Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ana Čalošević

Egipatska geometrija

Diplomski rad

Osijek, 2014.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ana Čalošević

Egipatska geometrija

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2014.

Sažetak: Ovaj diplomski rad proučava geometriju starog Egipta. Najprije ćemo se upoznati s okolnostima koje su dovele do razvoja Egipatske geometrije, a potom s izvorima iz kojih doznajemo kako je ta geometrija izgledala. Upoznat ćemo formule i mjerne jedinice koje su koristili, te na primjerima s Rhindovog i Moskovskog papirusa pokušati pobliže upoznati njihov način razmišljanja i zaključivanja.

Ključne riječi: Rhindov papirus, Moskovski papirus, egipatska matematika, egipatska geometrija

Abstract: This graduation work studies the geometry of Ancient Egypt. First, we will introduce circumstances that led to the development of Egyptian geometry, then the sources from which we learn how this geometry looked. We will introduce formulas and units of measurement which are usedand on examples from Rhindovog papyrus and the Moscow papyrus try to learn more about their way of thinking and reasoning.

Key words: Rhind papyrus, Moscow papyrus, Egyptian math, Egyptian geometry

Sadržaj

1. Uvod

Izuzevši eventualno astronomiju, matematika je najstarija znanost, s najvećim kontinuitetom. Njezini su počeci još u staroj Antici. Iako se često kaže da je antička Grčka majka matematike, stari Grci imali su svoju ideju gdje su počeci matematike. Još je Aristotel napisao „Matematičke znanosti su nastale u susjednom Egiptu, jer su se svećenici njome bavili u slobodno vrijeme". Ovo je djelomično točno, jer se najveći napredak matematike dogodio zahvaljujući njihovom bavljenju matematikom i potragom za znanjem, no matematika je ponajprije nastala iz potrebe Egipćana za njom u svakodnevnom životu. Naime Egipat ili kako ga je Herod nazvao „dar Nila" jer Nil je svake godine plavio i granice posjeda su nestajale, pa je svaki put bilo potrebno ispočetka ih određivati, za što su bila potrebna jednostavna geometrijska pravila, stoga i geometriju možemo nazvati darom Nila. Naziv „geometrija" je spoj dvaju grčkih riječi koje znače „zemlja " i „mjera". Grčki povjesničar Herodot je pri svom posjetu Egiptu oko 460. godine prije Krista zapisao kako je tadašnji kralj Egipta podjelio zemlju narodu tako da je svatko dobio četverokut jednake veličine koju je obrađivao, te plaćao godišnji porez na prihod. Ukoliko bi nečije zemljište poplavio Nil, morao je otići kralju to prijaviti, te bi on poslao nadzornike da izmjere koliko se zemljište smanjilo, da bi vlasnik mogao platiti porez na ono što je ostalo, u omjeru na cijeli nametnuti porez. Stručnjake koji su provodili mjerenja Grci su kasnije nazivali „nosači užeta" jer su mjerenja vršili pomoću užeta s čvorovima. Koliko su razvili svoju vještinu mjerenja svjedoči i grčki filozof Demokrit (460.-370. godine prije Krista) koji se hvalio: „U konstruiranju linija pri iznošenju dokaza nije me nitko prestigao, čak ni takozvani egipatski nosači užeta " . Dakle on je smatrao da je u geometriji u kojoj se iznose dokazi i pri tome konstruiraju linije (dakle prije svega pravci i krugovi) vještiji od grčkih geometara onog vremena, pa „„čak i od egipatskih nosača užeta". Moglo bi se zaključiti da je u ono doba u Grčkoj postajalo mišljenje da su određeni ljudi u Egiptu znali geometriju kao znanost u kojoj se izvode konstrukcije i dokazi bolje i od samih Grka koje smatramo tvorcima te znanosti. Ti ljudi u Egiptu se zovu „nosači užeta", tj. ljudi koji nose uže, naravno u svrhu merenja. Dakle, to su geometri. Stoga je uže prvi instrument za mjerenje.

