljena za njezin nastanak. Zašto je od svih mogućih raspisa, u tablicu uvršten baš taj raspis? Jedno od pravila koje je je otkriveno je ono koje slijedi iz posljednjeg rezultata ove tablice, $\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$, i pomoću kojeg se može dobiti raspis svih ostalih razlomaka u tablici je dano formulom:

$$2/n = 1/n + 1/(2n) + 1/(3n) + 1/(6n).$$

Tablica izvedena ovom formulom bi se u cijelosti sastojala od četveročlanog raspisa. Tako bi primjerice razlomak $\frac{2}{3}$ bio dan s:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}.$$

Međutim, ovo pravilo nije korišteno u pronađenoj tablici na Rhindovom papirusu. Koja su točna pravila iz kojih slijedi poznata tablica nije poznato, ali evo nekih koja su uočena tijekom mnogih proučavanja:

- mali nazivnici su prihvatljiviji, nikako veći od 1000
- što manje jediničnih razlomaka, i ne više od 4
- parni nazivnici su poželjniji od neparnih, pogotovo za početni član
- nazivnici idu od manjeg prema većem, te ne postoje dva jednaka
- prvi mali nazivnik se može povećati ako se veličina ostalih može reducirati, npr. $2/31 = 1/20 + 1/124 + 1/155$ je bilo bolje nego $2/31 = 1/18 + 1/186 + 1/279$.

3.3.1. Množenje i dijeljenje razlomaka

Primjer 3.7 *Pomnožimo* $2 + \frac{1}{4}$ *s* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$.
Primijetimo da udvostručavanjem $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$ *dobivamo* $3 + \frac{2}{7}$ *što je u egipatskom zapisu* $3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$. *Prema tome, postupak se može zapisati u obliku:*

	1	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$	
	2	$3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$	$+$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14}$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{28}$	$+$
ukupno:	$2 + \frac{1}{4}$	$3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{14}$	

Vidimo da su egipatski matematičari znali da se udvostručavanjem razlomka oblika $1/(2n)$ dobiva razlomak $1/n$.
Kao primjer nešto težeg množenja razlomaka pogledajmo problem 33. s Rhindovog papirusa.

Primjer 3.8 *(33. problem Rindovog papirusa) Podijelimo* 37 *sa* $1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$.
U standardnom egipatskom dijeljenju bi to izgledalo ovako:

1	$1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2+\frac{1}{7}}$
2	$4+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$
4	$8+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$
16	$36+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$

Kad $\frac{2}{7}$ *napišemo kao* $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$, *dobivamo zbroj* $36+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$, *što je blizu 37, ali nije 37. Koliko još nedostaje? Ahmes je to zapisao u obliku „Što nadopunjuje* $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ *do 1", a mi bismo u modernom zapisu zapravo tražili razlomak* x *za koji vrijedi*

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+x=1,$$

ili drugačije zapisano:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{y}{84}=1,$$

pri čemu je 84 *zapravo najmanji zajednički višekratnik nazivnika* 3, 4 *i* 28. *Množenjem obje strane s* 84 *dobivamo* $56+21+3+y=84$, *pa je* $y=4$. *Znači zbroju* $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ *trebamo dodati* $\frac{4}{84}=\frac{1}{21}$ *da bismo dobili* 1. *Sljedeći korak je izračunati s koliko trebamo pomnožiti* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$ *da dobijemo* $\frac{1}{21}$. *To zapravo znači pronaći rješenje* z *jednadžbe:*

$$z\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{21}.$$

Množeći sve s 42 *dobivamo* $97z=2$, *odnosno* $z=\frac{2}{97}$ *što je u egipatskom zapisu* $\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$. *Sada se cijeli račun može zapisati u obliku:*

	1	$1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2+\frac{1}{7}}$	
	2	$4+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$	
	4	$8+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$	
	16	$36+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$	$+$
	$\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$	$\frac{1}{21}$	$+$
ukupno:	$16+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$	37	

3.3.2. Moderni način raspisa razlomaka s brojnikom većim od 2 kao zbroja jediničnih razlomaka

Postoji nekoliko modernih načina za raspisivanje razlomaka s nazivnikom većim od 2 u obliku zbroja jediničnih razlomaka. Pretpostavimo da treba $\frac{9}{13}$ zapisati u tom obliku.