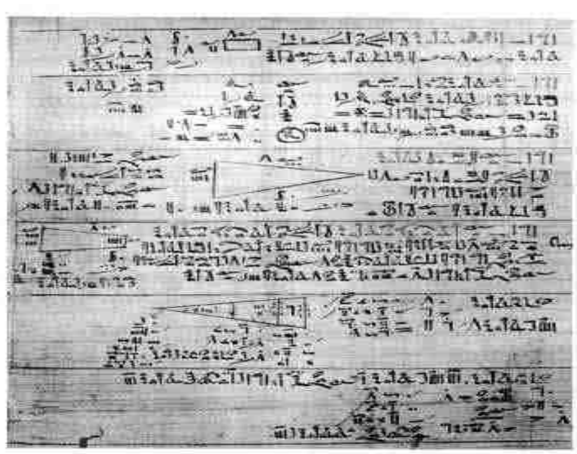
2. Otkriće Egipatskog znanja

Većina povjesničara kao datum početka otkrivanja egipatskog znanja uzima Napoleonovu invaziju 1798. Naime, Napoleon je htio zauzeti Egipat i tako prekinuti Engleske puteve u Indiju. Bila je to francuska vojna katastrofa, ali znanstveni trijumf. Napoleon je u svojim ekspedicijama vodio povjerenstvo za znanost i umjetnost, skupinu od 167 pomno odabranih znanstvenika, među kojima i Gasparda Monga i Jean-Baptiste Fouriera. Ovo povjerenstvo je imalo zadatak istražiti sve aspekte života kako u drevnom Egiptu, tako i u modernom vremenu. Veliki plan je bio obogatiti svjetsku zalihu znanja, i skrenuti pozornost na superiornost svoje kulture. Nakon njihova povratka u Francusku nastalo je djelo D'pis de lÉgypte, bilo je to djelo koje je obuhvaćalo drevne egipatske civilizacije, spomenike, moderni Egipat i prirodoslovlje Egipta. Nikad prije niti poslije nijedno djelo nije tako precizno i opširno opisalo neku stranu zemlju. D'pis de lÉgypte izazvalo je golemo zanimanje europskih kulturnih i znanstvenih krugova. Ono što je bilo još fascinantnije je da su povijesni zapisi o ovom ranom društvu bili zapisani tako da ih nitko nije bio u stanju prevesti na suvremeni jezik. Između ostalog Napoleonova ekspedicija je tijekom radova 1799. godine na rekonstrukciji stare tvrđave u blizini grada Rosette pronašla crnu bazaltnu ploču na kojoj su bila tri područja, a svaki od njih bio je ispisan drugim pismom, prvi dio je pisan hijeroglifima, drugi hijeratskim pismom, a treći grčkim. Poslali su tu ploču u Kairo, gdje su se nalazili znanstvenici koje je Napoleon poveo sa svojom ekspedicijom. Oni su prepisali ovaj kamen i tekst proširili među europskim znanstvenicima. Javni interes je bio toliko jak da kada je Napoleon bio prisiljen napustiti Egipat, u ugovoru o kapitulaciji bilo navedeno da kamen mora prepustiti Britancima. Kao i ostali artefakti i ovaj je završio u Britanskom muzeju, gdje su napravljene četiri replike, za sveučilišta u Oxfordu, Cambrige, Edinburg i Dublin, kako bi zajedničko odgonetanje i analiza započela. Ispostavilo se da je problem puno teži nego se mislilo, trebalo je 23 godine intezivnog proučavanja mnoštva znanstvenika kako bi se razriješio. Konačno 1808. godine mladi francuski znanstvenik i lingvist Jean-Franois Champollion započinje proučavati natpise s kopije kamena iz Rosette i pismo antičkih Egipćana u želji da dešifrira misteriozne hijeroglife. Dugo vremena nije bilo rezultata, a onda je pretpostavio da sva tri teksta (na tri različita pisma) govore o istom. Bila je to presudna misao, a s obzirom da je grčki jezik bio dobro poznat, klupko se polako počelo odmotavati. Četrnaest godina kasnije (1822.) Champollion potvrđuje da su neki hijeroglifi bili fonogrami (fonetski ili zvučni), a drugi opet piktogrami (slikovni). 1824. godine on objavljuje svoju znamenitu knjigu egipatskih hijeroglifa, u kojoj je ustvrdio osnovne temelje kompleksnog sistema hijeroglifskog pisanja.

2.1. Rhindov papirus

Većina našeg znanja o razvoju egipatske matematike izvedena je iz dva papirusa, svaki nazvan po bivšem vlasniku, tako se prvi od njih naziva Rhindov papirus. Rhindov papirus je kupljen u Luxoru, u Egiptu 1858. godine, kupio ga je Scotman A. Henry Rhind i nakon toga je bio u Britanskom muzeju. Rhindov papirus je pisan hijeratskim pismom (prilagođeni oblik hijeroglifa za pisanje perom i tintom) oko 1650. godine prije Krista, pisao ga je pisar Ahmes, koji je uvjeren da rad datira do dvanaeste dinastije 1849-1801. godine prije Krista. Iako je izvorni svitak papirusa gotovo 5.5 metara dug i 50 cm visok u Britanski muzej je došao u dva dijela, s tim da središnji dio nedostaje. Pretpostavljalo se da je zbog nestručnog razvijanja tako osjetljivog dokumenta došlo do prekida ili da su bila dva pronalazača i svaki je uzeo dio. Bilo kako bilo vjerovalo se da je ključni dio papirusa izgubljen. Tako je i bilo dok četiri godine nakon što je Rhind kupio papirus, američki egiptolog Edwin Smith nije prodao, ono što je mislio da je medicinski papirus. Ovaj papirus se pokazao kao obmana, jer je bio napravljen lijepljenjem fragmenata na svitak. Nakon Smithove smrti 1906. godine njegova kolekcija Egipatskih starina je prezentirana u New Yorku 1922. godine. I tada je otkriveno da su djelovi svitka zapravo dio Rhindovog papirusa. Dešifriranje papirusa je završeno kad su fragmenti donešeni u Britanski muzej i stavljeni na odgovarajuća mjesta. Rhind je također kupio kratki kožni rukopis, međutim zbog krhkog stanja ostao je neriješen više od 60 godina.

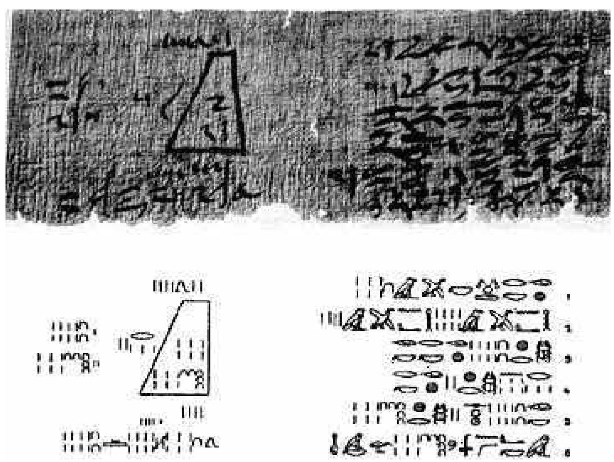
Rhindov papirus počinje s podebljanim premisama kako njegov sadržaj ima veze s „temeljitim proučavanjem svih stvari, uvid u sve što postoji, znanje svih opskurnih tajni". Uskoro postaje jasno da je to zapravo priručnik iz matematike, a jedine tajne koje sadrži su kako se množi i dijeli. Ipak, 85 problema koliko ih sadrži, daju poprilično jasnu sliku o karakteru egipatske matematike.