Budući je $9 = 1+4\cdot2$ jedan od načina bi mogao biti $\frac{9}{13} = \frac{1}{13}+4\cdot\frac{2}{13}$. Razlomak $\frac{2}{13}$ možemo pomoću tablice $2/n$ zapisati kao zbroj jediničnih razlomaka, pa bi raspis izgledao ovako:

$$\begin{aligned}
\frac{9}{13} &= \frac{1}{13} + 4\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}\right) \\
&= \frac{1}{13} + \frac{1}{2} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26} \\
&= \frac{2}{13} + \frac{1}{2} + \frac{1}{26} \\
&= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{26}.
\end{aligned}$$

Konačni raspis bi bio

$$\frac{9}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}.$$

Razlog iz kojeg smo ovaj razlomak mogli ovako raspisati je što su nazivnici 8, 52 i 104 svi djeljivi s 4. No, nećemo uvijek biti te sreće.

Navest ćemo dvije metode kojima se svaki pozitivan racionalan broj može raspisati kao zbroj konačno mnogo jediničnih razlomaka. To su metoda razdjeljivanja i Fibonaccijeva metoda.

Metoda razdjeljivanja

Metoda razdjeljivanja se bazira na formuli:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

koja omogućava zamjenu jednog razlomka zbrojem druga dva.

Primjer 3.9 *Napiši razlomak $\frac{2}{19}$ kao zbroj jediničnih razlomaka.*
Najprije $\frac{2}{19}$ napišemo kao $\frac{2}{19} = \frac{1}{19} + \frac{1}{19}$, a zatim jedan od razlomaka $\frac{1}{19}$ razdijelimo prema navedenoj formuli na $\frac{1}{20} + \frac{1}{19\cdot20}$, pa imamo

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \frac{1}{380}.$$

Primjer 3.10 *Raspiši razlomak $\frac{3}{5}$ kao zbroj jediničnih razlomaka.*
Počnimo s $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, sad posljednja dva razlomka raspišemo kao $\frac{1}{6} + \frac{1}{5\cdot6}$, tj. $\frac{1}{6} + \frac{1}{30}$. Imamo

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{30}\right).$$

Postupak možemo nastaviti na nekoliko načina. Mi ćemo u ovom primjeru zanemariti ono očito: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ i $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$, i umjesto toga ćemo $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{30}$ zapisati kao zbrojeve $\frac{1}{7} + \frac{1}{6\cdot7}$, odnosno $\frac{1}{31} + \frac{1}{30\cdot31}$, pa slijedi:

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42} + \frac{1}{31} + \frac{1}{930}.$$

Općenito, ako imamo razlomak $\frac{m}{n}$ prvo ga raspišemo u obliku:

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{m-1 \text{ pribrojnik}}.$$

Sad koristeći formulu razdjeljivanja, zamjenjujemo $m-1$ jediničnih razlomaka $\frac{1}{n}$ s

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)},$$

pa dobivamo

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} + \underbrace{\left[\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}\right)\right]}_{m-2 \text{ pribrojnika}}.$$

Nastavljajući postupak, u sljedećem koraku zamjenjujemo razlomke $\frac{1}{n+1}$ i $\frac{1}{n(n+1)}$. Dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &\quad + \frac{1}{n(n+1)+1} + \frac{1}{n(n+1)[n(n+1)+1]} + \ldots \end{aligned}$$

Iako broj jediničnih razlomaka (a time i vjerojatnost ponavljanja) u svakom koraku raste, može se pokazati da taj proces završava u konačno mnogo koraka.

Fibonaccijeva metoda

Za drugu metodu koju ćemo pokazati zaslužan je Leonardo iz Pise, poznatiji kao Fibonacci, po imenu svog oca. Fibonacci je 1202. godine objavio algoritam za raspis bilo kojeg racionalnog broja između 0 i 1 kao zbroja različitih jediničnih razlomaka. Ideja je sljedeća: uzmemo zadani razlomak, od njega oduzmemo najveći jedinični razlomak manji od njega, zatim od razlike oduzmemo najveći jedinični razlomak manji od nje itd., sve dok se kao razlika ne dobije jedinični razlomak.

Nije poznato je li Fibonacci znao da njegova metoda uvijek funkcionira, tj. da postupak staje nakon konačno mnogo koraka, ali se dokaz može provesti.