Slika 1. Rhindov papirus

2.2. Moskovski papirus

Bolje upoznavanje matematike starog Egipta omogućilo nam je prevođenje tzv. Goleniščevovog papirusa, koji se osim po svom vlasniku naziva i po mjestu u kojem se čuva tj. Moskovski papirus. Ovaj papirus mnogi povjesničari smatraju najimpresivnijim postignućem egipatske matematike. Nastao je oko 1850. godine prije nove ere. Autor ovog papirusa je nepoznat, a ruski istraživač V. S. Goleniščevu ga je otkrio sredinom 19. stoljeća i 1893. godine ga donio u Moskvu. Preveo ga je B. B. Struve, a prijevod je objavljen 1930. godine. Struve smatra da taj papirus otkriva kako „se početak naučnog posmatranja matematičkih pitanja ne nalazi u Grčkoj, nego u Egiptu". Zadaci su, kao i u Rhindovom papirusu, pisani riječima, kratko, a tako su i rješavani. Zadaci su i ovdje vezani za praktične probleme. Moskovski papirus se sastoji od 25 zadataka, među kojima su najznačajniji oni iz geometrije, jer daju velika saznanja o egipatskoj geometriji.

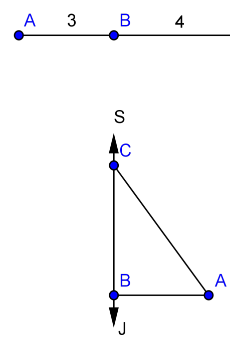


Slika 2. Moskovski papirus

3. Egipatska geometrija

3.1. Trokut u egipatskoj matematici

Egipatski geometri nisu samo koristili užad da bi mjerili duljinu, tj. da bi mjerili samo u jednom pravcu, nego i da bi određivali smjer istoka koji je okomit na smjer sjevera. Kako su to činili?
Zaboli bi kolac u zemlju, na užetu su čvorovima obilježili djelove koji se međusobno odnose kao 3 : 4 : 5. Držeći srednji dio zategnut u smjeru sjevera (što su znali po zvjezdi Sjevernjači), i spojivši krajeve užeta, dobili bi pravokutni trokut, pa time i pravac okomit na pravac sjevera. Ovo se često koristilo za određivanje nosećih zidova piramida i hramova.



Slika 3. Određivanje strana svijeta

Ono zbog čega je ovo bilo moguće jest svojstvo brojeva 3, 4 i 5 da tri dužine koje su proporcionalne ovim brojevima mogu sastaviti pravokutni trokut. Zaista, po nama poznatom Pitagorinom poučku stranice pravokutnog trokuta trebaju zadovoljavati $a^2 + b^2 = c^2$, a brojevi 3, 4 i 5 to zadovoljavaju. Stoga možemo zaključiti da su Egipćani poznavali Pitagorin poučak barem u najosnovnijem obliku.
Danas brojeve koji zadovoljavaju to svojstvo nazivamo pitagorejskim brojevima, a do njih lako možemo doći koristeći sljedeće jednakosti:

$$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \quad i \quad (a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4.$$

Oduzimanjem slijedi:

$$(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2 = (2ab)^2,$$

tj.

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2.$$

Ako u ovu jednakost uvrstimo $a = 1$, $b = 2$, imamo: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Ako stavimo $a = 2$, $b = 3$, imamo: $5^2 + 12^2 = 13^2$, itd. Ovakvih brojeva možemo pronaći koliko želimo, međutim ovi osnovni 3, 4, i 5 se i dalje nazivaju egipatskim trokutom, a oni su im zaista davali poseban značaj, te su i dimenzije hramova i piramida, njihova visina, širina i dužina odnose kao ti brojevi.

Površina trokuta

Osim što su na neki način poznavali ova svojstva pravokutnog trokuta, Egipćani su točno računali njegovu površinu kao polovinu umnoška kraćih stranica, to jest $P = \frac{1}{2}ab$. Međutim ono što nisu znali, ili barem nigdje nije zabilježeno jest to da se ovako dobija točna površina isključivo za pravokutni trokut, a oni su na isti način računali površinu svakog trokuta, što je za njihove proračune davalo dosta dobre rezultate.

Površina pravokutnika

Na sličan način su računali i površinu četverokuta: kao umnožak prosjeka duljina nasuprotnih stranica.

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2} = \frac{1}{4}(a+c)(b+d).$$

Primjetimo da kad je u pitanju pravokutnik imamo:

$$P = \frac{1}{4} \cdot 2a \cdot 2b = ab,$$

što je točna formula za površinu pravokutnika. Zanimljivost vezana za ovu formulu je i to što se ista pogrešna formula koristila i u antičkom Babilonu.

Površina trapeza

U 52. zadatku Rhindovog papirusa se traži površina trapeza (opisan kao krnji trokut), sa osnovicama duljina 6 i 4, i jednim krakom duljine 20. Računali su $P = \frac{1}{2}(a+c)h = \frac{1}{2}(6+4) \cdot 20$. Ova formula funkcionira ako je taj krak okomit na osnovice, međutim u tekstu to nije jasno rečeno, a na gruboj skici se ne vidi okomitost. Tako je i ova formula kao i mnoge druge formule starih Egipćana ostala nejasna i nedorečena.

3.2. Površina kruga

Na Rhindovom papirusu od ukupno 85 zadataka, geometrijski su oni od 41. do 60. Ovi zadaci se uglavnom bave količinom zrna pohranjenim u pravokutnim i cilindričnim nastambama. Možda najbolji uspjeh Egipćana u geometriji ravnine je bila njihova metoda za pronalaženje površine kruga, koja se pojavljuje u 50-om zadatku Rhindovog papirusa.

Primjer 3.1 *Kolika je površina okruglog polja promjera 9 kheta?*
Ovako su otprilike oni računali: od promjera oduzmi njegovu $\frac{1}{9}$ i to kvadriraj. Današnjim simbolima to bismo pisali ovako:

$$P = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2,$$

gdje d označava duljinu promjera kruga. Ako to usporedimo s današnjom formulom za računanje površine kruga, $\frac{\pi d^2}{4}$ onda,

$$\frac{\pi d^2}{4} = \left(\frac{8d}{9}\right)^2,$$

kad to raspišemo dobijemo:

$$\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3.1605...$$

kao egipatsku vrijednost omjera opsega kružnice i njezinog promjera. Ovo je približna vrijednost aproksimacije $3\frac{1}{7}$, što mnogi smatraju dobrim za praktičnu primjenu.

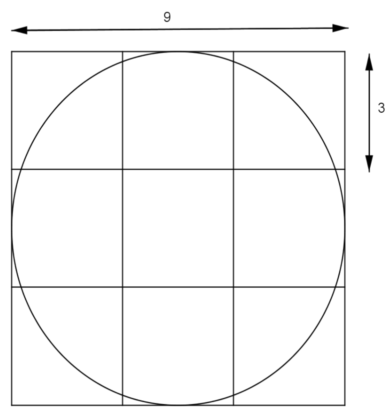
3.3. Broj π i njegova vrijednost kroz povijest

Iako je već egipatska vrijednost broja π bila sasvim dobra za praktičnu primjenu, mnogi matematičari su i dalje proučavali i pokušavali otkriti što točniju vrijednost tog broja. Tako je broj π postao jedan od najzanimljivijih i najviše proučavanih brojeva u čitavoj matematici. Općenito, značajni pomaci u povećanju točnosti broja π događali su se u tri navrata:

- u Antičko doba kada je broj π računat geometrijski
- u drugom tisućljeću kad su matematičari počeli koristiti „novu” matematiku za izračun broja π, tj. otkrićem beskonačnih nizova
- razdoblje digitalnog računanja na računalima.

3.3.1. Antičko doba

Već smo rekli kako su Egipćani znali da je omjer opsega kružnice i promjera isti za sve kružnice te da iznosi $\pi = \frac{256}{81}$. Iako ne znamo točno kako su došli do formule za površinu kruga $P = \left(\frac{8d}{9}\right)^2$, pa samim time i do ove vrijednosti za π, u 48om zadatku Rhindovog papirusa se to da naslutiti. U tom zadatku Ahmes krug zamijenjuje kvadratom kojemu su u vrhovima četiri trokuta, a u sredini piše broj 9. Ovim postupkom je od kvadrata s duljinom stranica 9 dobio osmerokut odrezavši četiri trokutića u vrhovima (od kojih svaki ima površinu $\frac{9}{2}$ ukupne površine kvadrata, to jest stranica mu je trećina stranice kvadrata). Iz toga je zaključio da osmerokut ima otprilike istu površinu kao krug upisan kvadratu, jer su neki dijelovi kruga izvan osmerokuta, a neki opet unutar, a ti su dijelovi otprilike jednaki. Stoga je računao da osmerokut ima površinu $P = 9^2 - 4 \cdot \frac{9}{2} = 63$ što je otprilike vrijednost izraza $P = \left(\frac{8d}{9}\right)^2$ za $d = 9$, pa je moguće da je ova formula nastala upravo iz razmatranja aproksimacije kruga osmerokutom.



Slika 4.Površina kruga.

U Mezopotamiji se 2000. godina prije Krista koristila formula za opseg kruga $O = 6r$, gdje je r polumjer kruga, iz toga slijedi da je $\pi = 3$. U Starom zavjetu u Knjizi kraljeva, pri opisu kupaonice u Solomonovom hramu se koristi $\pi = 3$. Francuska arheološka ekspedicija je pronašla dokaze da se u starom Babilonu koristila vrijednost $3\frac{1}{8}$ za π.
Antifont i Brajson iz Heraklije, Sokratovi suvremenici, pokušali su oko 430. godine prije Krista izračunati površinu kruga rabeći metodu iscrpljivanja (ekshaustije). Krenuvši od pravilnog šesterokuta i zatim udvostručavajući broj stranica i upisujući pravilne mnogokute u krug Antifont je računao njihove površine. Svaka sljedeća površina bila je sve bliža površini kruga.
Brajson je računao površine upisanih i opisanih mnogokuta shvativši da je površina kruga negdje između. Sljedeći značajni korak u izračunu broja π napravio je Arhimed sa Sirakuze (287.-212. prije Krista). On je krugu upisivao i opisivao pravilne mnogokute, ali je računao njihove opsege. Koristeći se 96-stranim mnogokutom dokazao je da $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. Kada bismo izračunali aritmetičku sredinu tih dviju vrijednosti dobili bismo točnu vrijednost broja π do na deset tisućinki.
Kineski matematičar Liu Hui sličnom metodom i upisujući mnogokut sa 3071 stranice (oko 265. godine) procjenjuje $\pi = 3.14159$.

3.3.2. Klasično doba

Jedan od najpoznatijih matematičara Srednjeg vijeka koji se bavio ovim problemom je Fibonacci, on procjenjuje π na 3.141818. Veći napredak je učinjen u 16. st., a učinio ga je Viéte, rabeći Arhimedovu metodu računanja opsega procijenio $3.1415926535 < \pi < 3.1415926537$. U ovo vrijeme mnogi matematičari proučavaju broj π međutim Ludolf van Ceulen je posvetio svoj život pronalaženju što većeg broja decimala broja π, izračunao ga je na 35 decimala, no ubrzo nakon njegove smrti, Willebrod Snell popravlja Arhimedovu metodu te dobija 35 decimala puno lakše. Umro je ne dokazavši svoje teoreme, pa je to u činio Christian Huygens, koji je još doradio metodu i već s trokutom dobio Arhimedovu preciznost. Oni su bili posljednji matematičari koji su rabili Arhimedovu ideju računanja.

Engleski matematičar John Wallis pokušao je riješiti problem ovog omjera aproksimirajući površinu četvrtine kruga površinama beskonačno malih pravokutnika, i otkrio formulu:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}.$$

Poznata je i formula škotskog matematičara Jamesa Gregoryja

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^11}{11} + \cdots ,$$

do iste formule došao je i Leibniz, a iz nje proizlazi

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots$$

Iako je ova formula mnoge očarala, jako sporo konvergira.