Teorem 3.1 *(Fibonaccijev teorem) Svaki pozitivan racionalan broj se može zapisati kao zbroj konačno mnogo jediničnih razlomaka.*

Da bismo dokazali ovaj teorem najprije ćemo dokazati jednu lemu.

Lema 3.1 *Neka je* $\frac{p}{q}$ *bilo kakav razlomak manji od* 1 *koji nije jedinični. Neka je* $\frac{1}{n}$ *najveći jedinični razlomak manji od* $\frac{p}{q}$*. Tada je* $\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{r}{qn}$ *razlomak sa svojstvom* $r < p$*.*

Dokaz leme:
Imamo $\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{pn-q}{qn}$*. Ako je* $p \leq pn - q = r$*, pribrajanjem* $q - p$ *dobivamo* $q \leq pn - p$*. No, tada je* $\frac{1}{pn-p} \leq \frac{1}{q}$*. Množenjem obaju strana s* p *i dobivamo* $\frac{1}{n-1} \leq \frac{p}{q}$*. Budući* $\frac{p}{q}$ *nije jedinični razlomak, ali je manji od* 1*, slijedi da je* $n > 2$*, a* $\frac{1}{n-1}$ *je jedinični razlomak veći od* $\frac{1}{n}$ *i manji od* $\frac{p}{q}$*, što je kontradikcija s izborom od* n*.*

Dokaz teorema:
Neka je $\frac{p}{q}$ *neki zadani pozitivan racionalni broj. Ukoliko je veći od* 1*, od njega oduzmemo najveći prirodni broj manji od njega (a taj sigurno možemo zapisati kao zbroj jedinica) i postupak primjenjujemo na ostatak. Prema tome, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti* $\frac{p}{q} < 1$*. Primjenom Fibonaccijeve metode (oduzimanje najvećeg jediničnog razlomka* $\frac{1}{n}$ *manjeg od* $\frac{p}{q}$*), dobivamo da je* $\frac{p}{q} = \frac{1}{n} + \frac{r}{qn}$*. Ponovimo postupak s* $\frac{r}{qn}$*. Budući da je po prethodnoj lemi* $r < p$*, slijedi da će ostatak idućeg koraka imati još manji brojnik. Uzastopnim ponavljanjem postupka imat ćemo dakle niz razlomaka - ostataka s pripadnim padajućim nizom brojnika. Kako su brojnici prirodni brojevi, slijedi da niz brojnika mora biti konačan.*

Pokažimo Fibonaccijevu metodu na primjeru:

Primjer 3.11 *Raspišimo razlomak* $\frac{2}{19}$ *kao zbroj jediničnih razlomaka.*
Najprije trebamo oduzeti od $\frac{2}{19}$ *najveći jedinični razlomak manji od njega. Uočimo da je* $9 < \frac{19}{2} < 10$*, pa je* $\frac{1}{10} < \frac{2}{19} < \frac{1}{9}$*, što znači da je* $\frac{1}{10}$ *najveći jedinični razlomak koji možemo oduzeti.*
Oduzimanje nam daje: $\frac{2}{19} - \frac{1}{10} = \frac{20-19}{19 \cdot 10} = \frac{1}{190}$*.*
Imamo traženi raspis:

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{10} + \frac{1}{190}.$$

Primjer 3.12 *Raspišimo razlomak* $\frac{9}{13}$ *kao zbroj jediničnih razlomaka.*
Uočimo da je $1 < \frac{13}{9} < 2$ *što znači da je* $\frac{1}{2} < \frac{9}{13} < 1$*, što znači da je prvi jedinični razlomak u raspisu* $\frac{1}{2}$*. Računamo* $\frac{9}{13} - \frac{1}{2} = \frac{18-13}{13 \cdot 2} = \frac{5}{26}$*, što daje raspis* $\frac{9}{13} = \frac{1}{2} + \frac{5}{26}$*. Očekivano brojnik preostalog dijela je manji od brojnika početnog razlomka, tj.* $5 < 9$*. Ponavljamo postupak za razlomak* $\frac{5}{26}$*. Budući je* $5 < \frac{26}{5} < 6$*, to je* $\frac{1}{6} < \frac{5}{26} < \frac{1}{5}$*, pa je sljedeći razlomak u raspisu* $\frac{1}{6}$*. Oduzmemo* $\frac{5}{26} - \frac{1}{6} = \frac{30-26}{26 \cdot 6} = \frac{4}{156} = \frac{1}{39}$*. Dobili smo jedinični razlomak, pa naš postupak staje i imamo konačni raspis:*

$$\frac{9}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{39}.$$

3.4. Metoda lažne pozicije

Rhindov papirus sadrži nekoliko „kompleta” problema, dosta ih počinje određivanjem jediničnih razlomaka i traženja dodatnog jediničnog razlomka koji se treba dodati da bi se dobila vrijednost 1.