Puno brže konvergira Newtonova formula:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3 \cdot 2^3}\right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\left(\frac{1}{5 \cdot 2^5}\right) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\left(\frac{1}{7 \cdot 2^7}\right) + \cdots$$

3.3.3. Doba računala

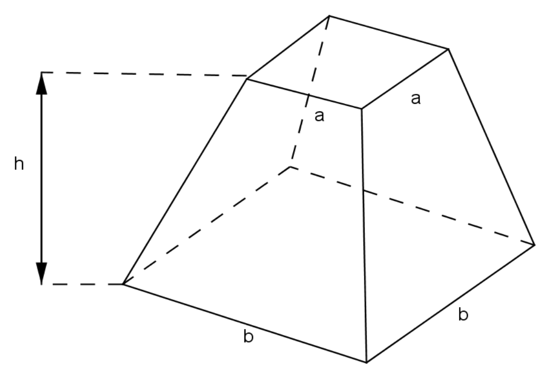
Već pojavom mehaničkog računala matematičari dolaze do 1000 decimala, no pojavom digitalnih računala, taj broj naglo raste, više nisu važne samo formule i algoritmi i njihova brzina konvergencije, već i brzina, i preciznost računala na kojemu se vrši izračun.

4. Volumen krnje piramide

Iako Moskovski papirus ima samo 25 zadataka, on sadrži vrhunac antičke geometrije. U 14-om zadatku je prikazano da su Egipćani poznavali točnu formulu za volumen krnje piramide. U današnjim oznakama ona glasi:

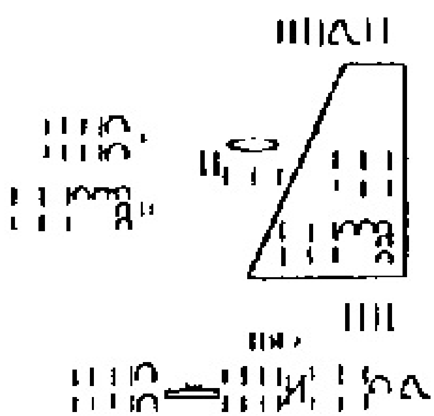
$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2),$$

gdje h visina krnje piramide, a i b duljine stranice kvadrata osnovica (gornje i donje, redom).



Slika 5. Krnja piramida.

Skicirani lik za ovaj zadatak izgleda kao trapez, međutim izračun koji prati skicu, pokazuje da se radi o volumenu pravilne četverostrane krnje piramide.



Slika 6. Dio Moskovskog papirusa o izračunavanju volumena krnje piramide

Točan tekst koji bi pratio ovaj zadatak glasi:

Primjer 4.1 *Primjer izračuna volumena krnje piramide.*
Ako vertikalna udaljenost, od donjeg kvadrata sa stranicom duljine 4*, do gornjeg kvadrata sa stranicom duljine* 2*, iznosi* 6*, onda postupak za računanje glasi ovako:*

- *Kvadriraj* 4*!* $\Rightarrow 4^2 = 16$. *(a^2)*
- *Pomnoži* 2 *sa* 4*!* $\Rightarrow 2 \cdot 4 = 8$. *($a \cdot b$)*
- *Kvadriraj* 2*!* $\Rightarrow 2^2 = 4$. *(b^2)*
- *Zbroji sve dobivene rezultate!* $\Rightarrow 16 + 8 + 4 = 28$. *($a^2 + a \cdot b + b^2$)*
- *Uzmi* $\frac{1}{3}$ *od* 6*, to je* 2*.* $\left(\frac{h}{3}\right)$
- *Pomnoži* 28 *sa* 2*, to je* 56*.* $\left(\frac{h}{3}(a^2 + a \cdot b + b^2)\right)$

Volumen je 56.

Iako se ovo rješavanje odnosi na točno određeni zadatak, a ne na općenit slučaj, neki povjesničari matematike smatraju ovaj rezultat vrijednim kao egipatske piramide. Općenito je prihvaćeno da su Egipćani poznavali točnu formulu za volumen četverostrane piramide,

$$V = \frac{h}{3}a^2.$$

Analogno formuli za površinu trokuta $P = \frac{1}{2}bh$, možda su mogli pogoditi da je volumen piramide umnožak neke konstante s ha^2. Možemo čak pretpostaviti da su pogodili da je ta konstanta $\frac{1}{3}$. No, formula

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

nikako nije mogla biti nagađanje. Do nje se moglo doći samo nekom vrstom geometrijske analize ili algebre iz formule $V = \frac{h}{3}a^2$. Kako god, gotovo je nemoguće rekonstruirati metodu kojom su oni došli do točne formule, barem iz nama danas dostupnih materijala.

5. Nagađanja o Velikoj piramidi

Kad se spominje Egipat i egipatska matematika, svakako se mora spomenuti Velika piramida u Gizi, podignuta oko 2600 godina prije Krista, kao grobnica faraona Kufua, kojeg su Grci zvali Keops, pa se često naziva i Keopsova piramida. Ona je monumentalni dokaz o poznavanju geometrijskog oblika, relativno visoko razvijene inžinjerske konstrukcije, kao i socijalne i državne uređenosti. Prema Herodotu, piramidu je gradilo 400 000 radnika godišnje, tijekom 30 godina. Radnici su bili podijeljeni u četiri grupe po 100 000 radnika u svakoj, i svaka grupa je radila po tri mjeseca. (Prema proračunima u jednom trenutku na piramidi nije moglo raditi više od 36000 ljudi, bez da ne ometaju jedni druge). Deset godina je trebalo da bi se izgradila cesta do vapnenačkog kamenoloma iz kojeg su 2.3 milijuna kamenih blokova teških u prosjeku 2 i po tone i dugačkih nešto više od 2 metra u svakom smjeru. Ovi blokovi su postavljeni skupa tako precizno, da na spojevima nema mjesta ni da se ugura oštrica noža. Ono što impresionira već dugi niz godina, nije njena estetska ljepota, nego veličina. To je najveća zgrada antičkog doba i jedna od najvećih ikad podignutih. Neoštećena je bila visoka 145.75 metra, ali se godinama smanjila za desetak metara. Kut stranica u odnosu na osnovicu iznosi $51^o\ 51'$, a svaka je strana okrenuta prema jednoj od četiri strane svijeta, gotovo kao četiri glavne točke na kompasu, s pogreškom manjom od 1^o. Presjek piramide u bilo kojem dijelu je kvadrat, a duljina stranice baze iznosi 229 metara.

Velika piramida i dan danas ispunjava misli avanturista najnevjerovatnijim nagađanjima. Ovu piramidu mistici pripisuju drevnim graditeljima metafizičkim moćima i ezoteričnim znanjem.

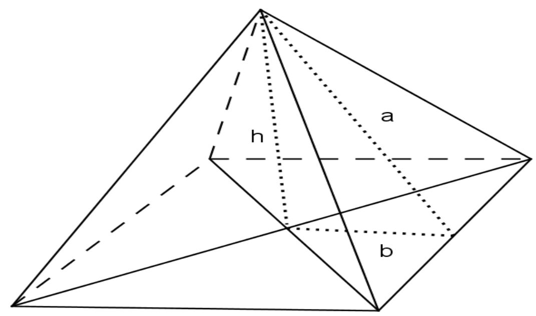
Još jedno od neobičnih svojstava piramide jest i to što je građena tako da polovica opsega baze podijeljena s visinom piramide iznosi gotovo točno π, tj.

$$\frac{2 \cdot 229}{145.75} = 3.1423...,$$

a znamo da je $\pi = 3.145926...$, što znači da je razlika samo 0.00036, ta približnost među tim vrijednostima je samo slučajna i nema osnove u bilo kojem matematičkom zakonu.

U jednoj od teorija se govori kako su egipatski svećenici rekli Herodotu da su dimenzije Velike piramide izabrane tako da je površina svake strane piramide jednaka površini kvadrata sa stranicom jednake dužine kao visina piramide. Ako s $2b$ označimo duljinu stranice baze, a s a visinu trokuta (strane piramide) i s h visinu piramide, tada možemo zapisati:

$$h^2 = \frac{1}{2}(2b \cdot a) = ab.$$



Slika 7. Skica Keopsove piramide.

Iz Pitagorinog teorema znamo da je $a^2 = b^2 + h^2$, pa je $h^2 = a^2 - b^2$. Izjednačavajući jednakosti za h dobivamo:

$$a^2 - b^2 = ab.$$

Podijelimo obje strane s a^2:

$$1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b}{a} \quad \text{tj.} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b}{a} = 1.$$

Pozitivno rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 + x = 1$ jeste $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Pa imamo da je naš omjer:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0.6180339...$$

recipročna vrijednost „zlatnog reza", vrijednost koja se pokazala značajnom mnogo puta u matematici i njezinoj primjeni.

Koliko su graditelji bili uspješni u ostvarivanju zlatnog reza (ako im je on zaista bio cilj)? Provjerimo s poznatim mjerama piramide:

$$a = \sqrt{h^2 + b^2} = \sqrt{(145.75)^2 + (114.5)^2} = 185.35,$$

slijedi omjer:

$$\frac{b}{a} = 0.61775...$$

Ovu teoriju da su Egipćani namjerno koristili zlatni rez pri gradnji zlatne piramide prvi je postavio John Taylor, koji je 1859. godine objavio djelo „Velika piramida, zašto je sagrađena i tko ju je sagradio?". Matematičar amater, Taylor je 30 godina skupljao i uspoređivao mjerenja koja su obavljali posjetitelji piramide. Iako je napravio niz maketa piramide, nikada je nije posjetio. Budući da jedini opis piramide u Herodotovoj „Povijesti" glasi: „Njezina baza je kvadrat, svaka strana je dugačka 800 stopa i iste visine", potrebno je mnogo povjerenja da bismo prihvatili Taylorovu tvrdnju. Štoviše i mjere koje je Herodot zabilježio popriličnu odudaraju od točnih dimenzija.

Druga teorija koja se često uzima kao dogma je da ukupna površina piramide može biti izražena na način koji vodi do zlatnog reza, tj. površina baze se odnosi prema zbroju površina strana piramide kao zbroj površina strana piramide prema zbroju površine baze i zbroja površina strana piramide. Budući da je zbroj površina četiri strane piramide zapravo zbroj površina četiri sukladna trokuta, on iznosi $4 \cdot \frac{1}{2}(2ba)$, i površina baze je $(2b)^2$ možemo pisati:

$$\frac{4b^2}{4ab} = \frac{4ab}{4ab + 4b^2},$$

što je ekvivalentno s

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}.$$

Uvrstimo li naše mjere, dobivamo:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{185.35}{299.85} = 0.61814...$$

pa vidimo da su omjeri $\frac{b}{a}$ i $\frac{a}{a+b}$ gotovo isti. Slučajno ili ne, to je povod za spekulacije. Postoje još neke teorije. Neki primjerice smatraju kako su Egipćani gradili piramide kako bi one zadržale da pustinjski pijesak ne pokrije plodno tlo uz Nil. U srednjem vijeku bilo je popularno vjerovanje da su one bile silosi, koje su Židovi u zatočeništvu morali graditi za spremanje kukuruza u rodnim godinama. Ova legenda je sačuvana i u mozaicima koji su rađeni oko 1250. godine u crkvi Svetog Marka u Veneciji. Dio mozaika o Josipu prikazuje kako je njegov brat poslan da donese snopove žita iz piramide. Spekulacije su počele dobivati znanstvenu notaciju 1864., kada je jedan cijenjeni škotski profesor astronomije, Charles Piazzi Smyth, razradio njegovu posebnu mjernu jedinicu za Keopsovu piramidu i nazvao je piramidni inč, koji je jednak 1.001 običnih inča. Koristeći ovaj mistični inč za mjerenje neravnina i pukotina duž zidova unutarnjih prolaza i odaja, zaključio je da je Veliku piramidu izgradio Bog kao instrument proročanstva, takozvana Biblija u kamenu. Ako netko zna čitati njegove poruke u piramidi će naći sve vrste značajnih informacija o povijesti i budućnosti čovječanstva: veliku poplavu, rođenje Krista, početak i kraj prvog svjetskog rata, i tako dalje. Kad je Smyth datirao 1913. godinu kao početak prvog svjetskog rata, njegovi sljedbenici su isticali kako je pogriješio samo jednu godinu. Smyth i njegovi sljedbenici su širili maštovitu i ekstravagantnu teoriju o tajnama skrivenim u mjerama i mjerenjima Velike piramide. Na njihovu ruku je išlo i proricanje početka prvog svjetskog rata, međutim britanski egiptolog Flinders Petrie je napisao kako je jednom uhvatio pripadnike Smythovog kulta kako potajno prilagođava mjerenja kako bi bila u skladu s njihovom teorijom, pa ova nagađanja možemo odbaciti kao besmislice.