Primjer 3.13 *(22. problem Rhindovog papirusa) Koliki je dovršetak zbroja* $\frac{2}{3}+\frac{1}{30}$ *da se dobije zbroj* 1*?*
U modernom zapisu, račun se izvodi odabirom broja N *i jediničnih razlomaka* $\frac{1}{n_1}$, $\frac{1}{n_2},\ldots,\frac{1}{n_k}$ *koji zadovoljavaju jednadžbu:*

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_k}\right)N=N.$$

Slijedi da je prošireni zbroj jednak 1*. Uzimajući da je* $N=30$ *(što je zajednički nazivnik), primjećujemo*

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{30}\right)30=20+1=21,$$

što je za 9 *manje od željenih* 30*. Ali*

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)30=9.$$

Zbrojimo li ove dvije jednakosti dobivamo

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)30=30,$$

tj. naše rješenje je

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=1.$$

Veliki dio Rhindovog papirusa predstavljaju praktični problemi kao što je poštena podijela kruha određenom broju ljudi ili određivanje potrebne količine žita za izradu piva. Ti problemi su jednostavni i ne idu dalje od linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom.

Primjer 3.14 *(24. problem Rhindovog papirusa) Količina i njezina* $\frac{1}{7}$ *daju* 19*. Kolika je količina?*
Danas s našim algebarskim simbolima bismo jednostavno stavili x *umjesto nepoznate količine i rješili jednadžbu oblika*

$$x+\frac{x}{7}=19 \quad ili \quad \frac{8x}{7}=19.$$

Ahmes je, budući da izraz $\frac{8}{7}$ *nije bio dopušten, objasnio problem ovako: „S koliko* 8 *mora biti pomnožen da dobijemo* 19*, s toliko pomnožimo* 7 *i dobijemo rješenje.”. Koristio je najstariji i najuniverzalniji postupak za rješavanje linearnih jednadžbi, metodu* *lažne pozicije ili krive pretpostavke. Ukratko, ova metoda se sastoji od toga da se najprije uzme proizvoljna vrijednost za željenu veličinu, te se zatim rješava problem s tom vrijednosti, dobiveno rješenje se usporedi s traženim rezultatom. Točno rješenje je u datom odnosu s pretpostavljenim kao traženi rezultat s dobivenim.*

Ako rješavamo našu jednadžbu $x + \frac{x}{7} = 19$*, možemo pretpostaviti da je rješenje* $x = 7$ *(uzeli smo* 7 *samo zato što nam je u ovom primjeru s tim brojem lako za izračunati* $\frac{x}{7}$*). Lijeva strana jednadžbe sada iznosi* $7 + \frac{7}{7} = 8$*, umijesto traženih* 19*. Budući da* 8 *moramo pomnožiti s* $\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ *da bismo dobili* 19*, točna vrijednost* x *dana je umnoškom*

$$x = \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot 7 = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$$

Zapravo, možemo uzeti bilo koju vrijednost za nepoznanicu, recimo $x = a$*. Ako je* $a + \frac{a}{7} = b$ *i* $bc = 19$*, onda* $x = ac$ *zadovoljava jednadžbu* $x + \frac{x}{7} = 19$*, iz čega se lako vidi iz*

$$ac + \frac{1}{7}ac = \left(a + \frac{a}{7}\right)c = bc = 19$$

Vidimo da su Egipćani poznavali, barem u osnovnoj formi, omiljenu metodu srednjeg vijeka, metodu lažnih pretpostavki. U Europu je ova metoda došla od Arapa, i postala istaknuti dio europske matematike, od Fibonaccijevog teksta Liber Abaci (1202.), pa sve do aritmetike 19. stoljeća. Kako su se algebarski simboli razvijali, pravila su postajala naprednija. Slijedeći primjer je preuzet iz Liber Abaci.