6. Geometrijski problemi s najpoznatijih papirusa

6.1. Mjerne jedinice

Ranije smo rekli kako je uže najstariji mjerni instrument, a u ovom poglavlju ćemo spomenuti i mjerne jedinice koje su koristili stari Egipćani i neke pojmove vezane uz geometriju spominjane u papirusima:

- Peremus - visina objekta
- Utha-thebet - dužina objekta
- Seked - nagib bilo koje strane piramide u odnosu na bazu.

Mjerne jedinice za duljinu:

- Kraljevski lakat - glavna mjerna jedinica u arhitekturi, iznosio je otprilike $52,5$ cm
- Mali lakat - otprilike duljina podlanice, iznosi otprilike 45 cm
- Dlan - iznosi otprilike 7.5 cm, u jedan kraljevski lakat stane 7 dlanova
- Prst - četiri prsta čine dlan
- Khet - iznosi otprilike 52.5 m, vjeruje se da dolazi od duljine užeta sa 100 čvorova, a razmak između čvorova je jedan lakat.

Za površinu se koristio:

- Setat - jedan kvadratni khet, što je 10 000 kvadratnih lakata.

Volumen i masa:

- Hekat - približno 4.8 litara
- Heqat - posebna jedinica za mjernje žita, približno 4 hekata
- Khar - 20 hekata, ili $\frac{2}{3}$ kvadratnih lakata, približno 96 litara
- Doben - mjera za težinu, vrijednost mu kroz povijest varirala, od 13.6 grama, pa sve do 91 grama.

Kako je već rečeno najpoznatiji papirusi pomoću kojih smo upoznali egipatsku matematiku su Rhindov i Moskovski papirus. Najzanimljivije i impresivnije zadatke smo već spomenuli, ali to nisu svi, pa spomenimo još neke.

6.2. Problemi s Rhindovog papirusa

Na Rhindovom papirusu geometrijski zadaci su oni od 41. do 60. Prvih pet se bave izračunom volumena.

Primjer 6.1 *Problem 41. Izračunaj volumen silosa u obliku valjka, promjera* 9 *i visine* 10.
Ako s d *označimo promjer, a s* h *visinu valjka, volumen je tada:*

$$V = \left[\left(1 - \frac{1}{9}\right) d\right]^2 h.$$

U našim matematičkim oznakama i ako uzmemo da je $d = 2r$ *dobivamo*

$$V = \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2 h = \frac{256}{81} r^2 h.$$

Slijedi da je aproksimacija za $\pi = \frac{256}{81} = 3.1605...$
Pgledajmo kako je otpilike izgledao njihov izračun:

- *Od* 9 *oduzmi njezinu* $\frac{1}{9}$*!* $\Rightarrow 9 - \frac{1}{9} \cdot 9 = 9 - 1 = 8$
- *Kvadriraj* 8*!* $\Rightarrow 8^2 = 64$.
- *Pomnoži* 64 *s* 10*!* $\Rightarrow 64 \cdot 10 = 640$.
- *Volumen je* 640.

Ako u našu formulu za volumen uvrstimo $d = 9$, $h = 10$, π *vidimo kako je njihov rezultat poprilično točan:*

$$V = \pi \cdot (4.5)^2 \cdot 10 = 636.1725...$$

Problemi 42 i 43 i su vrlo slični 41om i odnose se na izračunavanjem volumena valjka, samo s različitim zadanim vrijednostima.

Primjer 6.2 *Problem 44. Izračunaj volumen silosa u obliku kvadra, s visinom 10, širinom 10 i dužinom 10.*

- *Pomnoži* 10 *sa* 10*!* $\Rightarrow 10 \cdot 10 = 100$
- *Pomnoži* 100 *sa* 10*!* $\Rightarrow 100 \cdot 10 = 1000$.
- *Volumen je* 1000 *kvadratnih lakata.*

Na ovom primjeru ćemo pokazati kako se laktovi pretvaraju u khare, pa u heqate žita.

- *Uzmi* $\frac{1}{2}$ *od* 1000*, i dodaj to* 1000 $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1000 + 1000 = 1500$*, to je u kharima*
- *Uzmi* $\frac{1}{20}$ *od* 1500 $\Rightarrow \frac{1}{20} \cdot 1500 = 75$
- *Pomnoži s* 75 *s* 100 $\Rightarrow 75 \cdot 100 = 7500$.

Problem 45. je zapravo isti zadatak kao 44., samo je poznat volumen, a traže se dimenzije, budući da se isto traži i u 46. zadatku, samo s drugim vrijednostima, rješit ćemo 46.

Primjer 6.3 *Problem 46. Izračunaj dimenzije silosa u obliku kvadra, zadanog volumena* 2500 *heqata.*

- *Pomnoži* 25 *sa* 20*!* $\Rightarrow 25 \cdot 20 = 500$ *(to je u kharima)*
- *Uzmi* $\frac{1}{10}$ *od* 500*!* $\Rightarrow \frac{1}{10} \cdot 500 = 50$.
- *Uzmi* $\frac{1}{10}$ *od* 50*!* $\Rightarrow \frac{1}{10} \cdot 50 = 5$.
- *Uzmi* $\frac{2}{3}$ *od* 5*!* $\Rightarrow \frac{2}{3} \cdot 5 = 3\frac{1}{3}$.

Problem 48. smo već spominjali, i objasnili računanje površine kruga pomoću aproksimacije osmerokutom, a budući da je Problem 50. gotovo isti, ovdje ih nećemo navoditi. Prostali problemi do 55. su računanje površina, pomoću formula za trokut, pravokutnik, ili trapez koje smo već pobrojali.