Primjer 3.15 *Čovjek kupuje jaja po cijeni od 7 komada za 1 novčić, te ih prodaje po cijeni 5 komada za jedan novčić, i tako zaradi 19 novčića. Koliko je novčića uložio? Algebarski ovaj problem se može izraziti jednadžbom*

$$\frac{7x}{5} - x = 19.$$

Metoda lažnih pretpostavki se sastoji u tome da uzmemo npr. 5 *za nepoznanicu, sad imamo* $\frac{7}{5} \cdot 5 - 5 = 2$*. Ovo* 2*, izraženo Fibonaccijevim jezikom, bismo „željeli da bude* 19*" (* 2 *se odnosi prema* 19 *kao* 5 *prema točnom rješenju). Budući je* $2 \cdot \left(\frac{19}{2}\right) = 19$*, točno rješenje je:*

$$x = 5 \cdot \left(\frac{19}{2}\right) = 47 + \frac{1}{2}.$$

Primjetimo da broj koji je Fibonacci uzeo za nepoznanicu nije bio proizvoljno uzet, već, kako je nepoznati broj razlomak, broj koji dobijemo s našim izabranim brojem je zapravo nazivnik tog nepoznatog razlomka. Do sada smo promatrali ponašanje lažne pretpostavke u kojoj je bilo napravljeno jedno pogađanje, ali ima i varijanti kada je potrebno napraviti dva pokušaja i primjetiti pogrešku za svaki. Ovo teško pravilo dvostrukog lažnog pokušaja, kako ga ponekad nazivaju, može se objasniti na sljedeći način.

Kako bi rješili i jednadžbu $ax + b = 0$, uzmimo g_1 i g_2 za dva pogađanja vrijednosti x, i neka f_1 i f_2 budu odgovarajuće pogreške, odnosno vrijednosti izraza $ag_1 + b$ i $ag_2 + b$, koje bi bile jednake 0 da je pogađanje točno. Imamo

$$ag_1 + b = f_1 \tag{1}$$

$$ag_2 + b = f_2. \tag{2}$$

Oduzimanjem dobivamo

$$a(g_1 - g_2) = f_1 - f_2. \tag{3}$$

Množenjem jednadžbe (1) s g_2 i jednadžbe (2) s g_1 slijedi

$$ag_1g_2 + bg_2 = f_1g_2$$

$$ag_2g_1 + bg_1 = f_2g_1.$$

Kada posljednje dvije jednakosti oduzmemo, imamo

$$b(g_2 - g_1) = f_1g_2 - f_2g_1. \tag{4}$$

Podijelimo sad (4) sa (3):

$$-\frac{b}{a} = \frac{f_1g_2 - f_2g_1}{f_1 - f_2}.$$

Budući je $x = -\frac{b}{a}$, vrijednost x je dana izrazom:

$$x = \frac{f_1g_2 - f_2g_1}{f_1 - f_2}.$$

Znači, uzeli smo dvije „lažne” vrijednosti za x i uvrstili ih u izraz $ax + b$, i iz ovih pokušaja smo uspijeli dobiti točno rješenje jednadžbe $ax + b = 0$. Pogledajmo kako bismo ovaj pravilo dvostrukog lažnog pokušaja primjenili na već riješenom 24. problemu Rhindovog papirusa.

U ovom primjeru smo trebali riješiti jednadžbu

$$x + \frac{x}{7} = 19, \quad \text{tj.} \quad x - \frac{x}{7} - 19 = 0.$$

Uzmimo za x dvije proizvoljne vrijednosti, recimo $g_1 = 7$ i $g_2 = 14$. Imamo

$$7 + \frac{7}{7} - 19 = -11 = f_1 \quad \text{i} \quad 14 + \frac{14}{7} - 19 = -3 = f_2.$$

Slijedi da je točna vrijednost x

$$x = \frac{f_1g_2 - f_2g_1}{f_1 - f_2} = \frac{(-11)\cdot 14 - (-3)\cdot 7}{(-11) - (-3)} = \frac{133}{8} = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$$

Iako se čini nespretno, ima određene jednostavnosti u ovome primitivnom pravilu, i nije čudo da je bilo korišteno do kraja 80.-ih. godina 19. stoljeća.

3.5. „Zamisli broj”

Rhindov papirus također sadrži najraniji primjer problema „zamisli broj”.

Primjer 3.16 *(28. problem Rhindovog papirusa) Zamislite broj, dodajte mu $\frac{2}{3}$ tog broja. Od zbroja oduzmite $\frac{1}{3}$ dobivene vrijednosti i recite koliko ste dobili.*
Pretpostavimo da je odgovor 10, od 10 oduzmemo $\frac{1}{10}$ od 10 i dobijemo 9. Broj 9 je zamišljeni broj.
Provjerimo:
ako je zamišljeni broj 9, $\frac{2}{3}$ od 9 su 6, pa dodamo $9+6=15$. Zatim od 15 oduzmemo $\frac{1}{3}$ od 15 što je 5 i dobijemo 10.

Algebarski bismo to zapisali u obliku

$$\left(n+\frac{2n}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(n+\frac{2n}{3}\right)-\frac{1}{10}\left[\left(n+\frac{2n}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(n+\frac{2n}{3}\right)\right]=n,$$

u našem primjeru je $n=9$.

3.6. Suma geometrijskog niza

Problem 79. Rhindovog papirusa je iznimno sažet i sadrži neobičan skup podataka, koji ukazuju na poznavanje sume prvih nekoliko članova geometrijskog niza.

			kuće	7
+	1	2801	mačke	49
+	2	5602	miševi	343
+	4	11204	snopovi	2401
ukupno:	190607		mjerice žita	16807
			ukupno:	19607

Pojedinci smatraju da ove riječi simbolično daju prvih pet potencija broja 7, drugi pak ove podatke tumače na sljedeći način U svakoj od 7 kuća je bilo 7 mačaka, svaka mačka je ubila 7 miševa, i svaki miš bi pojeo 7 snopova pšenice , i na svakom snopu bilo bi 7 mjerica žita. Koliko žita je spašeno?. Bilo kako bilo, vidimo da desnoj strani imamo zbroj $7, 7^2, 7^3, 7^4$ i 7^5 dobiven „običnim” dodavanjem. Lijevo je zbroj istog niza je dan kao $7 \cdot 2801$, gdje je množenje provedeno metodom dupliciranja. Budući je $2801 = (7^5-1)(7^-1)$ imamo

$$7 \cdot 2801 = 7\left(\frac{7^5-1}{7-1}\right) = 7+7^2+7^3+7^4+7^5,$$

što je točno ono što bismo dobili koristeći modernu formulu za sumu prvih n članova geometrijskog niza

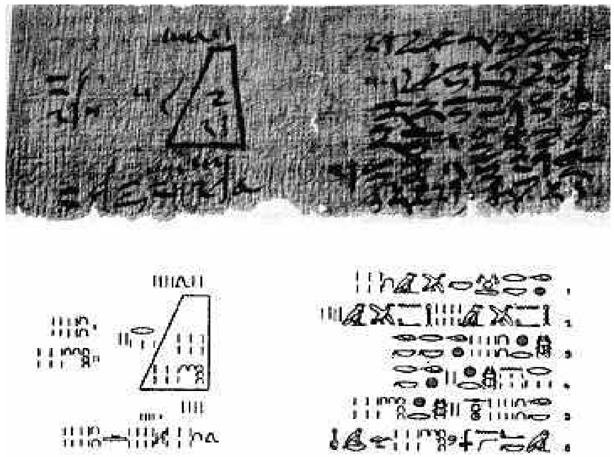
$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

U prošlom primjeru $a = r = 7$ i $n = 5$. Nema uvjerljivih dokaza da je ova formula u nekom obliku bila poznata Egipćanima.

Negdje 3000 godina poslije Ahmesa, Fibonacci je objavio u Liber Abaci isti niz potencija broja 7 na sljedeći način:
7 starica ide cestom u Rim.
Svaka starica vodi 7 magaraca.
Svaki magarac nosi 7 vreća.
U svakoj vreći je 7 kruhova.
Uz svaki kruh je 7 noževa.
Svaki nož je umotan u 7 krpa.
Koliko ih je ukupno?
Slično se pojavljuje i u staroj engleskoj dječjoj pjesmici, što svjedoči kako je ovaj problem s Rhindovog papirusa izazivao zanimanje kroz stoljeća.