Preostali geometrijski problemi se bave pravilnim piramidama, traži se seked, to jest nagib između bilo koje od četiri strane piramide na bazu, te se mjeri kao omjer rada i uspona (promatramo pravokutni trokut u piramidi, iz vrha spustimo okomicu na bazu), ta mjera je zapravo slična našem kotangensu kuta.

Primjer 6.4 *Problem 56. Duljina osnovice baze je* 360 *lakata, a visina piramide je* 250 *lakata. Koliki je nagib?*

- *Uzmi* $\frac{1}{2}$ *od* 360*!* $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 360 = 180$.
- *Računamo omjer* 180 *i* 250*!* $\Rightarrow 0.72$*, ali u njihovom zapisu je to:* $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}$*, to je u lakatima*
- *Primjenimo omjere mjernih jedinica:*
  $\frac{1}{2}$ *lakta* $\Rightarrow 3 + \frac{1}{2}$ *dlanova*
  $\frac{1}{5}$ *lakta* $\Rightarrow 1 + \frac{1}{3} + 115$ *dlanova* $\frac{1}{50}$ *lakata* $\Rightarrow \frac{1}{10} + \frac{1}{25}$ *dlanova.*

- *Zbrajanjem dobivamo nagib:* $5\frac{1}{25}$ *dlanova.*

Primjer 6.5 *Problem 57. Piramida ima dužinu osnovice (ukha-thebt)* 140*, a nagib (seked)* 5 *dlanova i* 1 *prst. Koliki je peremus?*

- *Pomnoži nagib s* 2*, to je* 10 *dlanova i* 2 *prsta, to jest* $10\frac{1}{2}$ *dlanova*
- *Treba izračunati koliko je to laktova,* $\frac{2}{3}$ *od* $10\frac{1}{2}$ *je* 7*, to jest jedan lakat*
- *Izračunaj* $\frac{2}{3} \cdot 140 = 93\frac{1}{3}$ *lakata, to je peremus.*

6.3. Problemi s Moskovskog papirusa

Iako je najimpresivniji 14. zadatak koji se bavi volumenom krnje piramide, Moskovski papirus sadrži još neke geometrijske zadatke. Prva dva zadatka su oštećena pa ne znamo čime se bave. Problemi 4 , 7 i 17 se bave izračunima vezanim uz trokut, a problem 6 pravokutnikom, a i 10. zadatak se bavi računanjem površine polucilindra. Mi ćemo ovdje još navest problem i 6. Ovaj problem je zanimljiv jer se vidi da su Egipćani poznavali kvadratni korjen.

Primjer 6.6 Problem 6. *Nađi duljine stranica pravokutnika površine* 12 *setata, ako se omjeri stranica odnose kao* $1 : \frac{3}{4}$.
Račun bi mogao ići ovako:

- $1 + \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$
- $\frac{4}{3} \cdot 12 = 16$
- $\sqrt{16} = 4 \Rightarrow x = 4$
- $4 \cdot \frac{3}{4} = 3 \Rightarrow y = 3.$

7. Zaključak

Iako možemo biti sigurni da su graditelji piramida imali veliko znanje o geometriji, do nas je došlo vrlo malo matematike iz tog razdoblja. Dva glavna matematička papirusa, iako različitih godina, za nas predstavljaju stanje matematike 2000.-1700. godine prije Krista. Uzimajući ih u obzir, prisiljeni smo zaključiti kako egipatska matematika nikad nije napredovala dalje od intuitivne faze, u kojoj su mjerenja opipljivih objekata bili glavni predmet razmatranja. Geometriji tog razdoblja nedostajalo je deduktivne strukture, nije bilo teorijskih rezultata, niti općih pravila postupaka. Ona se bavi samo proračunima, i to ponekad približnim, za probleme koji su imali praktičnu primjenu u konstrukciji objekata za svakodnevnu uporabu, na primjer silosa i nastambi, kao i u gradnji.

Literatura

[1] F. M. Brückler, Povijest matematike 1, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

[2] D. Burton, The History of Mathemathics: An Introducti6th Edition, The McGraw-Hill 1 Companies,2007

[3] M. Clagett, Ancient Egyptian Science A Source Book, Volume Three Ancient Egyptian Mathematics, American Philosophical Society Independence Square, Philadelphia, 1999

[4] S. Gračan, S π na kavu, Matematika i škola,broj 4 (2000), članak 6, 163-170

[5] M. Radojćić, Opšta matematika, Matematika Egipta, Mesopotamije i stare Grčke, Matematički fakultet, Beograd, dostupno na: http://poincare.matf.bg.ac.rs/ zlucic/opstamat.pdf

[6] B. Srdić, Kako su računali stari Egipćani, Hrvatski matematički elektronski časopis, dostupno na: http://e.math.hr/old/egipat/index.html

[7] The Mac Tutor History of Mathematics archive, dostupno na: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk

[8] History of Mathematics at St. Louis University, Mathematics and Computer Science Department, dostupno na: http://mathcs.slu.edu/history-of-math/index.php/Main_Page

Životopis

Zovem se Ana (Nemet) Čalošević. Rođena sam 22. lipnja 1987. godine u Osijeku. Od 1994. do 2002. godine pohađam Osnovnu škola Dalj u Dalju, gdje razvijam ljubav prema matematici i fizici. Po završetku osnovne škole 2002. godine kako bih i dalje razvijala znanje iz matematike i fizike upisujem Elektrotehničku i prometna školu u Osijeku. Budući da mi tamo matematiku predaje profesor Altman, oduševljava me svojim predavanjima i budi mi želju da tako i ja jednog dana prenosim svoje znanje i ljubav za matematikom na druge. Završivši srednju školu 2006. upisujem Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike. Za vrijeme studija radim kao učiteljica matematike i informatike na zamjeni u Osnovnoj školi Bršadin, Osnovnoj školi Retfala, te Tehničkoj školi Nikola Tesla u Vukovaru, zbog čega 2013. završavam prediplomski studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.