3.7. Moskovski papirus

Bolje upoznavanje matematike starog Egipta omogućilo nam je prevođenje tzv. Moskovskog papirusa. Ovaj papirus mnogi povjesničari smatraju najimpresivnijim postignućem egipatske matematike. Moskovski papirus je nastao oko 1850. godine prije nove ere. Autor ovog papirusa je nepoznat, a često se naziva i Goleniščevov papirus, prema ruskom istraživaču V. S. Goleniščevu koji ga je otkrio sredinom 19. stoljeća i 1893. godine ga donio u Moskvu. Preveo ga je B. B. Struve, a prijevod je objavljen 1930. godine. Struve smatra da taj papirus otkriva kako je „početak naučnog posmatranja matematičkih pitanja se ne nalazi u Grčkoj, nego u Egiptu". Zadaci su, kao i u Rhindovom papirusu, pisani riječima, kratko, a tako su i rješavani. Zadaci su i ovdje vezani za praktične probleme. Moskovski papirus se sastoji od 25 zadataka, među kojima su najznačajniji oni iz geometrije, jer daju velika saznanja o egipatskoj geometriji, međutim mnogi su zadaci aritmetički.



SLIKA 3. Moskovski papirus

Primjer 3.17 *(25. problem Moskovskog papirusa) Jedna količina, računata dvaput zajedno, sa još jednom količinom dostiže 9. Kolika je količina?*
Na papirusu je rješenje zapisano u obliku:
„Računaj zbroj te jedne količine zajedno sa te dvije”.
„Nastaje 3. Računaj sa te tri, da bi dobio 9. Nastaje triput.”
„Gle! To je 3. Točno si našao!”.
U modernom zapisu to je jednadžba oblika

$$2x + x = 9.$$

Zbrojimo li lijevu stranu imamo

$$2x + x = 3x,$$

odakle slijedi

$$9 : 3 = 3 = x.$$

Primjer 3.18 *Količina i polovina te količine uvećana za 4 doseže 10. Kolika je količina?*
To je jednadžba oblika

$$x + \frac{1}{2}x + 4 = 10.$$

Oduzmimo 4 *od obje strane, imamo*

$$x + \frac{1}{2}x = 6,$$

pa je $x = 4$.

Zadaci su uglavnom vezani uz proračune za građenje ili uz ekonomske probleme.

Primjer 3.19 *Neki radnik mora odnijeti nepoznati broj kruhova iz pekare u stovarište. Umjesto u većim korpama, treba nositi u manjim: umjesto u „5-krušnim” u „4-krušnim”. Koliko korpi više treba prenijeti?*

4. Zaključak

Egipatska matematika ima izniman povijesni značaj u aritmetici, u proširenju računanja sa cijelim brojevima na računanje sa racionalnim brojevima, kao i u počecima rješavanja jednadžbi. Gledajući postojeće egipatske matematičke spise u cjelini, možemo vidjeti da su oni ništa drugo već zbirke praktičnih problema, poslovnih i administrativnih. Učenje kako nešto izračunati je bio glavni element problema. Iako se deduktivna metoda može naći u tragovima da pomogne tamo gdje intuicija prestaje, nigdje nema ni traga o nečemu što bi se moglo nazvati teorem ili opće pravilo postupka. Egipćani su se ograničili na „primjenjenu aritmetiku". Njima nije bilo stalo do naučnih metoda, već samo do praktičnih problema koji se primjenjuju u građevinarstvu, ekonomiji, zemljomjerstvu ili pak u sklopu religijskih shvaćanja. Velika je vjerojatnost da Egipćani nisu razvili aritmetiku iznad ove primitivne razine jer su imali prirodnu, ali nažalost ne baš dobru ideju priznavanja samo razlomaka s brojnikom jedan. Upravo zato je i najjednostavniji izračun postao spor i mukotrpan. Teško je reći je li simbolika spriječila korištenje razlomaka s drugim brojnikom ili je isključiva uporaba jediničnih razlomaka bio povod za njihovu simboliku. Ono u što nema sumnje je da je rukovanje jediničnim razlomcima zauvijek ostala posebna umjetnost u egipatskoj matematici.

Literatura

[1] D. Burton, The History of Mathematics: An Introduction, 6th Edition, The Mc-GrawHill 1 Companies, 2007

[2] M. Radojćić, Opšta matematika, Matematika Egipta, Mesopotamije i stare Grčke, dostupno na: http://poincare.matf.bg.ac.rs/ zlucic/opstamat.pdf

[3] F. M. Brückler, Povijest matematike 1, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

[4] The Mac Tutor History of Mathematics archive, dostupno na: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/